MODIFIKASI FAMILI METODE ITERASI *MULTI-POINT* UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NONLINEAR

Yolla Sarwenda[1*], Zulkarnain[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

[*]sarwenda.yolla855@gmail.com

ABSTRACT

This article discusses a modified family of multi-point iterative method, which is free from second derivative, obtained by modifying the Chebyshev-Halley-type method. Analytically using Taylor expansion and geometric series, we show that the method has convergence order of three and four. Further by varying the value of the parameter in the formula, we obtain some third order iterative methods free second derivative. Then using some test functions, the proposed method is compared with several known multi-point iterative methods of order three and four.

Keywords: *Multi-point iterative method, Newton-type method, Halley-type method, Chebyshev-type, Chebyshev-Halley-type method.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas modifikasi famili metode iterasi *multi-point* yang bebas dari turunan kedua yang diperoleh dengan memodifikasi metode bertipe Chebyshev-Halley. Secara analitik dengan menggunakan ekspansi Taylor dan deret geometri ditunjukkan bahwa metode yang dihasilkan mempunyai kekonvergenan orde tiga dan empat. Selanjutnya dengan menvariasikan nilai parameter di formula famili metode iterasi *multi-point* ini diperoleh beberapa metode iterasi orde tiga bebas turunan kedua. Kemudian dengan menggunakan beberapa fungsi uji, dilakukan perbandingan metode yang diusulkan dengan beberapa metode iterasi multi-point orde tiga dan orde empat yang sudah dikenal.

Kata kunci: *Metode iterasi multi-point, metode bertipe Newton, metode bertipe Halley, metode bertipe Chebyshev, metode bertipe Chebyshev-Halley.*

1. PENDAHULUAN

Persoalan matematika yang sering ditemui adalah bagaimana menemukan solusi dari persamaan nonlinear $f(x) = 0$. Tidak semua persamaan nonlinear dapat diselesaikan menggunakan metode analitik, oleh sebab itu penyelesaian dilakukan menggunkan metode numerik.

Banyak metode numerik yang dapat digunakan untuk mencari solusi dari persamaan nonlinear. Pada artikel ini digunakan metode bertipe Newton yang memiliki kekonvergenan orde dua [4]. Metode bertipe Newton memiliki bentuk yang hampir sama dengan metode Newton. Selain itu ada juga metode bertipe Halley dan bertipe Chebyshev yang memiliki kekonvergenan orde tiga [4]. Ketiga metode ini dibutuhkan untuk memodifikasi metode bertipe Chebyshev-Halley, dengan bentuk fungsi iterasinya

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x) + \beta f(x)}\left(1 + \frac{T_f(x)}{2(1 - \lambda T_f(x))}\right), \qquad (1)$$

dengan

$$T_f(x) = \frac{f(x)(f''(x) + 2\beta f'(x))}{(f'(x) + \beta f(x))^2}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \qquad (2)$$

yang memiliki kekonvergenan orde tiga [4] dengan β adalah skala parameter dan $\lambda \in \mathbb{R}$. Perhatikan bahwa persamaan (2) memuat turunan kedua, sehingga fungsi ini memerlukan perhitungan turunan kedua. Oleh karena itu pada artikel ini direview sebagian dari artikel Kanwar et. al [5] yang berjudul "*Modified Families of Multi-Point Iterative Methods for Solving Nonlinear Equations*" yang bebas turunan kedua.

Pembahasan dimulai dengan memodifikasi persamaan (1), sehingga diperoleh famili metode iterasi *multi-point* pada bagian dua. Pada bagian tiga dilanjutkan dengan analisa kekonvergenan yang menunjukkan famili metode iterasi *multi-point* ini memiliki kekonvergenan orde tiga dan orde empat, serta akan diperoleh juga famili metode iterasi *multi-point* berorde empat bebas turunan kedua. Kemudian pada bagian empat dilakukan perbandingan numerik terhadap beberapa fungsi uji.

2. FAMILI METODE ITERASI *MULTI-POINT*

Metode Iterasi *Multi-Point* merupakan modifikasi dari persamaan (1). Jika turunan kedua pada persamaan (2) dimodifikasi, maka akan diperoleh famili metode iterasi *multi-point* bebas turunan kedua. Metode iterasi *multi-point* diberikan dalam famili pertama. Kemudian akan diperoleh juga modifikasi famili metode iterasi *multi-point* yang diberikan dalam famili kedua.

2.1 Famili Pertama Metode Iterasi Bebas Turunan Kedua

Misalkan

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x) + \beta f(x)}. \tag{3}$$

Ekspansikan $f(x-u)$ dengan Taylor di sekitar titik $x = x - u$ hingga suku kedua, kemudian diperoleh

$$f(x-u) - f(x) + uf'(x) = \frac{u^2}{2} f''(x). \tag{4}$$

Substitusikan u pada persamaan (3) ke persamaan (4) yang memuat suku pertama, sehingga diperoleh

$$\frac{f(x-u)(f'(x) + \beta f(x)) - \beta f^2(x)}{f'(x) + \beta f(x)} = \frac{u^2}{2} f''(x), \tag{5}$$

dari persamaan (5) dapat diambil nilai perkiraan $f''(x)$, yaitu

$$f''(x) = \left(\frac{f(x-u)(f'(x) + \beta f(x)) - \beta f^2(x)}{f'(x) + \beta f(x)} \right) \frac{2}{u^2}. \tag{6}$$

Subsitusikan u pada persamaan (3) ke persamaan (6), sehingga nilai perkiraan $f''(x)$ menjadi

$$f''(x) = 2\left(\frac{f(x-u)(f'(x) + \beta f(x))^2 - \beta f^2(x)(f'(x) + \beta f(x))}{f^2(x)} \right). \tag{7}$$

Persamaan (7) diterapkan pada modifikasi metode bertipe Chebyshev-Halley, kemudian terlebih dulu akan disubstitusikan persamaan (7) ke persamaan (2), setelah disederhanakan diperoleh

$$T_f(x) = 2\left(\frac{f(x-u)}{f(x)} - \beta^2 u^2 \right). \tag{8}$$

Jika $|u|$ cukup kecil maka suku-suku yang berpangkat dua pada persamaan (8) dapat diabaikan, sehingga nilai perkiraan $T_f(x)$ menjadi

$$T_f(x) \cong \frac{2f(x-u)}{f(x)}. \tag{9}$$

Substitusikan persamaan (9) ke persamaan (1), sehingga diperoleh

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x) + \beta f(x)} \left(1 + \frac{f(x-u)}{f(x) - 2\lambda f(x-u)} \right), \tag{10}$$

dari persamaan (10) dapat dibentuk metode iterasi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + \beta f(x_n)} \left(1 + \frac{f(x_n - u_n)}{f(x_n) - 2\lambda f(x_n - u_n)} \right). \tag{11}$$

Persamaan (11) ini merupakan famili pertama metode iterasi *multi-point*.

2.2 Kasus Khusus

Pada persamaan (10), untuk nilai λ yang berbeda diperoleh variasi keluarga metode iterasi *multi-point*, antara lain

1. Untuk $\lambda = 0$, diperoleh fungsi iterasi formula Traub (MT) [7, h.183]

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x) + \beta f(x)} - \frac{f(x-u)}{f'(x) + \beta f(x)}. \tag{12}$$

2. Untuk $\lambda = \frac{1}{2}$, diperoleh fungsi iterasi formula Newton-secant (MNs) [7, h.184]

$$\varphi(x) = x - \frac{f^2(x)}{(f'(x) + \beta f(x))(f(x) - f(x-u))}. \tag{13}$$

3. Untuk $\lambda = 1$, diperoleh fungsi iterasi formula Traub-Ostrowski (MTO) [7, h.184]

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x) + \beta f(x)} \left(\frac{f(x) - f(x-u)}{f(x) - 2f(x-u)} \right). \tag{14}$$

Formula Traub dan Newton-Secant memiliki kekonvergenan kubik sementara formula Traub-Ostrowski memiliki kekonvergenan kuartik.

2.3 Famili Kedua Metode Iterasi Bebas Turunan Kedua

Untuk memodifikasi famili metode iterasi *multi-point* ini terlebih dahulu diubah turunan kedua pada persamaan (1) dengan *backward difference* seperti

$$f''(x) \approx \frac{f'(x) - f'(x - \theta u)}{\theta u}, \tag{15}$$

dimana $0 \neq \theta \in \mathbb{R}$ dan u telah didefinisikan dalam persamaan (3). Asumsikan $|u| \ll 1$ dan selanjutnya lakukan langkah yang sama seperti pada famili pertama.

Substitusikan u pada persamaan (3), ke penyebut dari persamaan (15), sehingga diperoleh

$$f''(x) = \frac{(f'(x) - f'(x - \theta u))(f'(x) + \beta f(x))}{\theta f(x)}. \tag{16}$$

Substitusikan persamaan (16) ke persamaan (2), sehingga diperoleh

$$T_f(x) = \frac{f(x)(f'(x) - f'(x - \theta u))(f'(x) + \beta f(x)) + 2\beta\theta f(x) f'(x)}{\theta(f'(x) + \beta f(x))^2}. \tag{17}$$

Persamaan (17) dapat disubstitusikan ke persamaan (1), sehingga menjadi

$$\varphi(x) = x - u\left(1 + \frac{f'(x) - f'(x - \theta u) + 2\beta\theta f(x)}{2(\theta(f'(x) + \beta f(x)) - \lambda(f'(x) - f'(x - \theta u) + 2\beta\theta f(x)))}\right), \tag{18}$$

dengan u didefinisikan dalam persamaan (3). Sehingga dapat dibentuk metode iterasi dari persamaan (18)

$$\begin{aligned} u_n =& \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + \beta f(x_n)}, \\ m_n =& f'(x_n) - f'(x_n - \theta u_n) + 2\beta\theta f(x_n), \\ x_{n+1} =& x_n - u_n\left(1 + \frac{m_n}{2(\theta(f'(x_n) + \beta f(x_n)) - \lambda m_n)}\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Formula dari persamaan (19) adalah famili kedua metode iterasi *multi-point.* Untuk nilai-nilai tertentu dari λ dan θ, beberapa kasus diberikan oleh persamaan (18), yaitu

1. Untuk $\theta = 1$ dan $\lambda = \frac{1}{2}$, diperoleh fungsi iterasi Weerakoon dan Fernando (MWF) [8]

$$\varphi(x) = x - \frac{2f(x)}{f'(x) + f'\left(x - \dfrac{f(x)}{f'(x) + \beta f(x)}\right)} \tag{20}$$

2. Untuk $\theta = -1$ dan $\lambda = \frac{1}{2}$, diperoleh famili baru dari fungsi iterasi *multi-point* (FBM1) [5]

$$\varphi(x) = x - \frac{2f(x)}{3f'(x) - f'\left(x + \dfrac{f(x)}{f'(x) + \beta f(x)}\right)}. \tag{21}$$

3. Untuk $\theta = -\frac{1}{2}$ dan $\lambda = \frac{1}{2}$, diperoleh famili baru lainnya dari fungsi iterasi *multi-point* (FBM2) [5]

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{2f'(x) - f'\left(x + \dfrac{f(x)}{2(f'(x) + \beta f(x))}\right)}. \tag{22}$$

4. Untuk $\theta = \frac{1}{2}$ dan $\lambda = \frac{1}{2}$, diperoleh fungsi iterasi *multi-point* berorde tiga (MIM3) [7, h.164]

$$\varphi(x) = x - \frac{2f(x)}{f'\left(x - \dfrac{f(x)}{2(f'(x) + \beta f(x))}\right)}. \tag{23}$$

3. ANALISA KEKONVERGENAN FAMILI PERTAMA METODE ITERASI

3.1 Analisa Kekonvergenan

Teorema 1 [5] Misalkan $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi yang terdefinisi, kontinu dan mempunyai turunan yang cukup pada interval buka D. Jika $f(x)$ memiliki akar sederhana, katakan $r \in D$, maka untuk tebakan awal yang cukup dekat ke r, fungsi iterasi (10) akan memiliki orde konvergensi kubik untuk $\lambda \in \mathbb{R}$ dan $\beta \neq 0$, atau orde konvergensi kuartik untuk $\lambda = 1$ dan $\beta = 0$.

Bukti: Misalkan $e = x - r$, $d_n = \varphi(x) - r$, $u = u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)+\beta f(x)}$, $C_2 = \frac{f''(r)}{2f'(r)}$, $C_3 = \frac{f'''(r)}{6f'(r)}$, dan $C_4 = \frac{f''''(r)}{24f'(r)}$.

Gunakan ekspansi Taylor di sekitar $x = r$ dan $f(x) = 0$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} f(x) &= f(r) + f'(r)(x-r) + \frac{f''(r)}{2!}(x-r)^2 + \frac{f'''(r)}{3!}(x-r)^3 + \frac{f''''(r)}{4!}(x-r)^4 \\ &\quad + O\left((x-r)^5\right) \\ f(x) &= f(r) + f'(r)e + \frac{f''(r)}{2!}e^2 + \frac{f'''(r)}{3!}e^3 + \frac{f''''(r)}{4!}e^4 + O\left(e^5\right). \end{aligned} \tag{24}$$

Karena $f(r) = 0$, maka persamaan (24) dapat ditulis menjadi

$$f(x) = f'(r)\left(e + C_2e^2 + C_3e^3 + C_4e^4 + O\left(e^5\right)\right). \tag{25}$$

Selanjutnya lakukan cara yang sama untuk $f'(x)$ seperti pada langkah di atas, diperoleh

$$f'(x) = f'(r)\left(1 + 2C_2e + 3C_3e^2 + 4C_4e^3 + O\left(e^4\right)\right). \tag{26}$$

Dengan menggunakan persamaan (25) dan (26), akan diperoleh

$$\begin{aligned} f'(x) + \beta f(x) =& f'(r)\big(1 + (\beta + 2C_2)e + (\beta C_2 + 3C_3)e^2 + (\beta C_3 + 4C_4)e^3 \\ & + \beta C_4e^4 + O\left(e^5\right)\big). \end{aligned} \tag{27}$$

Substitusi persamaan (25) dan (27) ke persamaan (3) menghasilkan

$$u = \frac{e + C_2e^2 + C_3e^3 + C_4e^4 + O\left(e^5\right)}{1 + (\beta + 2C_2)e + (\beta C_2 + 3C_3)e^2 + (\beta C_3 + 4C_4)e^3 + \beta C_4e^4 + O\left(e^5\right)}. \tag{28}$$

Selanjutnya dengan menggunakan deret geometri [6, h.500], maka persamaan (28) menjadi

$$\begin{aligned} u = & e - (\beta + C_2)e^2 - \left(2C_3 - 2\beta C_2 - 2C_2^2 - \beta^2\right)e^3 - (3C_4 - 4\beta C_3 - 7C_3C_2 \\ & + 4C_2^3 + 5\beta C_2^2 + 3\beta^2 C_2 + \beta^3)e^4 + O\left(e^5\right). \end{aligned} \tag{29}$$

Oleh karena itu, dari persamaan (29) dapat dihitung $e-u$, yaitu

$$\begin{aligned} e-u =& \left(\beta+C_2\right)e^2+\left(2C_3-2\beta C_2-2C_2^2-\beta^2\right)e^3+(3C_4-4\beta C_3-7C_3C_2 \\ &+4C_2^3+5\beta C_2^2+3\beta^2C_2+\beta^3)e^4+O\left(e^5\right). \end{aligned} \tag{30}$$

Selanjutnya dilakukan ekspansi Taylor untuk $f(x-u)$ di sekitar $x-u=e-r$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} f(x-u) =& f'(r)\big(\left(\beta+C_2\right)e^2+\left(2C_3-2\beta C_2-2C_2^2-\beta^2\right)e^3+(3C_4-4\beta C_3 \\ &-7C_3C_2+4C_2^3+5\beta C_2^2+3\beta^2C_2+(\beta+C_2)^2+\beta^3)e^4 \\ &+((2C_3-2C_2^2-2\beta C_2-\beta^2)(C_2+\beta)2C_2)e^5+O\left(e^6\right)\big). \end{aligned} \tag{31}$$

Sehingga dari persamaan (31) dapat diperoleh $\frac{f(x-u)}{f(x)}$ dan $\frac{f(x-u)}{f'(x)+\beta f(x)}$ dengan melakukan langkah yang sama seperti pada persamaan (29), yaitu

$$\frac{f(x-u)}{f(x)}=\left(\beta+C_2\right)e+\left(2C_3-3\beta C_2-3C_2^2-\beta^2\right)e^2+O\left(e^3\right), \tag{32}$$

dan

$$\begin{aligned} \frac{f(x-u)}{f'(x)+\beta f(x)} =& \left(\beta+C_2\right)e^2+\left(2C_3-5\beta C_2-4C_2^2-2\beta^2\right)e^3+\big(3C_4-9\beta C_3 \\ &-14C_3C_2+20\beta C_2+12\beta^2C_2+13C_2^3+3\beta^3\big)e^4+O\left(e^5\right). \end{aligned} \tag{33}$$

Kemudian dari persamaan (10) akan dihitung $d_n=\varphi(x)-r$, sehingga didapat bentuk

$$\begin{aligned} d_n &= e-u-u\frac{f(x-u)}{f(x)-2\lambda f(x-u)} \\ d_n &= e-u-\frac{\dfrac{f(x-u)}{f'(x)+\beta f(x)}}{1-2\lambda\dfrac{f(x-u)}{f(x)}}. \end{aligned} \tag{34}$$

Substitusikan persamaan (30), (32) dan (33) ke persamaan (34), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} d_n =& \left(2(1-\lambda)C_2^2+\beta^2(1-2\lambda)+\beta(3-4\lambda)C_2\right)e^3+\big(\beta^3\left(6\lambda-2-4\lambda^2\right) \\ &+\beta\left(\lambda\left((30-12\lambda)C_2^2-8C_3\right)-15C_2^2+5C_3\right)-\beta^2(9-22\lambda \\ &+12\lambda^2)C_2+\lambda\left(14C_2^2-8C_3\right)C_2-\left(4\lambda^2+9\right)C_2^3+7C_3C_2\big)e^4 \\ &+O\left(e^5\right). \end{aligned} \tag{35}$$

Ini menunjukkan bahwa keluarga yang didefinisikan oleh persamaan (10) memiliki orde konvergensi kubik untuk setiap nilai parameter λ, yang membuktikan pernyataan pertama dan memiliki orde konvergensi kuartik untuk $\lambda=1$ dan $\beta=0$, yang membuktikan pernyataan kedua.

3.2 Famili Lain Dari Persamaan (10)

Perhatikan kembali famili persamaan (10), dengan $|\beta(x)| < +\infty$ dan u pada persamaan (3). Dikatakan bila $\beta(x) = -C_2(x) = -\frac{f''(x)}{2f'(x)}$ dari persamaan *error* (35), terlihat bahwa famili persamaan (10) sekurang-kurangnya memiliki konvergensi orde empat, yaitu, dengan diperoleh famili multi-point berorde empat

$$\varphi(x) = x - \frac{2f(x)f'(x)}{2f'^2(x) - f(x)f''(x)}\left(1 + \frac{f(x-u)}{f(x) - 2\lambda f(x-u)}\right),$$

dengan

$$u = \frac{2f(x)f'(x)}{2f'^2(x) - f(x)f''(x)}.$$

Kemudian untuk

$$\lim_{x\to r} -\frac{f'(x+f(x)) - f'(x)}{2f'(x)f(x)} = -\frac{f''(r)}{2f'(r)},$$

dan

$$u = \frac{2f(x)f'(x)}{2f'(x) - f'(x+f(x)) + f'(x)}, \tag{36}$$

diperoleh famili berorde empat bebas turunan kedua seperti

$$\varphi(x) = x - u\left(1 + \frac{f(x-u)}{f(x) - 2\lambda f(x-u)}\right), \tag{37}$$

dengan u diberikan pada persamaan (36), dan keluarga pada persamaan (37) dapat menggunakan $|\beta(x)|$ berbeda yang memenuhi

$$\lim_{x\to r} \beta(x) = -\frac{f''(r)}{2f'(r)},$$

untuk membangun famili yang berbeda dari formula iterasi kekonvergenan orde empat, tetapi formula ini tidak akan bekerja di $f'(x) = 0$.

4. PERBANDINGAN NUMERIK

Pada sub ini ditemukan perbandingan numerik untuk fungsi berikut:

$f_1(x) = (x-1)^3 - 1$	r=2.0000000000000000
$f_2(x) = \cos(x) - x$	r=0.7390851332151607
$f_3(x) = e^{x^2+7x-30} - 1$	r=3.0000000000000000
$f_4(x) = x^3 + 4x^2 - 10$	r=1.3652300134140969

Perbandingan numerik diperoleh dengan menggunakan metode Traub (MT) pada persamaan (12), metode Newton-Secant (MNS) pada persamaan (13), metode Traub-Ostrowski (MTO) pada persamaan (14), metode Weerakoon dan Fernando (MWF) pada persamaan (20), famili baru metode iterasi *multi-point* 1 (FBM1) pada persamaan (21), famili baru metode iterasi *multi-point* 2 (FBM2) pada persamaan (22), dan metode iterasi multi-point berorde tiga (MIM3) pada persamaan (23) untuk menyelesaikan persamaan nonlinear dari fungsi yang diberikan. Pada percobaan numerik, untuk menghitung *error* diambil toleransi 1.0×10^{-15} dengan maksimum iterasi 100, dan hasil perhitungan dari fungsi diberikan dalam Tabel 1. Formula disini diuji dengan $|\beta| = 1$.

Tabel 1: Perbandingan Jumlah Iterasi

f_i	x_0	Jumlah Iterasi (n)						
		MT	MNS	MTO	MWF	FBM1	FBM2	MIM3
f_1	0	5	4	100+	5	12	14	5
	1.1	4	3	3	4	6	12	4
	3	5	5	100+	5	4	5	5
f_2	-1	4	4	100+	4	15	100+	4
	0	4	4	5	4	4	4	4
	2	5	4	100+	3	4	4	4
f_3	2.8	100+	9	4	17	6	6	6
	3.5	9	8	5	8	5	5	9
	4	14	13	8	13	6	9	12
f_4	0.1	4	5	100+	4	5	5	5
	1	3	3	4	3	3	3	3
	2	4	4	5	4	4	4	4

Keterangan untuk Tabel 1 yaitu, f_i menyatakan fungsi, x_0 menyatakan tebakan awal, dan 100+ menyatakan bahwa proses melebihi maksimum iterasi sehingga metode divergen. Sedangkan untuk programnya dapat dilihat pada Lampiran 8-14.

Pada Tabel 1 dapat dilihat bahwa untuk f_1 dengan $x_0 = 0$ MTO divergen, sedangkan MNS memiliki iterasi paling sedikit, $n = 4$, akan tetapi pada $x_0 = 1.1$, MNS dan MTO memiliki iterasi paling sedikit, $n = 3$. Selanjutnya pada f_2, MTO divergen di $x_0 = -1$ dan $x_0 = 2$, sedangkan FBM1 memiliki iterasi paling banyak, dengan $n = 15$, dan FBM2 divergen di $x_0 = -1$. Kemudian untuk f_3 dengan $x_0 = 2.8$, MT divergen, sedangkan MTO memiliki iterasi paling sedikit, dengan $n = 4$. Dan untuk f_4, MTO divergen di $x_0 = 0.1$.

Ucapan Terimakasih Penulis mengucapkan terima kasih kepada Dr. Imran M., M.Sc yang telah memberikan arahan dan bimbingan penulisan skripsi penulis yang menjadi acuan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bartle, R. G. & Sherbert, D. R. 2011. *Introduction to Real Analysis, 4th Edition*. John Wiley & Sons, Inc., New York.

[2] Burden, R. L. & Faires, J. D. 2011. *Numerical Analysis, 9th Edition*. Brooks Cole, Boston, Massachusetts.

[3] Jiseng, K., Yitian, L. & Xiuhua, W. 2006. Modified Halley's Method Free From Second Derivative. *Applied Mathematics Computations*, **183**: 703–708.

[4] Kanwar, V., & Tomar, S. K. 2007. Modified Families of Newton, Halley and Chebyshev Method. *Applied Mathematics and Computation*, **192**: 20–26.

[5] Kanwar, V., & Tomar, S. K. 2007. Modified Families of Multi-Point Iterative Methods for Solving Nonlinear Equation. *Numerical Algorithms*, **44**: 381–389.

[6] Stewart, J. 2003. *Kalkulus Edisi 5 Buku 2*. Terjemahan dari $Calculus, 5^{th} Edition$, oleh Sungkono. C. Salemba Teknika, Jakarta.

[7] Traub, J. F. 1964. *Iterative Methods for The Solution of Equations*. Prentice-Hall, & Inc., Englewood Cliffs.

[8] Weerakoon, S., & Fernando, T. G. I. 2000. A Variant of Newton's Method with Accelerated Third-Order Convergence. *Applied Mathematics Letters*, **13**: 87-93.