SIFAT-SIFAT FUNGSI FIBONACCI PADA BILANGAN FIBONACCI

Samson Manalu*[1], Mashadi[2], Rolan Pane[3]

1 Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
2 Laboratorium Matematika Murni, Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*manalusamson@gmail.com

ABSTRACT

For every function $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, with $f(x+2)=f(x+1)+f(x)$, for $x\in\mathbb{R}$ is called the Fibonacci function. In this article, we discuss the properties of a Fibonacci function on Fibonacci Numbers. Among them is the multiplication of an odd function or an even function with a Fibonacci function, also produces a Fibonacci function. If the Fibonacci function f convergens, it convergens to a number $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ called golden ratio. This implies that limit of a Fibonacci function exists.

Keywords: *Fibonacci function, odd function, even function, and golden ratio.*

ABSTRAK

Untuk setiap fungsi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dengan $f(x+2)=f(x+1)+f(x)$, untuk $x\in\mathbb{R}$ dinamakan fingsi Fibonacci. Pada artikel ini dibahas sifat-sifat fungsi Fibonacci pada bilangan Fibonacci. Diantaranya adalah perkalian fungsi ganjil atau fungsi genap dengan fungsi Fibonacci, juga menghasilkan fungsi Fibonacci. Jika fungsi Fibonacci f konvergen, maka dianya konvergen ke $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ yang dinamakan bilangan golden rasio, yang mengimplikasikan limit fungsi Fibonacci ada.

Kata kunci: *Fungsi Fibonacci, fungsi ganjil, fungsi genap, dan golden rasio.*

1. PENDAHULUAN

Bilangan tidak bisa dilepaskan dari matematika. Banyak jenis-jenis bilangan yang sering dijumpai dalam matematika. Misalnya bilangan real, bilangan rasional, bilangan cacah, bilangan asli, bilangan kompleks dan lain sebagainya. Bilangan-bilangan tersebut dapat membentuk pola barisan bilangan dan deret bilangan, baik itu deret geometri maupun deret aritmetika. Barisan bilangan Fibonacci ditemukan oleh seorang ahli matematika berkebangsaan Italia yaitu Leonardo Fibonacci sekitar tahun 1170.

Barisan 0,1,1,2,3,5,8,13,21… merupakan barisan bilangan Fibonacci. Selain barisan bilangan Fibonacci ada juga fungsi Fibonacci. Fungsi Fibonacci merupakan perluasan dari barisan bilangan Fibonacci. Fungsi Fibonacci didefinisikan sebagai berikut yang di rujuk dari [3]:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$$f(x+2)=f(x+1)+f(x),\ \text{untuk}\quad x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Pada artikel ini ditulis dengan tujuan untuk mengetahui sifat-sifat fungsi Fibonacci pada barisan bilangan Fibonacci. Untuk mengetahui sifat-sifat tersebut, kembali ditinjau ulang fungsi Fibonacci pada bilangan Fibonacci yang ditulis oleh Jeong Soon Han, Hee Sik Kim dan Joseph Neggers [3] dalam jurnalnya yang berjudul "*On Fibonacci Function With Fibonacci Numbers*". Untuk menjelaskan persoalan diatas secara terperinci.

2. BARISAN BILANGAN

Sebelum membahas mengenai Sifat-sifat Fungsi Fibonacci pada Bilangan Fibonacci terlebih dahulu diberikan beberapa teori pendukung yang berhubungan dengan pembahasan tersebut .

2.1. Barisan

Definisi 1 [1, h.53]. Barisan bilangan real adalah suatu fungsi dengan daerah asalnya himpunan bilangan asli dan daerah hasilnya adalah himpunaan bagian dari bilangan real. Jika $X:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ merupakan barisan, maka biasanya ditulis dengan X pada n yang dinotasikan dengan $\{x_n\}$.

2.1.1 Barisan konvergen

Definisi 2 [1, h.54]. Barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dikatakan konvergen ke bilangan real x, jika untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat $k(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ sehingga $|x_n-x|<\varepsilon$ untuk $n\geq k(\varepsilon)$. Dengan kata lain barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke bilangan real x apabila $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Teorema 3. Jika barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke bilangan real x maka barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ terbatas.

Definisi 4 [1, h. 69]. Misalkan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ barisan pada bilangan real. Dikatakan barisan turun jika $x_n\geq x_{n+1}$, untuk $n=1,2,3,...$

Definisi 5 [1, h. 69]. Misalkan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ barisan pada bilangan real. Dikatakan barisan naik jika, $x_n\leq x_{n+1}$ untuk $n=1,2,3,...$

Teorema 6. Misalkan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ barisan monoton pada bilangan real adalah konvergen jika dan hanya jika barisan itu terbatas,sehingga dapat ditulis bahwa:

(i). Jika $X = x_n$ barisan naik terbatas, maka $\lim(x_n) = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(ii). Jika $Y = y_n$ barisan turun terbatas, maka $\lim(y_n) = \inf\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$.

2.2. Barisan Fibonacci

Definisi 7. [6, h. 6] Misalkan $\{x_n\}$ adalah barisan bilangan. Dikatakan $\{x_n\}$ adalah barisan bilangan Fibonacci jika suku berikutnya merupakan hasil penjumlahan dari dua suku sebelumnya. Dengan kata lain bentuk umum dari barisan bilangan Fibonacci, yaitu:

$$F_1 = F_2 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 3. \tag{2}$$

Misalkan $\{x_n\}$ adalah barisan. $(-1)^{n+1} x_n$ disebut barisan Fibonacci penuh untuk $n > 0$dan n adalah barisan Fibonacci [3].

Misalkan $\{x_n\}$ adalah barisan Fibonacci dengan $x_{n+1} = -x_{n+1} + x_n$, maka $\{x_n\}$ adalah barisan Fibonacci genap [3].

2.3. Fungsi Fibonacci

Fungsi Fibonacci merupakan pengembangan dari barisan Fibonacci. Fungsi fibonaaci didefinisikan sebagai berikut

$$f(x+2) = f(x+1) + f(x), \text{ untuk setiap } x \in \mathbb{R} \quad [3].$$

3. SIFAT FUNGSI FIBONACCI

Sifat-sifat fungsi Fibonacci pada bilangan real akan dijelaskan pada bagian ini yang di rujuk dari [3].

3.1. Sifat fungsi Fibonacci pada bilangan real

Sifat fungsi Fibonacci pada bilangan real merupakan bentuk umum dari fungsi Fibonacci sendiri [3], yaitu

$$f(x+2) = f(x+1) + f(x), \text{ untuk } x \in \mathbb{R}.$$

Contoh 3.1. Misalkan $f(x) = a^x$ dan $f(x)$ adalah fungsi Fibonacci pada $\mathbb{R}$, dengan $a > 0$. Akan ditentukan $f(x) = a^x$ adalah fungsi Fibonacci dan nilai a yang memenuhi dari persamaan (1).

Solusi. Dari persamaan (1)

$$a^{x+2} = a^{x+1} + a^{x}$$

$$a^{x}a^{2} = a^{x}a^{1} + a^{x}$$

$$a^{x}a^{2} = a^{x}(a+1)$$

$$a^{2} = (a+1)$$

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Jadi, $f(x)$ adalah fungsi Fibonacci dan nilai $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Teorema 8. Misalkan f adalah fungsi Fibonacci. Jika didefinisikan $g(x) = f(x+t)$ dimana $t \in \mathbb{R}$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, maka $g(x)$ juga adalah sebuah fungsi Fibonacci.

Bukti.

$$g(x) = f(x+t)$$

$$g(x+2) = f(x+2+t)$$

Dari persamaan (1) diperoleh

$$g(x+2) = f(x+t+1) + f(x+t)$$

$$g(x+2) = g(x+1) + g(x).$$

Jadi, diperoleh $f(x) = f(x+t)$ dalah fungsi Fibonacci.

Teorema 9. Misalkan $f(x)$ adalah sebuah fungsi Fibonacci dan $\{F_n\}$ adalah barisan bilangan Fibonacci dengan $F_0 = 0, F_1 = F_2$. Maka $f(x+n) = F_n f(x+1) + F_{n-1} f(x)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dan $n \geq 0$ dan n adalah bilangan bulat.

Bukti: Dari persamaan (1)

$$f(x+2) = f(x+1) + f(x).$$

Akan dibuktikan dengan induksi matematika. Untuk $n = 2$

$$f(x+2) = F_2 f(x+1) + F_1 f(x).$$

Untuk $n = k+1$ diperoleh

$$f(x+k+1) = f(x+k) + f(x+k-1)$$

$$= [F_k f(x+1) + F_{k-1} f(x)] + [F_{k-1} f(x+1) + F_{k-2} f(x)]$$

$$f(x+k+1) = (F_k + F_{k-1}) f(x+1) + (F_{k-1} + F_{k-2}) f(x)$$

$$f(x+k+1) = F_{k+1} f(x) + F_k f(x).$$

Jadi, diperoleh $f(x+n) = F_n f(x) + F_{n-1} f(x)$. (3)

Akibat 10. Jika $\{F_n\}$ adalah barisan Fibonacci dengan $F_1 = F_2 = 1$ maka $a^n = F_n a + F_{n-1}$.

Bukti. Misalkan $f(x) = a^x$. Dari Contoh 3.1 $f(x)$ adalah fungsi Fibonacci.

$$f(x+n) = a^{x+n}.$$

Dari persamaan (3) $f(x+n) = F_n f(x+1) + F_{n-1} f(x)$

$$a^x a^n = F_n f(a^x a) + F_{n-1} f(a^x)$$

$$a^n = F_n a + F_{n-1}.$$

3.2. Sifat fungsi Fibonacci pada barisan bilangan Fibonacci penuh

Akan dijelaskan bagaimana sifat fungsi Fibonacci pada barisan Fibonacci penuh dalam bentuk contoh yang dirujuk dari [3].

Contoh 3.2. Misalkan $\{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ dan $\{v_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ adalah barisan fungsi Fibonacci penuh. Jika $f(x)$ didefenisikan dengan

$f(x) = u_{[x]} + v_{[x]} t$, dengan $t = x - [x] \in (0,1)$. Akan ditunjukkan $f(x)$ adalah fungsi Fibonacci.

Solusi. Untuk membuktikan $f(x)$ adalah fungsi Fibonacci, maka persamaan (1) harus dipenuhi.

$$f(x) = u_{[x]} + v_{[x]} t,$$

$$\begin{aligned} f(x+2) &= u_{([x]+2)} + v_{([x]+2)} t \\ &= (u_{([x]+1)} + v_{([x]+1)} t) + (u_{[x]} + v_{[x]} t) \\ f(x+2) &= f(x+1) + f(x). \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh $f(x)=u_{[x]}+v_{[x]}t$ dalah fungsi Fibonacci.

Contoh 3.3. Jika $\{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ dan $\{v_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ adalah barisan fungsi Fibonacci penuh dengan $v_{[x]}=u_{([x]-1)}$ dan $f(x)$ didefenisikan dengan $f(x)=u_{[x]}+v_{[x]}t,\ t=x-[x]\in(0,1)$.

Akan dibuktikan apakah $f(x)$ adalah fungsi Fibonacci.

Solusi.

$$f(x)=u_{[x]}+v_{[x]}t,$$

$$f(x)=u_{[x]}+u_{([x]-1)}t.$$

$$f(x+2)=u_{[x+2]}+u_{([x+2])-1)}t\ .$$

$$=u_{[x+2]}+u_{[x+1]}t$$

$$f(x+2)=(u_{[x+1]}+u_{[x]}t)+(u_{[x]}+u_{([x]-1)}t)$$

$$f(x+2)=f(x+1)+f(x)\ .$$

Jadi, diperoleh $f(x)=u_{[x]}+v_{[x]}t,\ t=x-[x]\in(0,1)$ adalah fungsi Fibonacci.

Teorema 11. Misalkan $\{u_n\}$ adalah barisan Fibonacci penuh, maka

$$u_{[x+n]}=F_n u_{([x]+1)}+F_{n-1}u_{[x]}, \qquad \text{dan}$$

$$u_{([x+n]-1)}=F_n u_{[x]}+F_{n-1}u_{([x]-1)}$$

Bukti. Dari Contoh 3.3 $f(x)=u_{[x]}+u_{([x]-1)}t.$

$$f(x+n)=u_{[x+n]}+u_{([x+n]-1)}t\ ,$$

$$u_{[x+n]}+u_{([x+n]-1)}t=f(x+n)$$

Dari persamaan (3) diperoleh

$$u_{[x+n]}+u_{([x+n]-1)}t=F_n[u_{[x+1]}+u_{([x+1]-1)}t]+F_{n-1}[u_{[x]}+u_{([x]-1)}t],$$

$$u_{[x+n]}+u_{([x+n]-1)}t=[F_n u_{([x]+1)}+F_{n-1}u_{[x]}]+[F_n u_{[x]}+F_{n-1}u_{([x]-1)}]t.$$

Akibat 12. Dari Teorema 11 diperoleh

$$F_{[x+n]} = F_n F_{([x]+1)} + F_{n-1} F_{[x]} \tag{4}$$

dan

$$F_{([x+n]-1)} = F_n F_{[x]} + F_{n-1} F_{([x]-1)} \, . \tag{5}$$

Akibat 13. Dari Akibat 12 diperoleh

$$F_{n+2} = F_n F_3 + F_{n-1} F_2 \, .$$

Bukti. Pada persamaan (4) $x = 2$ dan pada persamaan (5) $x=3$ sehingga diperoleh

$$F_{[2+n]} = F_n F_{([x]+1)} + F_{n-1} F_{[x]}$$

$$F_{[n+2]} = F_n F_3 + F_{n-1} F_2 \, .$$

3.3. Sifat fungsi Fibonacci pada fungsi genap dan fungsi ganjil

Teorema 14. Misalkan $f(x) = a(x)g(x)$ adalah sebuah fungsi. Jika $a(x)$ adalah fungsi ganjil dan $g(x)$ adalah fungsi kontinu maka $f(x)$ adalah fungsi Fibonacci jika dan hanya jika $g(x)$ adalah fungsi Fibonacci.

Bukti. Jika $f(x)$ adalah fungsi Fibonacci maka $g(x)$ fungsi Fibonacci.

Karena $f(x)$ adalah fungsi Fibonacci artinya persamaan (1) terpenuhi.

$$f(x+2) = a(x+2)g(x+2) \, .$$

$$0 = a(x+2)g(x+2) - f(x+2)$$

$$0 = a(x+1)g(x+2) - [a(x+1)g(x+1) + a(x)g(x+1)] \, .$$

Karena $a(x)$ adalah fungsi genap sehingga dapat ditulis

$$0 = a(x)g(x+2) - a(x)g(x+1) - a(x)g(x)$$

$$0 = a(x)[g(x+2) - g(x+1) - g(x)]$$

$$0 = g(x+2) - g(x+1) - g(x)$$

$$g(x+1) + g(x) = g(x+2) \, .$$

Sehingga $g(x)$ adalah fungsi Fibonacci.

Akibat 15. Misalkan $f(x) = a(x)g(x)$ adalah sebuah fungsi, jika $a(x)$ adalah fungsi genap dan $g(x)$ adalah fungsi kontinu. Maka $f(x)$ adalah fungsi Fibonacci jika dan hanya jika $g(x)$ adalah fungsi Fibonacci.

Bukti. lihat Teorema 14.

3.4. Sifat fungsi Fibonacci terhadap Limit

Teorema 16. Jika $f(x)$ adalah fungsi Fibonacci, maka limit $f(x) = \frac{f(x+1)}{f(x)}$ ada.

Bukti. Diasumsikan $f(x) = \frac{f(x+1)}{f(x)}$ adalah sebuah fungsi Fibonacci. Maka ada 4 kasus, yaitu:

i. $f(x) < 0, f(x+1) > 0$;
ii. $f(x) > 0, f(x+1) < 0$;
iii. $f(x) < 0, f(x+1) < 0$;
iv. $f(x) > 0, f > 0$.

Untuk kasus i dan ii.

Misalkan $f(x) > 0 = \alpha$.

$$f(x+1) < 0 = \beta .$$

Dari persamaan (1), yaitu $f(x+2) = f(x+1) + f(x)$.

Diasumsikan $f(x)$ adalah fungsi Fibonacci genap sehingga diperoleh

$$f(x+2) = -f(x+1) + f(x)$$

$$= -\beta + \alpha$$

$$f(x+2) = \alpha - \beta .$$

Dari persamaan (3) diperoleh

$$f(x+n) = -F_n f(x+1) + F_{n-1} f(x).$$

Diketahui $x' \in \mathbb{R}$, maka terdapat $x \in \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{Z}$ sehingga demikian $x' = x+n$. Sehingga dapat ditulis

$$\frac{f(x'+1)}{f(x')} = \frac{f(x+n+1)}{f(x+n)}$$

$$\frac{f(x'+1)}{f(x')}=\frac{F_n\alpha-F_{n+1}\beta}{F_{n-1}\alpha-F_n\beta}$$

$$\frac{f(x'+1)}{f(x')}=\frac{\alpha-\frac{F_{n+1}}{F_n}\beta}{\frac{F_{n-1}}{F_n}\alpha-\beta}$$

$$\frac{f(x'+1)}{f(x')}=\frac{\alpha-\Phi\beta}{\frac{\alpha}{\Phi}-\beta}$$

$$\frac{f(x'+1)}{f(x')}=\Phi.$$

Sehingga diperoleh $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}=\Phi$.

Untuk kasus iii dan iv.

Diketahui $x>0$, untuk $x,\delta\in\mathbb{R}$ dan $n\in\mathbb{N}$, maka dapat ditulis $x=\delta+2n$.

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{f(\delta+2n+1)}{f(\delta+2n)}$$

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}=1+\frac{f(\delta+2n-1)}{f(\delta+2n)}<2$$

Karena $\frac{f(\delta+2n-1)}{f(\delta+2n)}<1$ maka dianggap bahwa $\left\{\frac{f(\delta+2n-1)}{f(\delta+2n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan monoton naik.

$$\frac{f(\delta+2n+3)}{f(\delta+2n+2)}-\frac{f(\delta+2n+1)}{f(\delta+2n)}=\frac{f(\delta+2n+3)\,f(\delta+2n)-f(\delta+2n+2)\,f(\delta+2n+1)}{f(\delta+2n+2)\,f(\delta+2n)}.$$

Akan ditunjukkan persamaan tersebut adalah positif.

$$f(\delta+2n+3)\,f(\delta+2n)-f(\delta+2n+2)\,f(\delta+2n+1)=$$
$$[f(\delta+2n+2)+f(\delta+2n+1)]\,f(\delta+2n)-f(\delta+2n+2)+f(\delta+2n+1).$$

$$=[f(\delta+2n)]^2$$

$$\geq 0.$$

Benar bahwa barisan $\left\{\dfrac{f(\delta+2n-1)}{f(\delta+2n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ monoton naik.

Dari definisi barisan monoton konvergen diperoleh bahwa

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ ada.

Akibat 17. Akibat dari Teorema 11 Jika $f(x)$ adalah fungsi Fibonacci, maka $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Bukti. Jika dimisalkan $f(x)>0=\beta$, dan $f(x+1)>0=\beta$, maka

$$\frac{f(x+n+1)}{f(x+n)}=\frac{F_n\alpha-F_{n+1}\beta}{F_{n-1}\alpha-F_n\beta}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bartle, R. G. & R. D. Shebert. 1999. *Introduction to Real Analysis*. 3*th*Ed. John Wiley & Sons, Inc. New York.

[2] Dunlap, R. A. *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers.* 1997. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore.

[3] Han, J. S, kim H.S and Negger, J. 2012. On Fibonacci Functions With Fibonacci. *Advances in Difference Equation 2012* : **2012 :** 126.

[4] Jung, S. M. 2009. Hyers-Ulam Stability of Fibonacci fungtional Equation. *Bull .Iran .Math. Soc:* 217-227.

[5] Thomas, K. 2001. *Fibonacci and Lucas Number With Aplication,* A Wiley-interscience Publication. Canada.

[6] Verner, E. H, Jr. 1969. *Fibonacci and Lucas Number*. Houghton Mifflin Company. Boston.