

## PENAKSIR RASIO-CUM-DUAL UNTUK VARIANSI POPULASI PADA SAMPLING ACAK SEDERHANA

Siska Yulianti<sup>1\*</sup>, Arisman Adnan<sup>2</sup>, Haposan Sirait<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Mahasiswa Program S1 Matematika

<sup>2</sup>Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau

Kampus Binawidya Pekanbaru 28293, Indonesia

\*[Siska\\_yulianti279@gmail.com](mailto:Siska_yulianti279@gmail.com)

### ABSTRACT

This article discusses three estimators for estimating population variance in simple random sampling i.e. ratio estimator, dual ratio estimator and ratio cum dual estimator which is a review of the article of Yadav and Kadilar [*Journal of Reliability and Statistical Studies*, 6 (2013): 29-34]. These three estimators are all biased, and *MSE* (mean square error) of each estimator can be obtained. Furthermore, these *MSE* are compared to each other. An example is given to show the efficiencies of estimators.

Keywords: simple random sampling, ratio estimator, dual to ratio estimator, ratio cum dual estimator and mean square error.

### ABSTRAK

Artikel ini membahas tiga penaksir untuk variansi populasi pada sampling acak sederhana, yaitu penaksir rasio, penaksir dual rasio dan penaksir rasio cum dual yang merupakan review dari artikel Yadav dan Kadilar [*Journal of Reliability and Statistical Studies*, 6 (2013): 29-34]. Ketiga penaksir ini merupakan penaksir bias dan *MSE* (*mean square error*) penaksir dapat ditentukan. Selanjutnya, *MSE* ini dibandingkan satu sama lain. Contoh diberikan untuk menunjukkan efisiensi dari penaksir.

Kata kunci: sampling acak sederhana, penaksir rasio, penaksir dual rasio, penaksir rasio cum dual, dan *mean square error*.

## 1. PENDAHULUAN

Dalam menaksir suatu parameter, ada beberapa metode yang digunakan sehingga sampel yang diambil dapat mewakili populasi yang akan ditaksir, salah satunya adalah metode rasio. Tujuan metode rasio adalah untuk meningkatkan ketelitian suatu penaksir dengan mengambil manfaat hubungan antara  $y_i$  dan  $x_i$ , dimana  $y_i$  adalah unit populasi  $Y$  dan  $x_i$  adalah unit populasi  $X$  [1].

Pengembangan metode rasio yang diajukan adalah dengan menggunakan metode dual rasio dan rasio cum dual, dengan  $X$  merupakan variabel tambahan yang mempunyai korelasi positif terhadap  $Y$ . Metode dual rasio adalah dibutuhkan sampel pendukung  $x_i^*$ , dengan  $x_i^*$  adalah sampel diluar  $x_i$  dalam populasi  $X$  yang berhubungan dengan  $y_i$  yang akan diteliti untuk setiap sampel. Perbandingan  $\bar{Y}$  dan  $\bar{y}$  setara dengan perbandingan  $\bar{x}^*$  dan  $\bar{X}$  [1].

Metode penaksir rasio cum dual merupakan cara untuk memperkirakan nilai dari variabel tambahan  $X$  dari suatu parameter. Dalam metode penaksir ini, suatu variabel  $Y$  yang akan diteliti diperoleh untuk setiap unit didalam sampel. Dengan memanfaatkan hubungan antara  $x_i$  dan  $y_i$ , dimana  $x_i$  unit sampel dari populasi berkarakter  $X$  dan  $y_i$  unit sampel dari populasi berkarakter  $Y$  [4].

## 2. SAMPLING ACAK SEDERHANA

Sampling acak sederhana yaitu suatu metode untuk mengambil  $n$  unit dari populasi berukuran  $N$ , dimana setiap unit mempunyai kesempatan yang sama untuk terambil kembali menjadi anggota sampel. Pengambilan sampel dapat dilakukan dengan pengembalian atau tanpa pengembalian. Pengambilan sampel dengan pengembalian menyatakan satuan unit yang telah diambil memiliki kemungkinan akan terambil kembali menjadi anggota sampel [1].

Misalkan sampel berukuran  $n$  unit, yang tiap unitnya terambil menjadi anggota sampel adalah  $n/N$  Probabilitas suatu unit akan terambil menjadi sampel pada pengembalian pertama adalah  $n/N$  pada pengembalian kedua adalah  $(n-1)/(N-1)$  dan seterusnya. Probabilitas seluruh  $n$  unit-unit tertentu yang terambil dalam  $n$  pengambilan adalah  $\binom{N}{n}^{-1}$ .

Untuk menentukan bias dan  $MSE$  suatu penaksir, diperlukan beberapa definisi dan teorema sebagai berikut.

**Teorema 2.1** [1:h.30] Untuk sampling acak sederhana tanpa pengembalian dengan populasi berkarakter  $Y$ , variansi sampel  $s_y^2$  dirumuskan dengan

$$s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1},$$

merupakan penaksir tak bias untuk  $S_y^2$ .

**Bukti:** Dapat dilihat pada [1:h.30]. □

**Teorema 2.2** [1:h.34] Apabila sebuah sampel berukuran  $n$  diambil secara sampling acak sederhana tanpa pengembalian dari populasi berkarakter  $Y$  dan berukuran  $N$  maka variansi  $s_y^2$  adalah

$$V(s_y^2) = \left( \frac{S_y^2}{n} \right) (\lambda_{40} - 1),$$

dengan

$$\lambda_{40} = \frac{\mu_{40}}{\mu_{20}^2}$$

**Bukti:** Dapat dilihat pada [1:h.34]. □

**Teorema 2.3** [2:h.47] Deret Taylor dua variabel

Misalkan  $k \in A$ , dengan  $A$  adalah himpunan bilangan asli, misalkan  $I := [a, b]$  dan misalkan  $f : I \rightarrow \mathfrak{R}$  dengan  $f, f', f'', \dots, f^{(k)}$  kontinu pada  $I$  dan  $f^{(k+1)}$  ada pada  $(a, b)$ . Jika  $x_0 \in I$ , maka untuk sebarang  $x \in I$  terdapat suatu titik  $c$  antara  $x$  dan  $x_0$  sehingga

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(xc)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}.$$

**Bukti:** Dapat dilihat pada [2:h.46]. □

### 3. BIAS DAN MSE PENAKSIR RASIO-CUM-DUAL UNTUK VARIANSI PADA SAMPLING ACAK SEDERHANA

Penaksir yang dibahas pada bab ini adalah penaksir rasio, penaksir dual rasio dan penaksir rasio cum dual. Ketiga penaksir ini adalah penaksir bias, sehingga nilai dari bias dan *MSE*-nya yaitu

1. Bentuk dari penaksir rasio untuk variansi populasi pada sampling acak sederhana adalah

$$S_R^2 = s_y^2 \frac{S_x^2}{s_x^2}. \tag{1}$$

Bias dan *MSE* penaksir pada persamaan (1) yaitu

$$B(\hat{S}_R^2) = \frac{1}{n} S_y^2 (\lambda_{04} - \lambda_{22}),$$

dengan

$$\lambda_{04} = \frac{\mu_{04}}{\mu_{20}^2} \text{ dan } \lambda_{22} = \frac{\mu_{22}}{\mu_{20}\mu_{02}}$$

$$MSE(\hat{S}_R^2) \approx \frac{1}{n} S_y^2 ((\lambda_{40} - 1) + (\lambda_{04} - 1) - 2(\lambda_{22} - 1)). \tag{2}$$

2. Bentuk dari penaksir dual rasio untuk variansi populasi pada sampling acak sederhana adalah

$$S_d^2 = s_y^2 \frac{(1+g)S_x^2 - g s_x^2}{S_x^2}, \tag{3}$$

dengan

$$g = \frac{n}{N-n}.$$

Bias dan  $MSE$  penaksir pada persamaan (3) yaitu

$$B(\hat{S}_d^2) = \frac{1}{n} S_y^2 (g(\lambda_{22} - 1)),$$

$$MSE(\hat{S}_d^2) \approx \frac{1}{n} S_y^2 ((\lambda_{40} - 1) + g^2(\lambda_{04} - 1) - 2g(\lambda_{22} - 1)), \quad (4)$$

3. Bentuk dari penaksir rasio cum dual untuk variansi populasi pada sampling acak sederhana adalah

$$S_{RCDR}^2 = s_y^2 \left[ \alpha \left( \frac{S_x^2}{s_x^2} \right) + (1 + \alpha) \left( \frac{(1 + g)S_x^2 - g s_x^2}{S_x^2} \right) \right], \quad (5)$$

dengan  $0 < \alpha < 1$ .

Bias dan  $MSE$  penaksir pada persamaan (5) yaitu

$$B(\hat{S}_{RCDR}^2) = \frac{1}{n} S_y^2 (\alpha(\lambda_{04} - 1) - \alpha_1(\lambda_{22} - 1)),$$

dengan  $\alpha_1 = \frac{(\lambda_{22} - 1)}{(\lambda_{04} - 1)}$

$$MSE_{min}(\hat{S}_{RCDR}^2) \approx \frac{1}{n} S_y^2 \left( (\lambda_{40} - 1) - \frac{(\lambda_{22} - 1)^2}{(\lambda_{04} - 1)} \right). \quad (6)$$

#### 4. PENAKSIR RASIO YANG EFISIEN UNTUK VARIANSI POPULASI

Untuk menentukan penaksir yang efisien dari penaksir bias ditentukan dengan cara membandingkan  $MSE$  dari masing-masing penaksir. Penaksir yang lebih efisien merupakan penaksir dengan  $MSE$  terkecil.

1. Perbandingan  $MSE(\hat{S}_R^2)$  dengan  $MSE(\hat{S}_d^2)$

Penaksir dual rasio  $\hat{S}_d^2$  lebih efisien dari penaksir rasio  $\hat{S}_R^2$ , jika

$$\lambda_{04} > \frac{2(\lambda_{22} - 1)}{(1 - g)} + 1. \quad (7)$$

2. Perbandingan  $MSE(\hat{S}_R^2)$  dengan  $MSE(\hat{S}_{RCDR}^2)$

Penaksir rasio cum dual rasio  $\hat{S}_{RCDR}^2$  lebih efisien dari penaksir rasio  $\hat{S}_R^2$ , jika

$$\lambda_{04} > 1. \quad (8)$$

3. Perbandingan  $MSE(\hat{S}_d^2)$  dengan  $MSE(\hat{S}_{RCDR}^2)$

Penaksir rasio cum dual rasio  $\hat{S}_{RCDR}^2$  lebih efisien dari penaksir dual rasio  $\hat{S}_d^2$ , jika

$$\lambda_{04} > 1. \quad (9)$$

**Contoh** Data pada Tabel 1 merupakan pengeluaran dan pendapatan karyawan PT. Perkebunan Nusantara V Pekanbaru tahun 2006. Ditentukan variansi pengeluaran karyawan menggunakan syarat relatif efisiensi penaksir.

Tabel 1: Pengeluaran dan Pendapatan karyawan  
PT. Perkebunana Nusantara V Pekanbaru tahun 2006.

| NO     | Pengeluaran<br>(Rp) | NO | Pendapatan<br>(Rp) | NO          | Pengeluaran<br>(Rp) | NO          | Pendapatan<br>(Rp) |
|--------|---------------------|----|--------------------|-------------|---------------------|-------------|--------------------|
| 1      | 800.000             | 1  | 1.000.000          | 30          | 3.100.000           | 30          | 3.300.000          |
| 2      | 900.000             | 2  | 1.000.000          | 31          | 3.000.000           | 31          | 3.400.000          |
| 3      | 1.500.000           | 3  | 1.800.000          | 32          | 3.000.000           | 32          | 3.700.000          |
| 4      | 1.300.000           | 4  | 1.400.000          | 33          | 3.400.000           | 33          | 3.500.000          |
| 5      | 1.100.000           | 5  | 1.200.000          | 34          | 3.300.000           | 34          | 3.500.000          |
| 6      | 1.100.000           | 6  | 1.300.000          | 35          | 3.500.000           | 35          | 3.600.000          |
| 7      | 1.200.000           | 7  | 1.400.000          | 36          | 3.400.000           | 36          | 3.700.000          |
| 8      | 1.400.000           | 8  | 1.500.000          | 37          | 3.400.000           | 37          | 4.200.000          |
| 9      | 1.300.000           | 9  | 1.600.000          | 38          | 3.700.000           | 38          | 4.100.000          |
| 10     | 1.400.000           | 10 | 1.800.000          | 39          | 4.200.000           | 39          | 4.700.000          |
| 11     | 1.800.000           | 11 | 1.900.000          | 40          | 3.800.000           | 40          | 4.900.000          |
| 12     | 1.500.000           | 12 | 2.000.000          | 41          | 4.700.000           | 41          | 5.200.000          |
| 13     | 1.700.000           | 13 | 2.000.000          | 42          | 4.800.000           | 42          | 5.300.000          |
| 14     | 1.800.000           | 14 | 2.100.000          | 43          | 5.300.000           | 43          | 5.500.000          |
| 15     | 2.000.000           | 15 | 2.100.000          | 44          | 5.000.000           | 44          | 5.800.000          |
| 16     | 2.000.000           | 16 | 2.200.000          | 45          | 5.400.000           | 45          | 5.600.000          |
| 17     | 2.000.000           | 17 | 2.200.000          | 46          | 5.700.000           | 46          | 5.800.000          |
| 18     | 2.000.000           | 18 | 2.300.000          | 47          | 5.500.000           | 47          | 5.700.000          |
| 19     | 2.100.000           | 19 | 2.300.000          | 48          | 5.600.000           | 48          | 6.100.000          |
| 20     | 2.300.000           | 20 | 2.400.000          | 49          | 5.700.000           | 49          | 6.000.000          |
| 21     | 2.000.000           | 21 | 2.400.000          | 50          | 6.400.000           | 50          | 6.100.000          |
| 22     | 2.300.000           | 22 | 2.500.000          | 51          | 6.900.000           | 51          | 7.100.000          |
| 23     | 2.500.000           | 23 | 2.600.000          | 52          | 6.000.000           | 52          | 6.300.000          |
| 24     | 2.700.000           | 24 | 2.800.000          | 53          | 5.900.000           | 53          | 6.000.000          |
| 25     | 2.400.000           | 25 | 2.800.000          | 54          | 7.100.000           | 54          | 7.700.000          |
| 26     | 2.600.000           | 26 | 2.900.000          | 55          | 6.600.000           | 55          | 7.000.000          |
| 27     | 2.500.000           | 27 | 3.000.000          | 56          | 7.000.000           | 56          | 7.500.000          |
| 28     | 2.800.000           | 28 | 3.200.000          | 57          | 7.500.000           | 57          | 8.000.000          |
| 29     | 3.000.000           | 29 | 3.400.000          | 58          | 7.200.000           | 58          | 8.000.000          |
| Jumlah |                     |    |                    | 200.100.000 |                     | 218.400.000 |                    |

Sumber [3]

Untuk membandingkan *MSE* dari penaksir (1), (3) dan (5) dengan bantuan Microsoft Excel diperoleh kuantitas pada Tabel 2.

Tabel 2. Kuantitas yang diperlukan untuk membandingkan *MSE* ketiga penaksir.

|                |                      |
|----------------|----------------------|
| $N$            | 58                   |
| $n$            | 25                   |
| $\bar{Y}$      | 3.450.000            |
| $\bar{X}$      | 3.765.517            |
| $S_y^2$        | 3.787.456.140.350    |
| $S_x^2$        | 4.060.895.341.802    |
| $\lambda_{40}$ | 2.374.427.313.143    |
| $\lambda_{04}$ | 2.793.195.122.366,50 |
| $\lambda_{22}$ | 57                   |

Substitusikan kuantitas yang diperoleh pada Tabel 2 terhadap penaksir (1), (3) dan (5) untuk menunjukkan bahwa nilai taksiran  $\hat{S}_{RCDR}^2$  lebih mendekati nilai variansi populasi yang dimuat pada Tabel 3.

Tabel 3: Nilai taksiran masing-masing penaksir

| Penaksir           | Nilai taksiran |
|--------------------|----------------|
| $\hat{S}_R^2$      | 2.95625E+14    |
| $S_d^2$            | 2.28409E+13    |
| $\hat{S}_{RCDR}^2$ | 1.75935 E+13   |

Pada Tabel 3 dapat dilihat bahwa penaksir  $\hat{S}_{RCDR}^2$  lebih mendekati nilai variansi populasi dengan nilai taksiran 1.75935E+13. Dilihat pada tabel 2 bahwa  $\hat{S}_{RCDR}^2$  merupakan penaksir yang paling efisien diantara dua penaksir lainnya. Substitusikan kuantitas yang diperoleh pada Tabel 2 ke persamaan (2), (4) dan (6), diperoleh nilai penaksir dan *MSE* dari masing-masing penaksir seperti yang disajikan pada Tabel 4.

Tabel 4. Nilai *MSE* untuk ketiga penaksir.

| Penaksir           | <i>MSE</i>   |
|--------------------|--------------|
| $\hat{S}_R^2$      | 2,96517E+36  |
| $S_d^2$            | 2,57661E+36  |
| $\hat{S}_{RCDR}^2$ | 1,362436E+36 |

Berdasarkan Tabel 4 dan kriteria penaksir yang relatif efisien pada persamaan (7), (8) dan (9) diperoleh nilai *MSE* penaksir  $\hat{S}_{RCDR}^2 < \hat{S}_d^2 < \hat{S}_R^2$ .

### KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dikemukakan pada artikel ini, penaksir  $\hat{S}_{RCDR}^2$  merupakan penaksir yang paling efisien dari penaksir  $\hat{S}_R^2$  dan  $\hat{S}_d^2$ .

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Cochran, W. G. 1991. *Teknik Penarikan Sampel, Edisi Ketiga*. Terj. Dari *Sampling Techniques*, oleh Radiansyah & E. R Osman. Penerbit Universitas Indonesia, Jakarta.
- [2] Phillips, G. M. & P. J. Taylor. *Theory and Applications of Numerical Analysis, Second Edition*. Academic Press, New York.
- [3] Sinaga, C. V. D. 2007. Pola Konsumsi Karyawan PT. Perkebunan Nusantara V (PTPN V) Pekanbaru. Skripsi Fakultas Ekonomi Universitas Riau, Pekanbaru.
- [4] Yadav, S. K. and C. Kadilar. 2012. *A Class of Ratio Estimator of Population Variance*. *Journal of Reliability and Statistical Studies*. 6:29-34.