METODE ITERASI AOR UNTUK SISTEM PERSAMAAN LINEAR PREKONDISI

Siswanti[1*], **Syamsudhuha**[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*siswanti_2@yahoo.co.id

ABSTRACT

This article discusses the preconditioner to solve a system of linear equations $Ax = b$, with A in the form $\mathcal{L}$-*matrix*, which is a review of articles DJ Evans, *et al.* [Journal of Computational and Applied Mathematics, 132: 461-466 (2001)]. Analytically we show that the spectral radius of the iteration matrix of the preconditioned AOR method is smaller than the spectral radius of the iteration matrix of a standard AOR method. The analytical results are supported by numerical computations where it appears that the preconditioned AOR method gives fewer number of iterations compare to the standard AOR method in solving given systems of linear equations $Ax = b$.

Keywords: *Preconditioned methods, AOR methods, spectral radius.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas prekondisi untuk menyelesaikan sistem persamaan linear $Ax = b$, dengan A berbentuk $\mathcal{L}$-*matrix*, yang merupakan review dari artikel D. J. Evans, *et al.*[Journal of Computational and Applied Mathematics, 132:461-466 (2001)]. Secara analitik ditunjukkan bahwa spektral radius matriks iterasi metode AOR prekondisi lebih kecil dari matrik iterasi metode AOR standar. Hasil analitik ini didukung oleh komputasi dimana terlihat bahwa metode AOR prekondisi yang didiskusikan memberikan iterasi yang lebih sedikit dibanding metode AOR standar dalam menyelesaikan sistem persamaan linear $Ax = b$ untuk kasus yang diberikan.

Kata kunci: *Metode prekondisi, metode AOR, spektral radius.*

1. PENDAHULUAN

Sistem persamaan linear (SPL) dalam bentuk matrik dapat ditulis

$$Ax = b, \tag{1}$$

dimana $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dan $x, b \in \mathbb{R}^n$. Matrik A di persamaan (1) diasumsikan merupakan $\mathcal{L}$-*matrix* dan sparse yang diagonal utamanya adalah 1. Solusi sistem persamaan linear (1) dapat diperoleh dengan menggunakan metode iterasi AOR. Tetapi, kelemahan dari metode iterasi AOR adalah konvergensinya yang lambat. Pada artikel ini didiskusikan prekondisi untuk mempercepat kekonvergenan metode iterasi AOR untuk kasus sistem dengan matriks koefisien berbentuk $\mathcal{L}$-*matrix*.

Adapun struktur penulisan artikel ini adalah di bagian dua dibahas metode iterasi dasar dan metode AOR, kemudian di bagian tiga membahas metode AOR prekondisi dan analisis kekonvergenannya. Selanjutnya dilakukan uji komputasi menggunakan program Matlab 7.10.0 untuk melihat keunggulan metode yang didiskusikan.

2. METODE ITERASI AOR

2.1 Metode Iterasi Dasar

Pandang kembali SPL persamaan (1) dengan A adalah matrik nonsingular dan semua elemen diagonalnya tidak nol. Matrik A dapat dipisah (*splitting*) menjadi $A = M - N$, dengan M adalah matrik nonsingular.

$$(M - N)x = b,$$

$$Mx = Nx + b.$$

Karena M adalah matrik nonsingular, maka M memiliki invers, sehingga

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b. \tag{2}$$

Matrik $M^{-1}N$ disebut matrik iterasi. Persamaan (2) disebut dengan metode iterasi dasar.

2.2 Metode Iterasi AOR

Pada metode AOR, matrik A pada persamaan (1) juga dapat dipisah menjadi

$$A = I - L - U, \tag{3}$$

dimana

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

dengan I adalah matrik identitas, L adalah *strictly lower triangular* dari matrik A, dan U adalah *strictly upper triangular* dari matrik A. Kalikan parameter ω ke persamaan (1)

$$\omega Ax = \omega b. \tag{4}$$

Kemudian substitusikan persamaan (3) ke persamaan (4) diperoleh

$$\begin{aligned} \omega Ax &= \omega b, \\ \omega(I - L - U)x &= \omega b, \\ \omega Ix - \omega Lx - \omega Ux &= \omega b. \end{aligned} \tag{5}$$

Persamaan (5) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \big((I - rL) - \big((1-\omega)I + (\omega - r)L + \omega U\big)\big)x &= \omega b, \\ (I - rL)x &= \big((1-\omega)I + (\omega - r)L + \omega U\big)x + \omega b. \end{aligned} \tag{6}$$

Selanjutnya metode iterasi dasar (2) dapat ditulis menjadi

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}(\omega b),$$

dengan $M = (I - rL)$ dan $N = \big((1-\omega)I + (\omega - r)L + \omega U\big)$, atau

$$x^{(k+1)} = (I - rL)^{-1}\big((1-\omega)I + (\omega - r)L + \omega U\big)x^{(k)} + (I - rL)^{-1}\omega b, \tag{7}$$

dengan $0 < r < \omega < 1$ [1], $x^{(0)}$ diberikan. Jadi matrik iterasi metode AOR dapat juga ditulis menjadi

$$\mathbb{L}_{r,\omega} = (I - rL)^{-1}\big((1-\omega)I + (\omega - r)L + \omega U\big). \tag{8}$$

Pada persamaan (7), dapat diperoleh solusi ke-k dengan mengambil tebakan awal, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ yaitu

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} - (\omega - r)\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \omega \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} - r\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \omega b_i,$$

untuk setiap $i, j = 1, 2, \ldots, n$ dan $k = 0, 1, \ldots$.

Definisi 1 (*Metode Prekondisi*) [2, h. 182]
Misalkan $Ax = b$ adalah SPL. Matrik P yang dapat dengan mudah untuk diinverskan sedemikian hingga $cond_2(P^{-1}A)$ lebih kecil dari $cond_2(A)$ dinamakan matrik prekondisi dari A. Selanjutnya sistem $P^{-1}Ax = P^{-1}b$ dinamakan sistem prekondisi.

Definisi 2 ($\mathcal{L}$*-matrix*) [1, h. 463]

Matrik A adalah $\mathcal{L}$-*matrix* jika $a_{ii} > 0$, dan $a_{ij} \leq 0$, untuk semua $i, j = 1, 2, \ldots, n$ sehingga $i \neq j$.

3. METODE AOR PREKONDISI UNTUK MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Pandang sistem persamaan linear persamaan (1) untuk matrik A adalah $\mathcal{L}$-*matrix*, dengan semua diagonal utamanya adalah satu. Pada tahun 2001, D. J. Evans *et al.*[1] menggunakan prekondisi

$$P = I + S, \tag{9}$$

dimana

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{dan} \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Pada SPL (1), asumsikan bahwa $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ adalah $\mathcal{L}$-*matrix* yang nonsingular yaitu $a_{ij} \leq 0$ untuk $i \neq j$ dan semua diagonal utamanya adalah satu. Matrik A dapat dipisah menjadi $A = I - L - U$. Selanjutnya dengan mengalikan matrik prekondisi P di persamaan (9) pada kedua ruas di SPL (1) diperoleh

$$PAx = Pb,$$

atau dapat juga ditulis

$$\widetilde{A}x = \widetilde{b},$$

dimana

$$\begin{aligned} \widetilde{A} &= (I + S)A, \\ \widetilde{b} &= (I + S)b. \end{aligned} \tag{10}$$

Dari sini maka matrik iterasi pada persamaan (8) menjadi

$$\widetilde{\mathbb{L}}_{r,\omega} = (\widetilde{I} - r\widetilde{L})^{-1}\big((1-\omega)\widetilde{I} + (\omega - r)\widetilde{L} + \omega\widetilde{U}\big). \tag{11}$$

Persamaan (11) equivalen dengan

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} - (\omega - r)\sum_{j=1}^{i-1}\tilde{a}_{ij}x_j^{(k)} - \omega\sum_{j=i+1}^{n}\tilde{a}_{ij}x_j^{(k)} - r\sum_{j=1}^{i-1}\tilde{a}_{ij}x_j^{(k+1)} + \omega\tilde{b}_i,$$

untuk setiap $i, j = 1, 2, \ldots, n$ dan $k = 0, 1, \ldots$, dimana $\tilde{a}_{ij}$ adalah elemen dari matrik $\widetilde{A}$ dan $\tilde{b}_i$ adalah elemen dari matrik $\widetilde{b}$.

4. ANALISA KEKONVERGENAN

Teorema 3 Misalkan $\mathbb{L}_{r,\omega}$ dan $\widetilde{\mathbb{L}}_{r,\omega}$ adalah matrik iterasi dari masing-masing metode AOR yang ditunjukkan pada persamaan (8) dan persamaan (11). Jika matrik A dari persamaan (1) adalah $\mathcal{L}$-*matrix* dengan $0 < a_{ii+1}a_{i+1i}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ dan $0 < a_{1n}a_{n1} < 1$, $\rho(\mathbb{L}_{r,\omega}) < 1$, dan $0 \le r \le \omega \le 1$, $\omega \neq 0$, $r \neq 1$ maka

$$\rho(\widetilde{\mathbb{L}}_{r,\omega}) < \rho(\mathbb{L}_{r,\omega}) < 1.$$

Bukti. Misalkan $\mathbb{L}_{r,\omega}$ dan $\widetilde{\mathbb{L}}_{r,\omega}$ adalah matrik *nonnegative* dan *irreducible*. Kemudian diberikan vektor positif x, maka

$$\mathbb{L}_{r,\omega}x = \lambda x,$$

dimana $\lambda = \rho(\mathbb{L}_{r,\omega})$ atau equivalen dengan

$$\big((1-\omega)I + (\omega - r)L + \omega U\big)x = \lambda(I - rL)x, \tag{12}$$

oleh karena itu,

$$\widetilde{\mathbb{L}}_{r,\omega}x - \lambda x = (\widetilde{D} - r\widetilde{L})^{-1}\big((1-\omega)\widetilde{D} + (\omega - r)\widetilde{L} + \omega\widetilde{U} - \lambda(\widetilde{D} - r\widetilde{L})\big)x,$$

dari persamaan (10) dan persamaan (12), maka

$$\omega\widetilde{U}x = \omega Ux = (\lambda - 1 + \omega)x + (r - \omega - \lambda r)Lx,$$

dan

$$\begin{aligned}\lambda(\widetilde{D} - r\widetilde{L})x =& \lambda(1-r)\widetilde{D}x + \lambda r(\widetilde{D} - \widetilde{L})x\\ \lambda(\widetilde{D} - r\widetilde{L})x =& \lambda(1-r)\widetilde{D}x + \lambda r(I + S - L - SU)x,\end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{L}}_{r,\omega}x - \lambda x =& (\widetilde{D} - r\widetilde{L})^{-1}\big((1 - \omega - \lambda + \lambda r)\widetilde{D} + \lambda(I - rL) - (1-\omega)I\\ &+ (\omega - r)(\widetilde{L} - L) - \lambda r(I + S - L - SU)\big)x,\end{aligned}$$

atau dapat ditulis menjadi

$$\widetilde{\mathbb{L}}_{r,\omega}x - \lambda x = (\widetilde{D} - r\widetilde{L})^{-1}\big((1-\lambda)(1-r)(\widetilde{D} - I) + (\omega - r + \lambda r)(SU - S)\big)x.$$

Pada persamaan (12), dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{L}}_{r,\omega}x - \lambda x =& (\widetilde{D} - r\widetilde{L})^{-1}(1-\lambda)(1-r)(\widetilde{D} - I) - (\omega - r + \lambda r)S + r(\lambda - 1)SU\\ &+ S\big(\lambda(I - rL) - (1-\omega)I - (\omega - r)L\big)x,\end{aligned}$$

atau equivalen dengan

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{L}}_{r,\omega}x - \lambda x =& (\widetilde{D} - r\widetilde{L})^{-1}\big((1-\lambda)(1-r)(\widetilde{D} - I) - (1-r)(1-\lambda)S + r(\lambda - 1)SU\\ &+ (r - \omega - \lambda r)SL\big)x,\end{aligned}$$

jika $Z = \widetilde{\mathbb{L}}_{r,\omega}x - \lambda x$ dan $\lambda < 1$, maka $Z \le 0$. Kemudian dengan menggunakan Teorema 2 dari [4] diperoleh $\rho(\widetilde{\mathbb{L}}_{r,\omega}) < \rho(\mathbb{L}_{r,\omega}) < 1$. $\square$

5. PERBANDINGAN NUMERIK

Contoh 1. Tentukan solusi dari SPL berikut dengan menggunakan metode AOR dan metode AOR prekondisi

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\
0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}
$$

Solusi. Dalam menyelesaikan SPL pada Contoh 1 dengan menggunakan metode AOR, maka algoritma AOR dapat diimplementasikan dengan menggunakan program Matlab 7.10.0. Hasil komputasi dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1: Perbandingan Banyak Iterasi dan Spektral Radius dari Metode AOR dan Metode AOR Prekondisi (AORP)

r	ω	AOR		AORP	
		Iterasi	$\rho(\mathbb{L}_{rw})$	Iterasi	$\rho(\widetilde{\mathbb{L}}_{rw})$
0.5	0.6	58	0.4027	57	0.4000
0.6	0.7	46	0.3022	45	0.3000
0.65	0.8	38	0.2279	38	0.2260
0.7	0.8	37	0.2011	36	0.2000
0.8	0.9	30	0.3009	29	0.2832
0.75	0.95	29	0.4769	28	0.4544

Pada Tabel 1, menunjukkan perbandingan banyak iterasi dan spektral radius dari metode AOR dan metode AOR prekondisi. Terlihat bahwa dengan menggunakan metode AOR, pada parameter $r = 0.5$ dan $\omega = 0.6$ diperoleh banyak iterasi 58 dan $\rho(\mathbb{L}_{rw}) = 0.4027$, sedangkan pada metode AOR prekondisi diperoleh banyak iterasi 57 dan $\rho(\widetilde{\mathbb{L}}_{rw}) = 0.4000$. Pada parameter $r = 0.75$ dan $\omega = 0.95$, dengan menggunakan metode AOR diperoleh banyak iterasi 29 dan $\rho(\mathbb{L}_{rw}) = 0.4769$, sedangkan pada metode AOR prekondisi diperoleh banyak iterasi 28 dan $\rho(\widetilde{\mathbb{L}}_{rw}) = 0.4544$. Kesimpulannya adalah dengan menggunakan parameter yang berbeda-beda, dimana nilai r dan ω yang semakin besar maka diperoleh iterasi metode AOR yang lebih sedikit dibandingkan dengan metode AOR prekondisi.

Contoh 2. Tentukan solusi numerik untuk masalah nilai batas persamaan poisson [3, h. 717]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4, \quad 0 < x < 1, 0 < y < 2, \tag{13}$$

dengan syarat batas

$$u(x,0) = x^2, \quad u(x,2) = (x-2)^2, \quad 0 \leq x \leq 1,$$
$$u(0,y) = y^2, \quad u(1,y) = (y-1)^2, \quad 0 \leq y \leq 2,$$

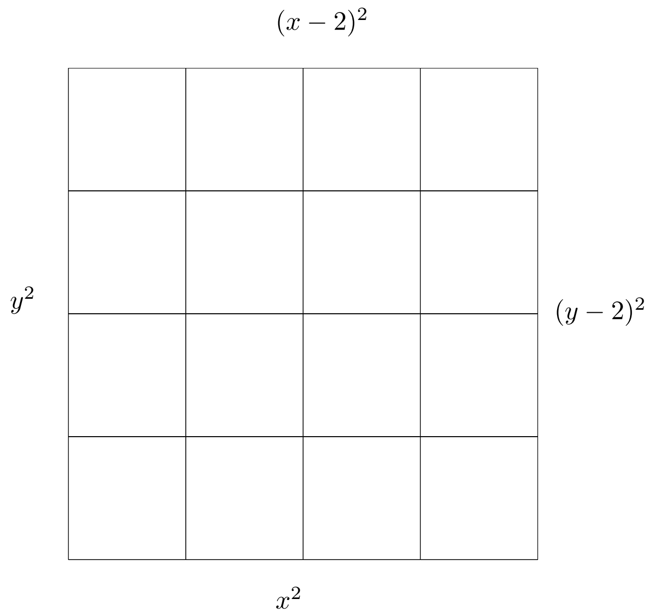
dan nilai eksak $u(x,y) = (x-y)^2$.

Solusi. Dengan menggunakan diskritisasi metode *finite difference* [3, h. 717] maka diperoleh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{h^2} \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{p^2}, \tag{15}$$

dimana $w_{i.j} \approx u(x_i, y_j)$. Gambar 1 adalah domain dari persoalan poisson. Se-



Gambar 1: Domain dari persoalan poisson

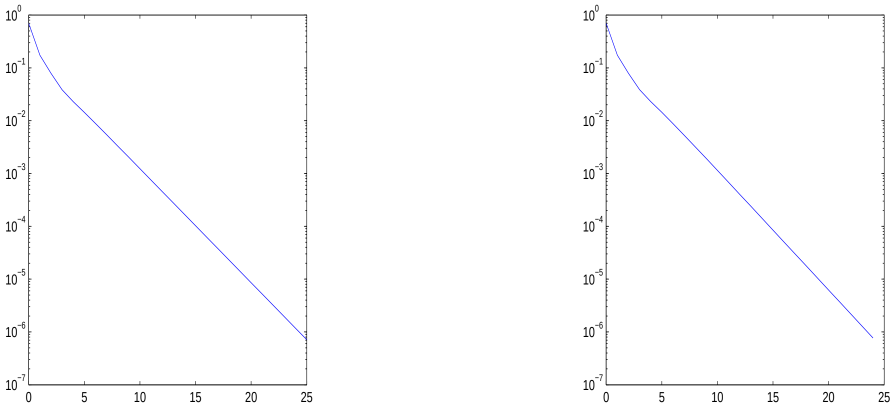
lanjutnya, dengan mensubstitusikan persamaan (14) dan persamaan (15) terhadap persamaan (13) maka diperoleh

$$-p^2 w_{i-1,j} + 2(p^2 + h^2) w_{i,j} - p^2 w_{i+1,j} - h^2 w_{i,j-1} - h^2 w_{i,j+1} = -4h^2 p^2, \tag{16}$$

untuk $i = 1, 2, 3$ dan $j = 1, 2, 3$, dengan $h = \frac{1}{4}$ dan $p = \frac{1}{2}$. Untuk $n = 4$ bentuk matrik untuk persamaan (16) dapat ditulis

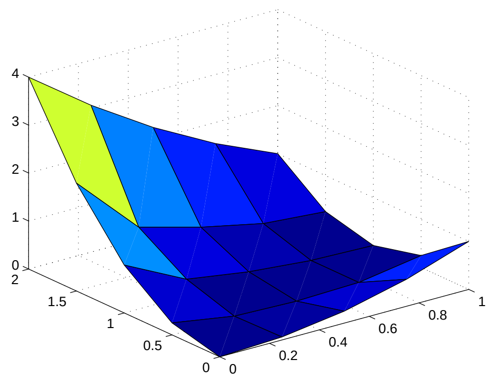
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \\ W_6 \\ W_7 \\ W_8 \\ W_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{160} \\ \frac{9}{160} \\ -\frac{1}{10} \\ \frac{177}{160} \\ \frac{5}{32} \\ \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} \\ -\frac{3}{40} \end{bmatrix}$$

(a) **(b)**



Gambar 2: Grafik kekonvergenan sebelum prekondisi **(a)** dan setelah prekondisi **(b)** untuk matrik ordo 9×9 pada parameter $r = 0.75$ dan $\omega = 0.95$

.



Gambar 3: Grafik Solusi dari Persoalan Poisson matrik ordo 9×9 pada parameter $r = 0.75$ dan $\omega = 0.95$

.

Tabel 2: Perbandingan Banyak Iterasi dan Spektral Radius dari Metode AOR dan Metode AOR Prekondisi (AORP) Contoh 2

Ukuran matrik	r	ω	AOR		AORP	
			Iterasi	$\rho(\mathbb{L}_{rw})$	Iterasi	$\rho(\widetilde{\mathbb{L}}_{rw})$
9×9	0.65	0.80	33	0.2278	32	0.2270
	0.70	0.80	32	0.2000	31	0.2000
	0.80	0.90	26	0.2835	25	0.2655
	0.75	0.95	25	0.4581	24	0.4377
49×49	0.65	0.80	104	0.2727	104	0.2724
	0.70	0.80	100	0.2116	100	0.2113
	0.80	0.90	83	0.5386	83	0.5382
	0.75	0.95	81	0.7276	81	0.7271
225×225	0.65	0.80	296	0.3293	296	0.3293
	0.70	0.80	287	0.2737	287	0.2737
	0.80	0.90	238	0.6168	238	0.6167
	0.75	0.95	233	0.8084	233	0.8084
961×961	0.65	0.80	707	0.3441	707	0.3441
	0.70	0.80	687	0.2899	687	0.2899
	0.80	0.90	574	0.6373	574	0.6373
	0.75	0.95	561	0.8295	561	0.8295

Pada Tabel 2, dapat dilihat bahwa $\rho(\widetilde{\mathbb{L}}_{r,\omega}) < \rho(\mathbb{L}_{r,\omega})$ pada saat $\rho(\mathbb{L}_{r,\omega}) < 1$, dimana menunjukkan bahwa semakin besar nilai parameter r dan ω maka banyak iterasinya semakin berkurang dan spektral radiusnya semakin kecil untuk ukuran matrik tertentu. Tabel 2 menunjukkan perbandingan banyak iterasi dan spektral radius berdasarkan matrik iterasi AOR dengan parameter r dan ω yang berbeda untuk persoalan poisson pada persamaan (13).

Berdasarkan Tabel 2, untuk matrik ordo 9×9, untuk parameter yang berbeda-beda dimana $0 < r < \omega < 1$, matrik prekondisi tidak memberikan pengaruh yang signifikan terhadap spektral radius dan jumlah iterasi yang diperoleh hanya berbeda 1 iterasi. Selanjutnya untuk matrik ordo 49×49, 225×225, dan 961×961, dapat dilihat bahwa tidak ada perubahan antara spektral radius dan jumlah iterasinya. Hal ini dikarenakan matrik prekondisi yang kurang bagus.

Ini artinya untuk kasus tertentu, tidak selalu metode AOR prekondisi dapat konvergen lebih cepat ke solusi SPL. Sehingga dapat disimpulkan bahwa metode AOR prekondisi relatif lebih unggul daripada metode AOR untuk kasus tertentu saja. Dengan demikian pengaruh matrik prekondisi untuk mempercepat konvergensi pada metode AOR tidak terlalu signifikan.

UCAPAN TERIMA KASIH

Ungkapan terima kasih penulis ucapkan kepada Bapak Supriadi Putra, M.Si. Selaku dosen pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan tenaga dalam memberikan bimbingan, arahan, dorongan dan kesabaran dalam membimbing penulis menyelesaikan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Evans, D. J., Martins, M. M., & Trigo, M. E. 2001. The AOR Iterative Method for New Preconditioned Linear System. *Journal of Computational Applied Math*, 132, 461-466.

[2] Alleire, G, Kaber, S. M. 2008. *Numerical Linear Algebra*. Springer. New York.

[3] Burden, R. L & Faires, J. D. 2001. *Numerical Analysis*, 9^{th} *Ed.* Brooks Cole, Boston

[4] Li, C & Evans, D. J. 1994. Improving the SOR method. *Journal of Computational Applied Math*, 54, 207-213.