PERLUASAN METODE INTEGRASI HASIL-KALI BERTIPE TRAPESIUM

Eko Budiansyah[1*]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*eko_budiansyah@yahoo.com

ABSTRACT

This article discusses the extension of the product integration rules which is a modification of the generalized Euler-Maclaurin summation formula using a partition of the trapezoidal method. Analytically, it is showed that this method has an error of $O(1/n^2)$. Furthermore, computational results show that the method is superior to the comparison methods by looking into the error value obtained.

Keywords: *Numerical integration, trapezoidal method, product integration, generalized Euler-Maclaurin summation formula, Bernoulli function.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas perluasan dari metode integrasi hasil-kali bertipe trapesium, yang merupakan modifikasi *generalized Euler-Maclaurin summation formula* dengan menggunakan partisi pada metode Trapesium. Secara analitik ditunjukkan bahwa metode ini mempunyai galat $O(1/n^2)$. Hasil komputasi menunjukkan bahwa metode yang didiskusikan lebih unggul daripada metode pembanding dengan melihat nilai galat yang diperoleh.

Kata kunci: *Integrasi numerik, metode trapesium, integrasi hasil-kali, generalized Euler-Maclaurin summation formula, fungsi Bernoulli.*

1. PENDAHULUAN

Diberikan fungsi $f(x) = F_0(x)g(x)$ dimana $F_0(x)$ dinotasikan sebagai fungsi kontinu dan positif dan $g(x)$ dinotasikan sebagai fungsi kontinu dan dapat diturunkan sebanyak dua kali pada interval $[a, b]$. Integral dari $f(x)$ disebut sebagai integrasi hasil-kali dengan bentuk

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F_0(x)g(x)dx. \tag{1}$$

Menyelesaikan persamaan (1) tidak mudah, jika integran $f(x)$ tidak mempunyai antiderivatif. Oleh karena itu, salah satu cara untuk menyelesaikan persamaan (1) adalah menggunakan metode numerik. Salah satu metode yang dapat digunakan adalah metode Trapesium Komposit [1, h. 253] dengan bentuk

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right] \tag{2}$$

dengan galat $-\frac{1}{12}(b-a)h^2 f''(\xi), a \leq \xi \leq b$.

Matematikawan telah mengembangkan beberapa metode untuk menyelesaikan persamaan (1), seperti yang telah dikembangkan oleh, J. C. Santos-Leon [5] dan Grzegorz Rzadkowski [4]. Metode yang dikembangkan oleh Santos-Leon lebih sulit dan rumit, sementara Grzegorz Rzadkowski menciptakan metode baru yang merupakan modifikasi *generalized Euler-Maclaurin summation formula* [3] dengan menggunakan partisi pada metode Trapesium Komposit. Metode ini disebut dengan metode Integrasi Hasil-kali Bertipe Trapesium.

Pada artikel ini dibagian dua akan dibahas terbentuknya metode Integrasi Hasil-kali Bertipe Trapesium dan perluasannya yang merupakan review dari artikel Grzegorz Rzadkowski dengan judul "*An Extension of Trapeziodal type Product Integration Rules*", kemudian dilanjutkan di bagian tiga melakukan analisa galat dan di bagian empat melakukan uji komputasi.

2. PERLUASAN METODE INTEGRASI HASIL-KALI BERTIPE TRAPESIUM

Pada bagian ini akan dijelaskan tentang proses terbentuknya metode Integrasi Hasil-kali Bertipe Trapesium dan perluasannya.

2.1 *Generalized Euler-Maclaurin Summation Formula* [3]

Misalkan titik $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ membagi interval $[a, b]$ menjadi n subinterval. Misalkan $F_0(x)$ adalah fungsi yang dapat diintegralkan dan $g(x)$ adalah fungsi kontinu dan dapat diturunkan sebanyak m kali pada interval $[a, b]$. Misalkan $F_{j(k)}(x)$ dinotasikan sebagai fungsi Bernoulli ke-j yang berasosiasi dengan fungsi $F_0(x)$ pada interval $[x_{k-1}, x_k]$.

Apabila persamaan (1) diintegralkan secara parsial sebanyak m kali pada interval $[x_{k-1}, x_k]$, maka diperoleh

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} F_0(x)g(x)dx = \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}F_{j(k)}(x)g^{(j-1)}(x)\Big|_{x_{k-1}}^{x_k} + (-1)^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} F_{m(k)}(x)g^m(x)dx. \tag{3}$$

Misalkan $F_{j(k)}(x_{k-1}) = F_{j(k)}(x_k)$ dengan $j = 2, 3, ..., m$, $k = 1, 2, ..., n$ disubstitusikan ke persamaan (3), diperoleh

$$\begin{aligned}\int_a^b F_0(x)g(x)dx =& F_{1(n)}(b)g(b) - F_{1(1)}(a)g(a)\\ &+ \sum_{k=1}^{n-1}(F_{1(k)}(x_k) - F_{1(k+1)}(x_k))g(x)\\ &+ \sum_{j=2}^{m}(-1)^{j-1}\sum_{k=1}^{n} F_{j(k)}(x_k)(g^{(j-1)}(x_k) - g^{(j-1)}(x_{k-1}))\\ &+ (-1)^m \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} F_{m(k)}(x)g^{(m)}(x)dx. \qquad (4)\end{aligned}$$

Persamaan (4) disebut dengan *generalized Euler-Maclaurin summation formula* yang berorde m.

2.2 Antiderivatif dari Fungsi Bernoulli

Misalkan $F_{1(k)}(x)$ merupakan antiderivatif dari $F_0(x)$ pada interval $[x_{k-1}, x_k]$ yang memenuhi

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} F_{1(k)}(x)dx = 0. \qquad (5)$$

Misalkan juga $F_{2(k)}(x)$ merupakan antiderivatif dari fungsi $F_{1(k)}(x)$ yang memenuhi

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} F_{2(k)}(x)dx = 0. \qquad (6)$$

Definisikan

$$F_{1(k)}(x) = \int_{x_{k-1}}^{x} F_0(t)dt - \frac{1}{x_k - x_{k-1}}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x_k - t)F_0(t)dt. \qquad (7)$$

dan

$$F_{2(k)}(x) = \int_{x_{k-1}}^{x} F_{1(k)}(t)dt - \frac{1}{x_k - x_{k-1}}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x_k - t)F_{1(k)}(t)dt. \qquad (8)$$

Menurut Teorema Dasar Kalkulus Integral [2, h. 210], persamaan (7) dan (8) merupakan antidefivatif dari $F_0(x)$ dan $F_{1(k)}(x)$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa persamaan (7) dan (8) berturut-turut memenuhi persamaan (5) dan (6).

Perhatikan persamaan (7), dengan mensubstitusikan persamaan (7) ke persamaan (5) diperoleh

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} F_{1(k)}(x)dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} F_0(x)dx - \frac{1}{x_k - x_{k-1}}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\int_{x_{k-1}}^{x_k} F_0(t)dtdx = 0.$$

Evaluasi fungsi $F_{1(k)}(x)$ pada ujung interval $[x_{k-1}, x_k]$, diperoleh

$$F_{1(k)}(x_{k-1}) = -\frac{1}{x_k - x_{k-1}}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x_k - t)F_0(t)dt, \qquad (9)$$

$$F_{1(k)}(x_k) = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (t - x_{k-1}) F_0(t) dt. \tag{10}$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa persamaan (8) memenuhi persamaan (6). Perhatikan persamaan (8), dengan mensubstitusikan persamaan (8) ke persamaan (6) diperoleh

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} F_{2(k)}(x) dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} F_{1(k)}(x) dx - \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \int_{x_{k-1}}^{x_k} F_{1(k)}(t) dt dx = 0$$

Berikutnya, substitusikan persamaan (7) ke persamaan (8) dengan memperhatikan persamaan (7) yang berubah menjadi

$$F_{1(k)}(t) = \int_{x_{k-1}}^{t} F_0(u) du - \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - u) F_0(u) du.$$

Untuk suku integral pertama dari persamaan (8) diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_{x_{k-1}}^{x} F_{1(k)}(t) dt &= \int_{x_{k-1}}^{x} \left[\int_{x_{k-1}}^{t} F_0(u) du - \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - u) F_0(u) du \right] dt \\
&= \int_{x_{k-1}}^{x} \int_{x_{k-1}}^{t} F_0(u) du dt - \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x} dt \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - u) F_0(u) du
\end{aligned}$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x} F_{1(k)}(t) dt = \int_{x_{k-1}}^{x} (x - u) F_0(u) du - \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - u) F_0(u) du. \tag{11}$$

Berikutnya, untuk suku integral kedua dari persamaan (8) diperoleh

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - t) F_{1(k)}(t) dt \\
&\quad = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - t) \left[\int_{x_{k-1}}^{t} F_0(p) dp - \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - u) F_0(u) du \right] dt \\
&\quad = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - t) \int_{x_{k-1}}^{t} F_0(p) dp dt - \frac{1}{2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - u) F_0(u) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - t) F_{1(k)}(t) dt \\
&\quad = \frac{1}{2(x_k - x_{k-1})} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - u)^2 F_0(u) du - \frac{1}{2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - u) F_0(u) du.
\end{aligned} \tag{12}$$

Hasil dari persamaan (11) dan (12) disubstitusikan ke persamaan (8) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
F_{2(k)}(x) = &\int_{x_{k-1}}^{x} (x - u) F_0(u) du \\
&- \frac{1}{2(x_k - x_{k-1})} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - u)(2x - x_{k-1} - u) F_0(u) du.
\end{aligned} \tag{13}$$

Evaluasi persamaan (13) pada ujung interval $[x_{k-1}, x_k]$ diperoleh

$$F_{2(k)}(x_k) = F_{2(k)}(x_{k-1}) = \frac{1}{2(x_k - x_{k-1})} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - u)(u - x_{k-1}) F_0(u) du. \tag{14}$$

2.3 Pembentukan Metode Integrasi Hasil-kali Bertipe Trapesium

Bentuk integral hasil-kali pada interval $[a, b]$ dituliskan pada persamaan (1), kemudian bagi interval $[a, b]$ menjadi n subinterval dengan panjang $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Asumsikan bahwa terdapat c yang tidak tergantung pada k dan n sehingga memenuhi

$$\Delta x_k \leq \frac{c}{n}. \tag{15}$$

Salah satu cara membagi interval $[a, b]$ adalah dengan membagi interval $[a, b]$ menjadi n subinterval yang sama panjang. Untuk kasus ini, $c = b - a$ memenuhi syarat pada persamaan (15). Cara lain adalah dengan membagi interval $[a, b]$ menjadi n subinterval dimana fungsi $F_0(x)$ mempunyai nilai integral yang sama pada setiap subinterval. Dengan kata lain, x_k dan x_{k-1} dipilih sedemikian hingga memenuhi

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} F_0(x) dx = \frac{1}{n} \int_a^b F_0(x) dx. \tag{16}$$

Untuk partisi ini, akan dicari nilai c yang memenuhi persamaan (15). Terlebih dahulu misalkan M, m dinotasikan sebagai nilai maksimum dan minimum dari $F_0(x)$ pada interval $[a, b]$. Jika persamaan (15) terpenuhi, maka persamaan (16) dapat ditulis sebagai

$$\frac{1}{Mn} \int_a^b F_0(x) dx \leq x_k - x_{k-1} \leq \frac{1}{mn} \int_a^b F_0(x) dx.$$

Lebih lanjut, akan diberikan lema pendukung.

Lema 1 [4] Asumsikan fungsi w adalah fungsi kontinu dan memiliki turunan kedua yang positif pada interval $[c, d]$. Jika

$$\int_c^d w(x) dx = 0 \quad \text{dan} \quad w(c) = w(d),$$

maka

$$\max_{x \in [c,d]} |w(x)| = w(c) = w(d).$$

Berikut ini akan ditunjukkan bagaimana terbentuknya metode Integrasi Hasil-kali Bertipe Trapesium dengan menggunakan dua cara, yaitu

1. Mengintegralkan persamaan (1) secara langsung,
2. Menggunakan persamaan (4) dari *generalized Euler-Maclaurin summation formula*.

Cara pertama, yaitu dengan menghitung langsung integral dari persamaan (1) menggunakan teknik integral parsial sebanyak dua kali pada interval $[x_{k-1}, x_k]$ diperoleh

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} F_0(x)g(x)dx = F_{1(k)}(x_k)g(x_k) - F_{1(1)}(x_{k-1})g(x_{k-1}) - F_{2(k)}(x_k)g'(x_k) \\ - F_{2(k)}(x_{k-1})g'(x_{k-1}) + \int_{x_{k-1}}^{x_k} F_{2(k)}(x)g''(x)dx. \tag{17}$$

Untuk interval $[a, b]$, persamaan (17) menjadi

$$\begin{aligned}\int_a^b F_0(x)g(x)dx &= \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} F_0(x)g(x)dx \\ &= F_{1(1)}(x_1)g(x_1) - F_{1(1)}(x_0)g(x_0) - F_{2(1)}(x_1)g'(x_1) - \cdots \\ &\quad - F_{2(n)}(x_{n-1})g'(x_{n-1}) + \int_{x_{n-1}}^{x_n} F_{2(n)}(x)g''(x)dx,\end{aligned}$$

karena $F_{2(k)}(x_k) = F_{2(k)}(x_{k-1})$, $k = 1, 2, 3..., n$ diperoleh

$$\begin{aligned}\int_a^b F_0(x)g(x)dx =& F_{1(n)}(b)g(b) - F_{1(1)}(a)g(a) \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1}(F_{1(k)}(x_k) - F_{1(k+1)}(x_k))g(x) \\ &- \sum_{k=1}^{n} F_{2(k)}(x_k)(g'(x_k) - g'(x_{k-1})) \\ &+ \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} F_{2(k)}(x)g''(x)dx.\end{aligned} \tag{18}$$

Cara kedua yaitu dengan menggunakan persamaan (4) untuk $m = 2$, hasil yang diperoleh sama dengan persamaan (18). Dengan menggunakan partisi $x_k = x_0 + kh$, dengan $h = (b - a)/n$, $k = 0, 1, 2, ...$ pada persamaan (18) diperoleh

$$\begin{aligned}\int_a^b F_0(x)g(x)dx \approx& F_{1(n)}(b)g(b) - F_{1(1)}(a)g(a) \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1}(F_{1(k)}(x_k) - F_{1(k+1)}(x_k))g(x_k)\end{aligned} \tag{19}$$

Persamaan (19) disebut sebagai metode Integrasi Hasil-kali Bertipe Trapesium.

2.4 Perluasan Metode Integrasi Hasil-kali Bertipe Trapesium

Jika menggunakan partisi yang memenuhi persamaan (16) dan jika $\int_a^b F_0(t)dt = 1$, maka dari persamaan (9) dan (10) diperoleh

$$F_{1(k)}(x_{k-1}) = -\frac{x_k}{n(x_k - x_{k-1})} + \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} tF_0(x)dt, \tag{20}$$

$$F_{1(k)}(x_k) = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} tF_0(t)dt - \frac{x_{k-1}}{n(x_k - x_{k-1})}. \tag{21}$$

Hasil dari persamaan (20) dan (21) disubstitusikan ke persamaan (19), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&F_{1(n)}(b)g(b) - F_{1(1)}(a)g(a) + \sum_{k=1}^{n-1}(F_{1(k)}(x_k) - F_{1(k+1)}(x_k))g(x_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\Bigg[\left(\frac{1}{x_k - x_{k-1}}\int_{x_{k-1}}^{x_k} tF_0(t)dt - \frac{x_{k-1}}{n(x_k - x_{k-1})}\right)g(x_k) \\
&\qquad + \left(\frac{x_k}{n(x_k - x_{k-1})} + \frac{1}{x_k - x_{k-1}}\int_{x_{k-1}}^{x_k} tF_0(x)dt\right)g(x_{k-1})\Bigg]
\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}
&F_{1(n)}(b)g(b) - F_{1(1)}(a)g(a) + \sum_{k=1}^{n-1}(F_{1(k)}(x_k) - F_{1(k+1)}(x_k))g(x_k) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k - x_{k-1}}\Bigg[\left(n\int_{x_{k-1}}^{x_k} tF_0(t)dt - x_{k-1}\right)g(x_k) \\
&\qquad + \left(x_k - n\int_{x_{k-1}}^{x_k} tF_0(t)dt\right)g(x_{k-1})\Bigg].
\end{aligned} \tag{22}$$

Persamaan (22) merupakan perluasan dari metode Integrasi Hasil-kali Bertipe Trapesium. Kuadratur ini disebut sebagai kuadratur Santos-Leon [5].

3. ANALISA GALAT

Pada bagian ini akan dilakukan analisa galat untuk mengetahui galat dari metode Integrasi Hasil-kali Bertipe Trapesium.

Teorema 2 (Galat Metode Integrasi Hasil-kali Bertipe Trapesium)
Asumsikan bahwa $F_0(x)$ adalah fungsi kontinu dan positif, sementara $g(x)$ adalah fungsi kontinu dan dapat diturunkan sebanyak dua kali pada interval tertutup $[a, b]$, Misalkan juga $x_0, x_1, \ldots, x_n$ adalah partisi interval dimana syarat persamaan (15) terpenuhi. Maka, estimasi integral pada persamaan (1) menggunakan persamaan (18) diperoleh

$$F_{1(n)}(b)g(b) - F_{1(1)}(a)g(a) + \sum_{k=1}^{n-1}(F_{1(k)}(x_k) - F_{1(k+1)}(x_k))g(x_k), \tag{23}$$

dimana mempunyai galat dengan orde $O(1/n^2)$.

Bukti: Misalkan $S = \max_{a\leq x\leq b} |g''(x)|$ dan $M = \max_{a\leq x\leq b} F_0(x)$. Fungsi $F_{2(k)}(x)$ dengan $k = 1, 2, ..., n$ memenuhi semua asumsi dari Lema 1 pada interval $[x_{k-1}, x_k]$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} F_{2(k)}(x)g''(x)dx\right| &\leq F_{2(k)}(x_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k} |g''(x)|\,dx \\
&= F_{2(k)}(x_k)\int_a^b \max_{x_{k-1}\leq x\leq x_k} |g''(x)|dx \\
\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} F_{2(k)}(x)g''(x)dx\right| &\leq F_{2(k)}(x_k)(x_k - x_{k-1}) \max_{x_{k-1}\leq x\leq x_k} |g''(x)|\,. \qquad (24)
\end{aligned}$$

Dari persamaan (14) diperoleh

$$\begin{aligned}
F_{2(k)}(x_k) &\leq \max_{x_{k-1}\leq x\leq x_k} F_0(x)\frac{1}{2(x_k - x_{k-1})}\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - x)(x - x_{k-1})dx \\
&= \max_{x_{k-1}\leq x\leq x_k} F_0(x)\frac{(x_k^3 - x_{k-1}^3 + 3x_kx_{k-1}^2 - 3x_k^2x_{k-1})}{12(x_k - x_{k-1})} \\
F_{2(k)}(x_k) &\leq \max_{x_{k-1}\leq x\leq x_k} F_0(x)\frac{1}{12}(x_k - x_{k-1})^2. \qquad (25)
\end{aligned}$$

Karena $\max_{(x_{k-1}\leq x\leq x_k)} F_0(x) = M$, maka persamaan (25) menjadi

$$F_{2(k)}(x_k) \leq \frac{M}{12}(x_k - x_{k-1})^2. \qquad (26)$$

Kemudian, dari persamaan (24) dan (26) diperoleh

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} F_{2(k)}(x)g''(x)dx\right| &\leq \frac{MS}{12}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})^3 \\
&= \frac{MS}{12}\frac{c^3}{n^3}n \\
\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} F_{2(k)}(x)g''(x)dx\right| &\leq \frac{MSc^3}{12n^2}, \qquad (27)
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} F_{2(k)}(x_k)(g'(x_k) - g'(x_{k-1}))\right| &\leq \sum_{k=1}^{n} F_{2(k)}(x_k)\,|g'(x_k) - g'(x_{k-1})| \\
&= \frac{MSc^3}{12n^3}n \\
\left|\sum_{k=1}^{n} F_{2(k)}(x_k)(g'(x_k) - g'(x_{k-1}))\right| &\leq \frac{MSc^3}{12n^2}. \qquad (28)
\end{aligned}$$

Jika persamaan (27) dan (28) disubstitusikan ke persamaan (18) diperoleh

$$\begin{aligned}\int_a^b F_0(x)g(x)dx =& F_{1(n)}(b)g(b) - F_{1(1)}(a)g(a)\\ &+ \sum_{k=1}^{n-1}(F_{1(k)}(x_k) - F_{1(k+1)}(x_k))g(x) + O(1/n^2).\end{aligned} \tag{29}$$

Terlihat bahwa persamaan (29) merupakan persamaan dari metode Integrasi Hasil-kali Bertipe Trapesium memiliki galat dengan orde $O(1/n^2)$. ■

4. UJI KOMPUTASI

Pada bagian ini dilakukan uji komputasi yang bertujuan untuk membandingkan galat absolut dari kuadratur Santos-Leon (M1) pada persamaan (22), metode Trapesium Komposit (M2) pada persamaan (2), dan metode Integrasi Hasil-kali Bertipe Trapesium (M3) pada persamaan (19) dalam menemukan solusi hampiran dari integrasi hasil-kali. Dalam melakukan perbandingan ini, fungsi yang digunakan adalah:

- $f_1 = \frac{\cos(x)}{x}$ pada interval $[0.1, 2]$,
- $f_2 = \sin(\frac{1}{x})$ pada interval $[0.01, 10]$,
- $f_3 = \frac{1}{1000}e^{(x^2)}$ pada interval $[0, 3]$.

Perhitungan komputasi galat untuk ketiga contoh di atas menggunakan program MAPLE 13 dengan diberikan beberapa kriteria sebagai berikut, untuk M1 diberikan

1. Untuk fungsi f_1, misalkan $F_0(x) = \frac{1}{x}$ dan $g(x) = \cos(x)$ dengan partisi yang memenuhi persamaan (16) dan menggunakan persamaan (9) dan (10).
2. Untuk fungsi f_2, misalkan $F_0(x) = 1$ dan $g(x) = \sin(\frac{1}{x})$ dengan partisi

$$x_k = \frac{1}{1/b + k(1/a - 1/b)/n}$$

   dimana $k = 0, 1, 2, ..., n$. Titik x_k berasal dari *preimage* aritmatika dari fungsi $\frac{1}{x}$.
3. Untuk fungsi f_3, misalkan $F_0(x) = e^{(3x)}$ dan $g(x) = \frac{e^{(x^2-3x)}}{1000}$ dengan partisi yang memenuhi persamaan (16) dan menggunakan persamaan (9) dan (10).

Hasil komputasi galat untuk setiap metode yang dibandingkan diberikan oleh Tabel 1. Berdasarkan Tabel 1, terlihat bahwa untuk nilai partisi n yang cukup besar dalam hal ini $n \geq 16$ dapat disimpulkan bahwa metode M3 lebih unggul daripada metode lain dilihat dari kecilnya galat yang diperoleh.

Tabel 1: Perbandingan Hasil Komputasi Galat untuk M1, M2, dan M3

n	1	4	16	64	246	1024	4096
	f_1						
M1	2.379e+00	2.840e-02	1.255e-04	4.943e-07	1.932e-09	7.547e-12	2.948e-14
M2	1.120e+00	6.999e-02	4.375e-03	2.734e-04	1.709e-05	1.068e-06	6.675e-08
M3	2.379e+00	9.292e-03	3.629e-05	1.418e-07	5.538e-10	2.163e-12	8.451e-15
	f_2						
M1	4.350e+09	2.695e+08	1.625e+07	8.843e+05	3.364e+04	5.239e+02	2.972e+00
M2	1.273e+00	7.954e-02	4.972e-03	3.107e-04	1.942e-05	1.214e-06	7.586e-08
M3	4.350e+09	1.524e+08	1.012e+06	4.125e+03	1.616e+01	6.312e-02	2.466e-04
	f_3						
M1	2.006e+02	7.597e+00	2.602e-01	7.687e-03	1.796e-04	2.842e-06	2.476e-08
M2	2.348e-01	1.468e-02	9.173e-04	5.733e-05	3.583e-06	2.239e-07	1.400e-08
M3	2.006e+02	7.834e-01	3.060e-03	1.195e-05	4.669e-08	1.824e-10	7.125e-13

Ucapan Terimakasih Penulis mengucapkan terimakasih kepada Bapak Supriadi Putra, M.Si, dan Bapak Zulkarnain, M.Si, yang telah memberikan arahan dan bimbingan dalam penulisan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Atkinson, K. E. 1989. *An Introduction to Numerical Analysis, 2nd Ed.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

[2] Bartle, R. G. & Sherbert, D. R. 1999. *Introduction to Real Analysis, 3rd Ed.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

[3] Lepkowski, S. & Rzadkowski, G. 2007. A Generalization of Euler-Maclaurin Summation Formula: An Application to Numerical Computation of the Fermi-Dirac Integrals. *Journal of Scientific Computing*, **35**: 63–74.

[4] Rzadkowski, G. 2009. An Extension of Trapezoidal type Product Integration Rules. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **232**: 625–631.

[5] Santos-Leon, J. C. 1998. Asymptotic Expansions for Trapezoidal type Product Integration Rules. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **91**: 219–230.