PERBAIKAN METODE ITERASI YANG DIPERKENALKAN YOONMEE HAM UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NONLINEAR

Mis Mayra[1*], Aziskhan[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

[*]mismayra94@gmail.com

ABSTRACT

We discuss an improvement of method proposed by Ham, Y. [Applied Mathematics and Computational. 222: 477–486. 2008]. Analytically we show that by adding some conditions on the weight functions, the proposed method is of order five or six. Numerical comparison shows that the proposed iterative methods with different weight functions do not have significant differences in terms of the number of iteration in obtaining the root.

Keywords: *Nonlinear equations, YoonMee Ham method, Orde of convergence.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas perbaikan dari metode yang didiskusikan Ham, Y. [Applied Mathematics and Computational. 222: 477–486. 2008]. Secara analitik ditunjukkan bahwa dengan menambahkan syarat pada fungsi bobot yang digunakan, metode yang diusulkan mempunyai orde kekonvergenan lima dan enam. Perbandingan komputasi menunjukkan bahwa metode-metode iterasi yang diusulkan dengan fungsi bobot yang berbeda tidak mempunyai perbedaan yang signifikan dalam hal jumlah iterasi untuk menemukan akar.

Kata kunci: *Persamaan nonlinear, metode YoonMee Ham, Orde konvergensi.*

1. PENDAHULUAN

Menyelesaikan persamaan nonlinear yang berbentuk $f(x) = 0$ merupakan permasalahan yang umum dibahas dan yang penting dalam analisis numerik. Penyelesaian persamaan nonlinear dapat dilakukan dengan dua metode, yaitu metode analitik dan metode numerik. Banyak metode numerik yang dapat digunakan untuk mencari akar dari persamaan nonlinear. Metode numerik yang sering digunakan dalam menyelesaikan persamaan nonlinear adalah metode Newton, yang konvergensinya kuadratik untuk persamaan nonlinear. Oleh karena itu perlu dilakukan modifikasi metode Newton untuk diterapkan pada persamaan nonlinear, dengan tujuan untuk mempercepat iterasi dan memperkecil tingkat kesalahan (*error*). Bentuk umum metode Newton adalah sebagai berikut

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{1}$$

dengan $f'(x_n) \neq 0$.

Pada artikel ini dibahas perbaikan metode iterasi yang diperkenalkan YoonMee Ham untuk menyelesaikan persamaan nonlinear yang merupakan review sebagian dari artikel Liang Fang. [4] yang berjudul "*Some modifications of Newton's method with hinger-order convergence for solving nonlinier equations*".

Pembahasan dimulai dengan memperkenalkan metode YoonMee Ham, dengan menggunakan ϕ_p dimana $p = 2$ yang berarti orde dua. Kemudian pada bentuk pertama metode iterasi YoonMee Ham menghasilkan orde konvergensi lima. Namun, ini tidaklah benar, karena orde konvergensi bentuk pertama metode iterasi YoonMee Ham adalah empat. Kemudia Metode YoonMee Ham melakukan perbaikan dari bentuk pertama metode iterasi dengan menambahkan fungsi bobot $H(x_n, y_n)$ yang bertujuan untuk menaikkan orde konvergensinya sampai orde lima dan enam. Pada bagian tiga dilakukan perbandingan numerik persamaan nonlinear terhadap beberapa fungsi uji.

Pada artikel ini digunakan tanda titik "." sebagai ganti tanda koma "," untuk memisahkan digit desimal.

2. PERBAIKAN METODE ITERASI YANG DIPERKENALKAN YOONMEE HAM

Pada Artikel ini dibahas mengenai proses terbentuknya metode iterasi YoonMee Ham yaitu sebagai berikut

2.1 Metode YoonMee Ham

Metode YoonMee Ham [4] mengajukan dan menganalisis metode iterasi dua langkah

$$z_n = \phi_p(x_n), \tag{2}$$

$$x_{n+1} = z_n - H(x_n, y_n)\frac{f(z_n)}{f'(x_n)}, \tag{3}$$

dengan ϕ_p fungsi iterasi berorde p dan $H(x, y)$ fungsi yang yang akan ditentukan kemudian dimana

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

YoonMee Ham mengatakan bahwa metode yang diberikan pada persamaan (2) dan (3) adalah berorde $p + 3$ jika $H(x, y)$ memenuhi syarat berikut:

$$H(\alpha, \alpha) = 1,\ H_x(\alpha, \alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)},\ \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}H_y(\alpha, \alpha) + H_{xx}(\alpha, \alpha) = \frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)}, \tag{4}$$

dengan α adalah akar sederhana dari persamaan nonlinear $f(x) = 0$.

2.2 Bentuk pertama metode iterasi YoonMee Ham

Diberikan x_0 dan hitung x_{n+1} dengan metode iterasi berikut

$$x_{n+1} = z_n - H(x_n, y_n)\frac{f(z_n)}{f'(x_n)}, \tag{5}$$

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{6}$$

dimana fungsi

$$H(x, y) = \frac{f'(x) + f'(y)}{3f'(y) - f'(x)}, \tag{7}$$

yang memenuhi syarat (4) konvergen secara kuadratik. Bentuk pertama metode iterasi YoonMee Ham mestilah konvergen dengan orde lima. Namun, ini tidaklah benar, karena orde konvergensinya empat.

Teorema 1 (Orde Konvergensi) Misalkan $\alpha \in I$ akar sederhana dari fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ yang terdiferensial secukupnya pada interval buka I. Jika nilai awal x_0 cukup dekat ke α, dan $H(x, y)$ memenuhi syarat (4), maka orde konvergensi bentuk pertama metode iterasi YoonMee Ham yang didefinisikan oleh (3) adalah empat, dan metode iterasi ini memenuhi persamaan galat

$$e_{n+1} = -c_2^3 e_n^4 + O(e_n^5),$$

dimana $c_2 = f''(\alpha)/(2f'(\alpha))$.

Bukti

Misalkan α adalah akar sederhana dari $f(x)$, $c_k = \dfrac{f^{(k)}(\alpha)}{k! f'(\alpha)}, k = 2, 3, ...,$ dan $e_n = x_n - \alpha$. Akan ditinjau fungsi iterasi $F(x)$ yang di definisikan oleh

$$F(x) = z(x) - \left(\frac{f'(x) + f'(z(x))}{3f'(z(x)) - f'(x)}\right)\frac{f(z(x))}{f'(x)}, \tag{8}$$

dimana

$$z(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \tag{9}$$

Bila disubstitusikan persamaan (9) ke persamaan (8) diperoleh

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \left(\frac{f'(x) + f'(z(x))}{3f'(z(x)) - f'(x)}\right)\frac{f(z(x))}{f'(x)}. \tag{10}$$

Kemudian di substitusikan $x = \alpha$ ke persamaan (10) dan mengingat $f(\alpha) = 0$ maka diperoleh

$$F(\alpha) = \left(\alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right) - \left(\frac{f'(\alpha) + f'(z(\alpha))}{3f'(z(\alpha)) - f'(\alpha)}\right)\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

$$F(\alpha) = \alpha. \tag{11}$$

Kemudian dengan cara yang sama dengan menggunakan Maple, maka didapat

$$F'(\alpha) = 0. \tag{12}$$

$$F''(\alpha) = 0. \tag{13}$$

$$F'''(\alpha) = 0. \tag{14}$$

$$F^{(4)}(\alpha) = -\frac{3\big(f''(\alpha)\big)^3}{\big(f'(\alpha)\big)^3}. \tag{15}$$

Selanjutnya dengan menggunakan ekspansi Taylor untuk $F(x_n)$ di sekitar $x_n = \alpha$, yaitu

$$\begin{aligned} x_{n+1} = F(x_n) &= F(\alpha) + F'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{F''(\alpha)}{2!}(x_n - \alpha)^2 \\ &+ \frac{F'''(\alpha)}{3!}(x_n - \alpha)^3 + \frac{F^{(4)}(\alpha)}{4!}(x_n - \alpha)^4 + O((x_n - \alpha)^5). \end{aligned} \tag{16}$$

Dengan mensubstitusi persamaan (11)–(15) ke persamaan (16) dan mengingat $f(\alpha) = 0$ diperoleh

$$x_{n+1} = \alpha - \frac{\big(f''(\alpha)\big)^3}{8\big(f'(\alpha)\big)^3} e_n^4 + O(e_n^5),$$

karena $c_2 = \dfrac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$ maka diperoleh

$$e_{n+1} = -c_2^3 e_n^4 + O(e_n^5).$$

Maka dapat dikatakan orde konvergensi bentuk pertama metode iterasi YoonMee Ham adalah empat.

2.3 Perbaikan bentuk pertama metode iterasi YoonMee Ham

Untuk menaikkan orde konvergensi satu atau dua unit, dengan menambahkan funsi bobot $H(x_n, y_n)$. Untuk itu jika diberikan x_0, dihitung solusi taksiran x_{n+1} melalui metode iterasi berikut

$$z_n = \phi_2(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x)}, \tag{17}$$

$$x_{n+1} = z_n - H(x_n, y_n)\frac{f(z_n)}{f'(x_n)}, \tag{18}$$

dimana $H(x, y)$ mewakili suatu fungsi dua variabel yang akan ditentukan kemudian.

Teorema 2 (Orde Konvergensi) Misalkan $\alpha \in I$ adalah akar sederhana dari fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ yang dapat diturunkan secukupnya pada interval buka I. Jika nilai awal x_0 cukup dekat ke α, dan $H(x, y)$ memenuhi syarat

$$H(\alpha, \alpha) = 1,\ H_x(\alpha, \alpha) = 2c_2,\ 2c_2 H_y(\alpha, \alpha) + H_{xx}(\alpha, \alpha) = 6c_3 - 2c_2^2, \tag{19}$$

maka perbaikan bentuk pertama metode iterasi YoonMee Ham mempunyai orde konvergensi lima.

Jika $H(x, y)$ memenuhi persamaan (19) dan

$$c_2 H_{xxx}(\alpha, \alpha) + (6c_2^2 - 6c_3)H_{xx}(\alpha, \alpha) + 6c_2^2 H(\alpha, \alpha) = -12c_2^4 + 24c_2c_4 - 36c_3^2, \quad (20)$$

maka perbaikan bentuk pertama metode iterasi YoonMee Ham mempunyai orde konvergensi enam.

Bukti

Misalkan α adalah akar sederhana dari $f(x) = 0$ maka $f(\alpha) = 0$ dan $f'(\alpha) \neq 0$. Misalkan jika $e_n = x_n - \alpha$. Selanjutnya akan dibuktikan $H(\alpha, \alpha)$ dinyatakan dengan H, $H_x(\alpha, \alpha)$ dinyatakan dengan H_x, $H_y(\alpha, \alpha)$ dengan H_y, $H_{xx}(\alpha, \alpha)$ dengan H_{xx}, $H_{xxx}(\alpha, \alpha)$ dengan H_{xxx}. Maka dengan menggunakan ekspansi Taylor dari $f(x_n)$ disekitar $x_n = \alpha$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{1}{2!}f''(\alpha)(x_n - \alpha)^2 + \frac{1}{3!}f'''(\alpha)(x_n - \alpha)^3 \\ + \frac{1}{4!}f^{(4)}(\alpha)(x_n - \alpha)^4 + \frac{1}{5!}f^{(5)}(\alpha)(x_n - \alpha)^5 \\ + \frac{1}{6!}f^{(6)}(\alpha)(x_n - \alpha)^6 + O(x_n - \alpha)^7. \end{aligned} \quad (21)$$

Karena $f(\alpha) = 0$, $e_n = x_n - \alpha$, dan dengan menyatakan $c_k = \dfrac{f^{(k)}(\alpha)}{k! f'(\alpha)}, k = 2, 3, ...$ maka diperoleh

$$f(x_n) = f'(\alpha)\Big(c_1 e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4 + c_5 e_n^5 + c_6 e_n^6 + O(e_n^7)\Big). \quad (22)$$

Selanjutnya dengan cara yang sama kembali dilakukan ekspansi Taylor untuk $f'(x_n)$ disekitar $x_n = \alpha$, sehingga setelah disederhanakan diperoleh

$$f'(x_n) = f'(\alpha)\Big(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 e_n^3 + 5c_n^4 + 6c_n^5 + 7c_n^6 + O(e_n^7)\Big). \quad (23)$$

Kemudian persamaan (22) dibagi dengan persamaan (23) maka diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{\Big(c_1 e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4 + c_5 e_n^5 + c_6 e_n^6 + O(e_n^7)\Big)}{\Big(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 e_n^3 + 5c_5 e_n^4 + 6c_6 e_n^5 + 7c_7 e_n^6 + O(e_n^7)\Big)}. \quad (24)$$

Selanjutnya dengan menggunakan deret geometri [1]

$$r = 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 e_n^3 + 5c_5 e_n^4 + 6c_6 e_n^5 + 7c_7 e_n^6 + O(e_n^7),$$

dan setelah disederhanakan persamaan (24) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n + c_2 e_n^2 - (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 - (7c_2c_3 - 3c_4 - 4c_2^3)e_n^4 \\ - (10c_2c_4 + 6c_3^2 - 20c_2^2c_3 - 4c_5 + 8c_2^4)e_n^5 \\ + (-33c_2c_3^2 - 5c_6 + 52c_2^3c_3 - 28c_2^2c_4 + 17c_3c_4 \\ + 13c_2c_5 - 16c_2^5)e_n^6 + O(e_n^7). \end{aligned} \quad (25)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (25) ke persamaan (2) diperoleh

$$\begin{aligned} z_n = \alpha &+ c_2 e_n^2 - (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 - (7c_2c_3 - 3c_4 - 4c_2^3)e_n^4 \\ &- (10c_2c_4 + 6c_3^2 - 20c_2^2c_3 - 4c_5 + 8c_2^4c_3)e_n^5 \\ &- (-33c_2c_3^2 - 5c_6 + 52c_2^3c_3 - 28c_2^2c_4 + 17c_3c_4 \\ &+ 13c_2c_5 - 16c_2^5)e_n^6 + O(e_n^7). \end{aligned} \tag{26}$$

Kemudian Taylor dari $f(z_n)$ disekitar $z_n = \alpha$ sampai orde enam dan mengabaikan orde yang lebih tinggi, karena mengingat persamaan (26) $f(\alpha) = 0$, dan $e_n = z_n - \alpha$, serta dengan menyatakan $c_k = \dfrac{f^{(k)}(\alpha)}{k!f'(\alpha)}, k = 2, 3, ...$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} f(z_n) = f'(\alpha)\Big(&c_2e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + (-7c_2c_3 + 3c_4 + 5c_2^3)e_n^4 \\ &+ (-6c_3^2 + 4c_5 - 12c_2^4 - 10c_2c_4 + 24c_2^2c_3)e_n^5 \\ &+ (-17c_3c_4 + 28c_2^5 + 5c_6 + 34c_2^2c_4 - 13c_2c_5 + 37c_2c_3^2 \\ &- 73c_2^3c_3)e_n^6 + O(e_n^7)\Big). \end{aligned} \tag{27}$$

Selanjutnya dihitung $\dfrac{f(z_n)}{f'(x_n)}$, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} = c_2e_n^2 &+ (-4c_2^2 + 2c_3)e_n^3 + (-14c_2c_3 + 3c_4 + 13c_2^3)e_n^4 \\ &+ (-20c_2c_4 - 12c_3^2 + 4c_5 - 38c_2^4 + 64c_2^2c_3)e_n^5 \\ &+ (104c_2^5 - 240c_2^3c_3 - 26c_2c_5 + 103c_2c_3^12 - 34c_3c_4 \\ &+ 5c_6 + 90c_2^2c_4)e_n^6 + (Oe_n^7). \end{aligned} \tag{28}$$

Selanjutnya dihitung $H(x_n, y_n)$ dengan menggunakan teorema Taylor dua variabel [2] di sekitar (α, α) dan hanya dengan memperhatikan sampai turunan ke empat yang akan menghasilkan suku yang memuat e_n^6 maka diperoleh

$$\begin{aligned} H(x_n, y_n) = H(\alpha, \alpha) &+ H_x(\alpha, \alpha)(x_n - \alpha) + H_y(\alpha, \alpha)(y_n - \alpha) \\ &+ H_{xx}(\alpha, \alpha)\frac{(x_n - \alpha)^2}{2} + H_{xy}(\alpha, \alpha)(x_n - \alpha)(y_n - \alpha) \\ &+ H_{yy}(\alpha, \alpha)\frac{(y_n - \alpha)^2}{2} + H_{xxx}(\alpha, \alpha)\frac{(x_n - \alpha)^3}{6} \\ &+ H_{xxy}(\alpha, \alpha)\frac{(x_n - \alpha)^2(y_n - \alpha)}{2} \\ &+ H_{xxxx}(\alpha, \alpha)\frac{(x_n - \alpha)^4}{24}. \end{aligned} \tag{29}$$

Misalkan $H(\alpha, \alpha) = H$, $H_x(\alpha, \alpha) = H_x$, $H_y(\alpha, \alpha) = H_y$, $H_{xx}(\alpha, \alpha) = H_{xx}$, $H_{xy}(\alpha, \alpha) = H_{xy}$, $H_{yy}(\alpha, \alpha) = H_{yy}$, $H_{xxx}(\alpha, \alpha) = H_{xxx}$, $H_{xxy}(\alpha, \alpha) = H_{xxy}$,

$H_{xxxx}(\alpha,\alpha) = H_{xxxx}$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
x_{n+1} = \alpha &+ (1-H)c_2e_n^2 + \Big[-2c_2^2 + 2c_3 + (4c_2^2 - 2c_3)H - c_2H_x\Big]e_n^3 \\
&+ \Big[4c_2^3 - 7c_2c_3 + 3c_4 - (13c_2^3 - 14c_2c_3 + 3c_4)H + (4c_2^2 - 2c_3)H_x \\
&- \Big(c_2H_y + \frac{1}{2}H_{xx}\Big)c_2\Big]e_n^4 + \Big[(38c_2^4 - 4c_5 + 12c_3^2 - 64c_2^2c_3 + 20c_2c_4)H \\
&+ (14c_2c_3 - 13c_2^3 - 3c_4)H_x - 8c_2^4 - 6c_3^2 + +20c_2^2c_3 - 10c_2c_4 + 4c_5 \\
&+ (4c_2^2 - 2c_3)\Big(c_2H_y + \frac{1}{2}H_{xx}\Big) + (2c_2^2 - 2c_3)c_2H_y - \frac{1}{6}c_2H_{xxx} - c_2^2H_{xy}\Big]e_n^5 \\
&+ \Big[5c_5 - 13c_2c_5 - 17c_3c_4 + 28c_2^2c_4 + 33c_2c_3^2 - 52c_2^3c_3 + 16c_2^5(-104c_2^5 \\
&- 5c_6 + 34c_3c_4 + 26c_2c_5 + 240c_2^3c_3 - 90c_2^2c_4 - 103c_2c_3^2)H + (38c_2^4 \\
&+ 12c_3^2 - 4c_5 + 20c_2c_4 - 64c_2^2c_3)H_x + (-25c_2^4 - 4c_3^2 + 33c_2^2c_3 \\
&- 6c_2c_4)H_y + (2c_2^3 - 2c_2c_3)H_{xy} + \Big(\frac{3}{2}c_4 + 2c_2^3 - \frac{7}{2}c_2c_3\Big)H_{xx} \\
&+ \Big(-\frac{1}{2}c_2^3\Big)H_{yy} + \Big(-\frac{1}{2}c_2^2\Big)H_{xxy} + \Big(-\frac{1}{3}c_3 + \frac{2}{3}c_2^2\Big)H_{xxx} \\
&+ \Big(-\frac{1}{24}c_2\Big)H_{xxxx}\Big]e_n^6 + O(e_n^7). \qquad (30)
\end{aligned}$$

Karena $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$ dan untuk membuktikan orde konvergensi perbaikan bentuk pertama metode iterasi YoonMee Ham adalah lima, jika dipilih

$$H = 1,\ H_x = 2c_2,\ c_2H_y + \frac{H_{xx}}{2} = 3c_3 - c_2^2, \qquad (31)$$

pada persamaan (3), maka akan diperoleh

$$\begin{aligned}
e_{n+1} = \Big[&-2c_2^4 + 6c_2^2c_3 + 4c_2c_4 - 6c_3^2 + (c_3 - c_2^2)H_{xx} - \frac{1}{6}c_2H_{xxx} \\
&- c_2^2H_{xy}\Big]e_n^5 + O(e_n^6).
\end{aligned}$$

Selanjutnya untuk membuktikan orde konvergensi perbaikan bentuk pertama metode iterasi YoonMee Ham adalah enam, jika memenuhi persamaan (31) dan

$$c_2H_{xxx} + (6c_2^2 - 6c_3)H_{xx} + 6c_2^2H_{xy} = -12c_2^4 + 24c_2c_4 - 36c_3^2,$$

pada persamaan (3), maka akan diperoleh

$$\begin{aligned}
e_{n+1} = \Big[&-\frac{1}{24}c_2H_{xxxx} + (2c_2^3 - 2c_2c_3)H_{xy} + \Big(2c_2^3 - \frac{7}{2}c_2c_3 + \frac{3}{2}c_4\Big)H_{xx} \\
&- \frac{1}{2}c_2^3H_{yy} - \frac{1}{2}c_2^2H_{xxy} + 93c_2^5 - 26c_3c_4 - 208c_2^3 + 62c_2^2c_4 + 91c_2c_3^2 \\
&- 8c_2c_5\Big]e_n^6 + O(e_n^7). \quad \square
\end{aligned}$$

3. BEBERAPA KASUS KHUSUS

Pada bagian ini dibahas kasus khusus untuk beberapa fungsi $H(x, y)$ pada perbaikan bentuk pertama metode iterasi YoonMee Ham yaitu

1. $H_1(x, y) = \dfrac{3f'(x) + f'(y)}{-f'(x) + 5f'(y)}$,
2. $H_2(x, y) = \dfrac{5(f'(x))^2 - 2f'(x)f'(y) + (f'(y))^2}{4f'(x)f'(y)}$,
3. $H_3(x, y) = \dfrac{3(f'(x))^2 + (f'(y))^2}{2f'(x)f'(y) + 2(f'(y))^2}$,
4. $H_4(x, y) = \dfrac{-4(f'(x))^2}{(f'(x))^2 - 6f'(x)f'(y) + (f'(x))^2}$,
5. $H_5(x, y) = \dfrac{5(f'(x))^2 + 3(f'(y))^2}{(f'(x))^2 + 7(f'(y))^2}$,
6. $H_6(x, y) = \dfrac{6(f'(x))^2 + f'(x)f'(y) + (f'(y))^2}{(-f(x))^2 + 7f'(x)f'(y) + 2(f'(y))^2}$.

4. PERBANDINGAN NUMERIK

Pada bagian ini akan dilakukan uji komputasi untuk membandingkan kecepatan dalam menemukan akar hampiran dari persamaan nonlinear antara metode iterasi baru berorde lima pada persamaan (3) dengan metode Newton pada persamaan (1).

Berikut ini diberikan beberapa fungsi yang juga telah digunakan pada [4] untuk membandingkan metode-metode tersebut.

1. $f_1(x) = x^2 - e^x - 3x + 2$
2. $f_2(x) = \sin^2(x) - x^2 + 1$
3. $f_3(x) = (x - 1)^3 - 1$
4. $f_4(x) = e^{x^2+7x-30} - 1$
5. $f_5(x) = xe^{x^2} - \sin^2(x) + 3\cos(x) + 5$

Untuk melakukan uji komputasi dari kelima contoh persamaan nonlinear di atas, digunakan program Maple 13 dengan toleransi 1.0×10^{-15}. Untuk mendapatkan solusi numerik dari kelima contoh fungsi di atas, terlebih dahulu ditentukan kriteria pemberhentian jalannya program komputasi yang sama untuk semua metode yang dibandingkan, yaitu $|x_n - x_{n-1}| <$ toleransi atau $|f(x_n)| <$ toleransi. Perbandingan hasil komputasi dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1: Perbandingan hasil komputasi dari beberapa metode iterasi

Metode	n	x_n	$\|f(x_n)\|$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
$f_1(x)$				
$x_0 = 3.6$				
MN	7	0.2575302854398608	$2.463195e-28$	$2.641066e-14$
FLM1	3	0.2575302854398608	$6.794558e-37$	$2.158282e-07$
FLM2	3	0.2575302854398608	$6.683596e-18$	$1.557104e-03$
FLM3	3	0.2575302854398608	$7.927875e-19$	$9.509846e-04$
FLM4	3	0.2575302854398608	$2.977920e-28$	$1.179082e-05$
FLM5	3	0.2575302854398609	$4.900052e-16$	$3.544805e-03$
FLM6	5	0.2575302854398608	$2.545265e-19$	$1.898373e-09$
$x_0 = -1$				
MN	5	0.2575302854398608	$6.655314e-26$	$4.341244e-13$
FLM1	2	0.2575302854398608	$4.113842e-20$	$4.904457e-04$
FLM2	2	0.2575302854398608	$2.234981e-18$	$1.250743e-03$
FLM3	2	0.2575302854398608	$1.877558e-19$	$7.129799e-04$
FLM4	2	0.2575302854398608	$5.598777e-23$	$1.337819e-04$
FLM5	2	0.2575302854398608	$2.372232e-18$	$1.220824e-03$
FLM6	4	0.2575302854398608	$4.803919e-22$	$8.247318e-11$
$f_2(x)$				
$x_0 = 4.86$				
MN	7	1.4044916482153412	$6.244932e-23$	$5.666077e-12$
FLM1	3	1.4044916482153412	$1.309548e-19$	$1.594812e-04$
FLM2	3	1.4044916482153413	$2.406566e-16$	$5.821677e-04$
FLM3	3	1.4044916482153412	$3.842599e-17$	$4.282187e-04$
FLM4	3	1.4044916482153412	$9.635409e-19$	$2.232792e-04$
FLM5	3	1.4044916482153413	$2.379427e-16$	$5.971546e-04$
FLM6	5	1.4044916482153413	$1.730179e-16$	$2.108867e-08$
$x_0 = 1.6$				
MN	5	1.4044916482153412	$3.970682e-28$	$1.428733e-14$
FLM1	2	1.4044916482153412	$2.374518e-21$	$7.151074e-05$
FLM2	2	1.4044916482153412	$3.997493e-19$	$1.617844e-04$
FLM3	2	1.4044916482153412	$1.072232e-19$	$1.320329e-04$
FLM4	2	1.4044916482153412	$1.015732e-20$	$8.982130e-05$
FLM5	2	1.4044916482153412	$2.950607e-19$	$1.565334e-04$
FLM6	4	1.4044916482153412	$1.097406e-23$	$5.311135e-12$

$f_3(x)$				
$x_0 = 3.2$				
MN	7	2.0000000000000000	$8.730761e-27$	$5.394677e-14$
FLM1	3	2.0000000000000000	$5.783473e-26$	$6.976322e-06$
FLM2	3	2.0000000000000000	$9.824278e-20$	$9.777527e-05$
FLM3	3	2.0000000000000000	$5.910165e-21$	$5.939179e-05$
FLM4	3	2.0000000000000000	$3.497515e-24$	$1.475584e-05$
FLM5	3	2.0000000000000000	$2.174966e-19$	$1.180299e-04$
FLM6	5	2.0000000000000000	$5.871679e-19$	$9.892488e-10$
$x_0 = 2.2$				
MN	5	2.0000000000000000	$1.997938e-24$	$8.160756e-13$
FLM1	2	2.0000000000000000	$6.302095e-19$	$1.782974e-04$
FLM2	2	2.0000000000000001	$1.623543e-16$	$4.305494e-04$
FLM3	2	2.0000000000000000	$4.339228e-17$	$3.523786e-04$
FLM4	2	2.0000000000000000	$3.210476e-18$	$2.299394e-04$
FLM5	2	2.0000000000000000	$1.325586e-16$	$4.257002e-04$
FLM6	4	2.0000000000000000	$1.500638e-21$	$5.001063e-11$

$f_4(x)$				
$x_0 = 4$				
MN	19	3.0000000000000000	$9.152489e-20$	$3.271799e-11$
FLM1	8	3.0000000000000000	$5.334663e-28$	$4.840037e-07$
FLM2	9	3.0000000000000000	$1.603253e-22$	$4.564844e-06$
FLM3	9	3.0000000000000000	$1.461613e-29$	$1.916234e-07$
FLM4	8	3.0000000000000000	$7.146397e-18$	$4.668711e-05$
FLM5	10	3.0000000000000000	$8.260244e-74$	$2.605949e-16$
FLM6	13	3.0000000000000000	$5.436921e-24$	$5.638693e-13$
$x_0 = 4.5$				
MN	27	3.0000000000000000	$6.454129e-23$	$8.688319e-13$
FLM1	11	3.0000000000000000	$1.742164e-22$	$6.132704e-06$
FLM2	13	3.0000000000000000	$7.763654e-36$	$9.918118e-09$
FLM3	13	3.0000000000000000	$1.541203e-53$	$3.069401e-12$
FLM4	12	3.0000000000000000	$2.629277e-56$	$9.599975e-13$
FLM5	13	3.0000000000000000	$3.793589e-19$	$2.230534e-05$
FLM6	18	3.0000000000000000	$1.173516e-27$	$8.284122e-15$

$f_5(x)$				
$x_0 = -4.2$				
MN	23	-1.2076478271309189	$1.983677e-24$	$2.550083e-13$
FLM1	10	-1.2076478271309189	$8.517223e-74$	$1.061019e-15$
FLM2	11	-1.2076478271309189	$9.365543e-34$	$7.812391e-08$
FLM3	11	-1.2076478271309189	$7.233525e-48$	$1.270598e-10$
FLM4	10	-1.2076478271309189	$3.223183e-40$	$4.892038e-09$
FLM5	11	-1.2076478271309189	$2.219758e-19$	$6.066771e-05$
FLM6	15	-1.2076478271309189	$1.484052e-19$	$1.559654e-10$
$x_0 = -5.8$				
MN	39	-1.2076478271309189	$1.895211e-17$	$7.882203e-10$
FLM1	16	-1.2076478271309189	$2.336988e-26$	$3.261333e-06$
FLM2	19	-1.2076478271309189	$2.470020e-43$	$9.484566e-10$
FLM3	18	-1.2076478271309190	$6.645047e-16$	$3.138333e-04$
FLM4	17	-1.2076478271309189	$3.256722e-45$	$4.902177e-10$
FLM5	20	-1.2076478271309189	$6.974757e-76$	$3.036639e-16$
FLM6	25	-1.2076478271309189	$1.830318e-17$	$1.732076e-09$

Berdasarkan Tabel 1, tampak bahwa semua metode yang dibandingkan berhasil menemukan akar yang diharapkan dari semua contoh fungsi yang diberikan. Pada semua contoh tampak bahwa metode FLM1–FLM6 memerlukan iterasi yang relatif sedikit atau sama jika dibandingkan dengan metode Newton. Jika dilihat dari tebakan awal FLM1–FLM5 mempunyai jumlah iterasi yang sama dengan tebakan awal yang sama juga, sementara FLM6 dan metode Newton memiliki jumlah iterasi yang lebih besar.

Ucapan Terimakasih Penulis mengucapkan terimakasih kepada Dr. Imran M.,M.Sc.yang telah memberikan arahan dan bimbingan penulisan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bartle, R. G. & Sherbert, R. D. 2011. *Inroduction to Real Analysis, 4^{th} Ed.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

[2] Burden, R. L. & J. D. Faires. 2001. *Numerical Analysis, 9^{th} Ed.* Brooks Cole., New York.

[3] Ham, Y. 2008. Some higher-order modifications of Newton's method for solving nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computational.* **222**: 477–486.

[4] Fang, L & Guoping ,H. 2009. Some modifications of Newton's method with hingher-orde convergence for solving nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computational*, **228**: 296–303.