METODE RELAKSASI NEWTON DAN KELAKUAN DINAMIKNYA

Yuniza[1*], Leli Deswita[2], Asmara Karma[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Laboratorium Matematika Terapan, Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*yu.niza@yahoo.com

ABSTRACT

We discuss a relaxation of Newton method, obtained by introducing a function composed of the original function in an existing problem and its derivative. This methods consists of two parameters. Certain values of the parameters give several known iterative methods. Using Taylor expansion, we show that the method is of order two. We compare the relaxation of Newton method with other known existing methods using some test functions by looking at the number of the methods obtaining the roots of the problem and using Basins of Attraction.

Keywords: *iterative methods, order of convergence, relaxation of Newton method, Basins of Attraction.*

ABSTRAK

Didiskusikan metode relaksasi Newton, yang diperoleh dengan memperkenalkan suatu fungsi yang merupakan perkalian fungsi asal dengan turunannya dengan yang ada pada metode Newton. Metode yang diperoleh ini mempunyai dua parameter. Pemilihan nilai parameter tertentu menghasilkan metode iterasi yang sudah dikenal. Selanjutnya dengan menggunakan ekspansi Taylor ditunjukkan bahwa orde kekonvergenan metode ini adalah dua. Kemudian dilakukan perbandingan metode relaksasi Newton dengan beberapa metode iterasi sekelas yang dikenal, dengan melihat jumlah iterasi yang diperlukan untuk mendapatkan akar sejumlah fungsi uji, dan melalui *Basins of Attraction*.

Kata kunci: *metode iterasi, orde konvergensi, metode relaksasi Newton, Basins of attraction.*

1. PENDAHULUAN

Persamaan nonlinear banyak ditemui di berbagai bidang ilmu, di antaranya bidang ekonomi, reaksi kimia, kelistrikan, dan bidang sains lainnya. Persamaan nonlinear, $f(x) = 0$, dapat diselesaikan dengan metode analitik dan metode numerik. Akan tetapi terkadang metode analitik tidak tersedia untuk persamaan nonlinear tertentu, sehingga membuka peluang untuk mengembangkan riset matematika di bidang numerik untuk mendapatkan metode yang dapat digunakan untuk mendapatkan solusi aproksimasi sampai ketelitian tertentu.

Metode numerik yang paling populer digunakan untuk mencari solusi dari persamaan nonlinear adalah metode Newton[3, h.55-56] yang konvergen kuadratik [1, h. 62] dan bentuk iterasinya diberikan oleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f'(x_n) \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Pada artikel ini metode Newton dimodifikasi dengan menerapkan metode Newton untuk fungsi

$$g(x) = (f(x))^a (f'(x))^b,$$

dengan a dan b adalah parameter. Pembahasan ini merupakan kajian ulang dari tulisan H. Susanto dan N. Karjanto dalam artikelnya yang berjudul "*Newton's Method's Basins of Attraction Revisited*" [4].

Pembahasan dimulai dengan menurunkan metode relaksasi Newton dan menunjukkan orde kekonvergenannya di bagian dua. Dibagian tiga diberikan perbandingan komputasi dengan melihat jumlah iterasi yang diperlukan untuk mendapatkan akar dari fungsi uji yang diberikan dan perbandingan melalui *Basins of Attraction*.

2. PENURUNAN METODE RELAKSASI NEWTON DAN KEKONVERGENANNYA

Metode Newton untuk mencari akar persamaan nonlinear $f(x) = 0$ dengan tebakan awal x_0 mempunyai bentuk persamaan iterasi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, 2, ... \tag{1}$$

Perhatikan bahwa jika (x^*) adalah akar dari $f(x) = 0$, maka dengan mendefinisikan

$$g(x) = (f(x))^a (f'(x))^b, \tag{2}$$

akar dari $g(x) = 0$ juga merupakan akar dari $f(x) = 0$.

Selanjutnya akan digunakan metode Newton untuk mencari akar dari $g(x) = 0$. Dengan menurunkan fungsi (2) terhadap x diperoleh

$$g'(x) = a(f(x))^{a-1}(f'(x))^{b+1} + b(f'(x))^{b-1} f''(x) f(x)^a. \tag{3}$$

Kemudian dengan membentuk metode Newton dengan menggunakan persamaan (2) dan (3) diperoleh setelah penyederhanaan metode relaksasi Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) f'(x_n)}{a(f'(x_n))^2 + b f(x_n) f''(x_n)}. \tag{4}$$

Metode iterasi (4) adalah metode Newton ketika $a = 1$, $b = 0$ dan merupakan metode Halley ketika $a = 1$, $b = -1/2$, yang konvergen secara kubik[6, h.86].

Teorema 1 [4] Misalkan $x^* \in I$ adalah suatu akar sederhana dari suatu fungsi cukup terdiferensialkan $f : I \to \mathbb{R}$ untuk suatu interval terbuka I. Untuk $a \neq 1$, metode iterasi (4) memiliki orde konvergensi satu. Untuk $a = 1$ dan $b \neq -1/2$, metode iterasi (4) memiliki orde konvergensi dua dan memenuhi persamaan *error*

$$e_{n+1} = b_{32}e_n^2 + O(e_n^3), \tag{5}$$

dengan $e_n = x_n - x^*$ dan $b_{32} = (\frac{1}{2} + b)\dfrac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$.

Bukti. Misalkan x^* adalah akar sederhana dari f. Pertimbangkan fungsi iterasi F yang didefinisikan oleh

$$F(x) = x - \frac{f(x)f'(x)}{a(f'(x))^2 + bf(x)f''(x)}. \tag{6}$$

Karena $f(x^*) = 0$ maka diperoleh

$$F(x^*) = x^*, \tag{7}$$

sedangkan untuk $F'(x^*)$ diperoleh

$$F'(x^*) = 1 - \frac{1}{a}, \tag{8}$$

dan untuk $F''(x^*)$ diperoleh

$$F''(x^*) = \frac{(a + 2b)f''(x^*)}{a^2f'(x^*)}. \tag{9}$$

Selanjutnya ekspansi Taylor $F(x_n)$ di sekitar $x = x^*$[2, p. 188], dan menyatakan $e_n = x_n - x^*$ diperoleh

$$x_{n+1} = F(x^*) + F'(x^*)e_n + \frac{F''(x^*)}{2!}e_n^2 + O(e_n^3). \tag{10}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (7)–(9) ke (10) diperoleh

$$x_{n+1} = x^* + (1 - \frac{1}{a})e_n + \frac{(a + 2b)f''(x^*)}{2a^2f'(x^*)}e_n^2 + O(e_n^3). \tag{11}$$

Jadi dari persamaan (11), jelas bahwa jika $a \neq 1$ maka metode relaksasi Newton berorde konvergensi linear.

Selanjutnya jika $a = 1$, dari persamaan (11) didapat

$$x_{n+1} = x^* + (\frac{1}{2} + b)\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}e_n^2 + O(e_n^3), \tag{12}$$

sehingga persamaan (5) dipenuhi[5, h.77]. □

3. PERBANDINGAN KOMPUTASI

Pada bagian ini dilakukan perbandingan komputasi yang bertujuan untuk membandingkan jumlah iterasi dari Metode Newton (MN) , Metode Halley (MH), dan Metode Relaksasi Newton (MRN) dalam menemukan akar pendekatan dari persamaan nonlinear. Persamaan nonlinear yang digunakan dalam perbandingan adalah:

$f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10$
$f_2(x) = x^3 - cos(x)$
$f_3(x) = x^7 - 1$
$f_4(x) = x^4 + 7x^2 - 8$

Perbandingan keempat contoh di atas menggunakan program Matlab R2010a dengan kriteria pemberhentian adalah jika $|f'(x_n)| < tol$, maka metode gagal diterapkan, jika $|f(x_{n+1})| \leq tol$ atau $|x_{n+1} - x_n| < tol$, maka program sukses dan jika $n > maxit$, metode gagal setelah maksimum iterasi. Jumlah iterasi maksimum adalah 100. Tabel 1 merupakan perbandingan komputasi (jumlah iterasi) dari tiga metode yang berbeda.

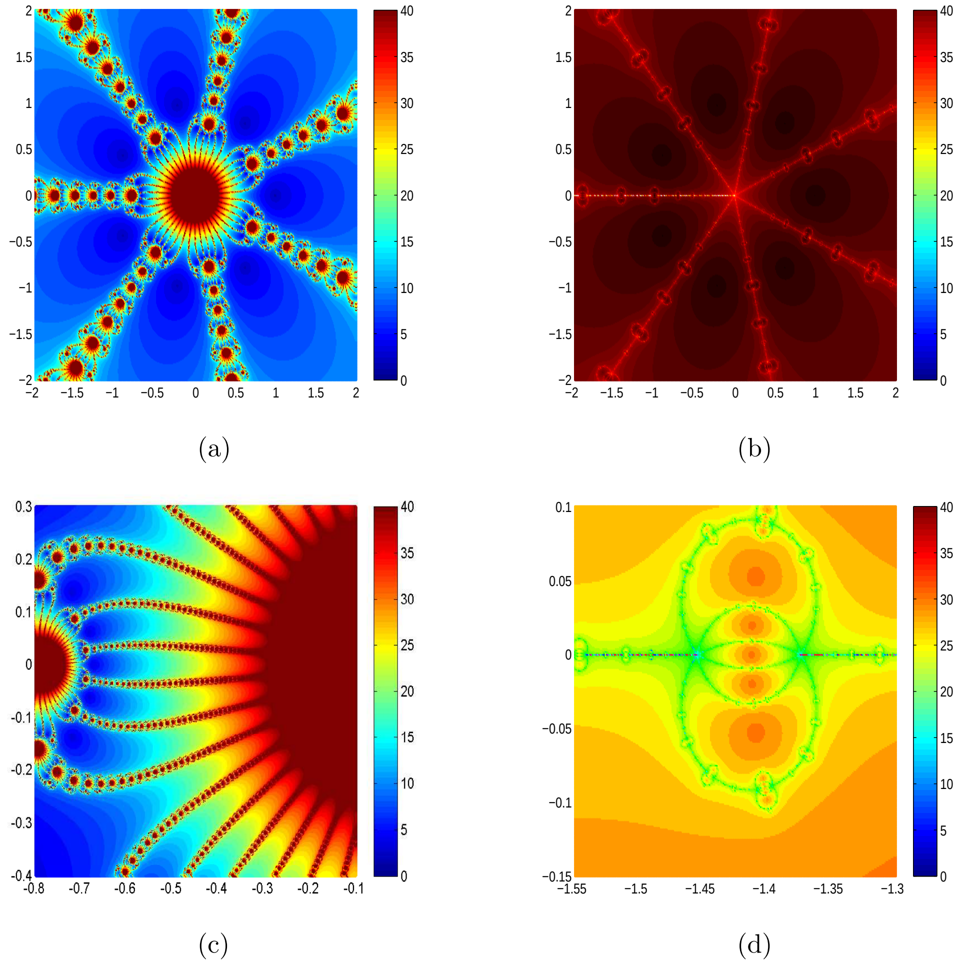
Tabel 1: Jumlah Iterasi dari Beberapa Metode Iterasi

a	b	f_i	x_0	Metode	n	x_n	$\|x_n - x_{n-1}\|$
1	-1.0	1	0.5	MN	7	1.365230013414097	$8.2157e-015$
				MH	4	1.365230013414097	$2.1300e-008$
				MRN	6	1.365230013414097	$4.6291e-009$
1	-0.3	2	1.5	MN	6	0.865474033101614	$9.0061e-013$
				MH	4	0.865474033101614	$3.1958e-012$
				MRN	5	0.865474033101614	$1.3301e-010$
1	-0.1	3	2.5	MN	11	1.000000000000000	$1.1999e-012$
				MH	6	1.000000000000000	$4.2634e-007$
				MRN	10	1.000000000000000	$2.1314e-010$
1	-0.1	4	0.6	MN	6	1.000000000000000	$2.2204e-015$
				MH	4	1.000000000000000	$3.3307e-016$
				MRN	5	1.000000000000000	$6.2753e-010$

Secara keseluruhan berdasarkan Tabel 1, dalam hal jumlah iterasi dari Metode Newton (MN), Metode Halley (MH) dan Metode Relaksasi Newton (MRN), terlihat bahwa metode Relaksasi Newton lebih baik dibandingkan dengan metode Newton meskipun keduanya sama-sama memiliki orde kekonvergenan dua. Akan tetapi, secara umum metode Newton dan metode Relaksasi Newton tidak lebih baik dari metode Halley yang memiliki orde kekonvergenan lebih tinggi yaitu orde kekonvergenan tiga.

4. *BASINS OF ATTRACTION*

Pada bagian ini dibahas perbandingan perilaku kekonvergenan dari metode Relaksasi Newton dengan parameter tertentu menggunakan *Basins of Attraction*. *Basins of Attraction* merupakan daerah di bidang komplek yang menggambarkan kekonvergenan suatu metode iterasi berdasarkan posisi *attractor*, yaitu posisi tebakan awal dari suatu metode iterasi sebelum iterasi lakukan. Jadi *Basins of Attraction* adalah daerah yang melingkupi titik-titik tempat *attractor* berada.



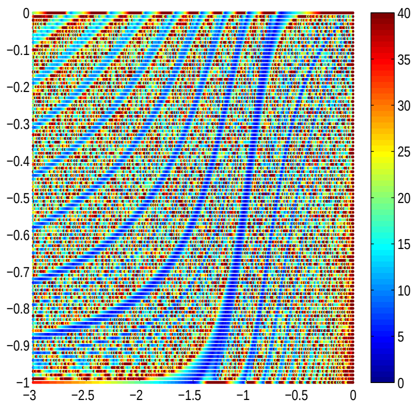
Gambar 1: Jumlah iterasi yang dibutuhkan metode Newton (panel kanan) dan metode Halley (panel kiri) untuk menuju ke salah satu akar dari fungsi $f(x) = (x^7 - 1)$. Panel bawah menunjukkan jumlah iterasi satu kumpulan titik-titik dari masing-masing metode.

Basins of attraction menghasilkan gambar fraktal yang mempermudah untuk melihat jumlah iterasi yang diperoleh untuk berbagai tebakan awal. Untuk membuat gambar fraktal *Basins of Attraction*, langkah pertama yang dilakukan adalah membuat segi empat D pada bidang kompleks x kemudian menerapkan metode

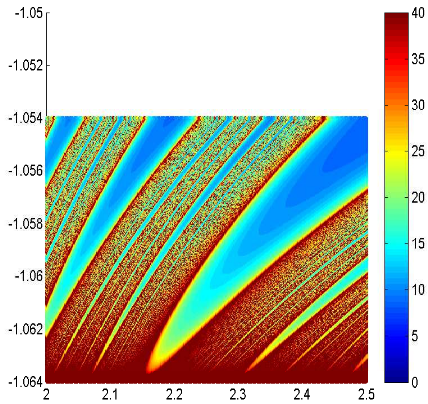
Relaksasi Newton untuk setiap titik di D dengan mengambil toleransi 10^{-5} dan maksimal iterasi 40. Setiap titik (x_j, y_k) pada segi empat D tersebut mewakili sebuah bilangan kompleks $z = x_j + iy_k$ yang dijadikan sebagai tebakan awal untuk metode iterasi yang digunakan. Perbandingan dengan menggunakan *basins of attraction* ini menggunakan fungsi $f(x) = x^7 - 1$, dengan menetapkan nilai $a = 1$ dan memvariasikan nilai b.

Gambar *basins of attraction* ini diplot berdasarkan jumlah iterasi yang setiap titik pada segi empat D tersebut mewakili tebakan awal untuk setiap metode iterasi. Setiap titik pada grid tersebut diwarnai berdasarkan jumlah iterasi yang diperlukan pada setiap metode. Warna dibedakan berdasarkan jumlah iterasi yang konvergen ke akar-akarnya. Gambar *basins of attraction* dari metode Newton, metode Halley, dan metode Relaksasi Newton dapat dilihat pada Gambar 1–3.

Pada Gambar 1 menunjukkan jumlah iterasi yang dibutuhkan metode Relaksasi Newton ke salah satu akar dari $f(x) = x^7 - 1$ untuk dua nilai b tertentu. Kumpulan titik-titik pada Gambar 1 diwakili oleh daerah berwarna biru pada Gambar 2. Menariknya, kumpulan titik-titik tersebut bergerak dalam ruang variasi b. Selama pergerakannya tidak linear pada satu titik, jika nilai b kecil maka secara umum ukuran kumpulan titik-titik akan bertambah besar. Pada Gambar 2(a), jelas terlihat



(a)

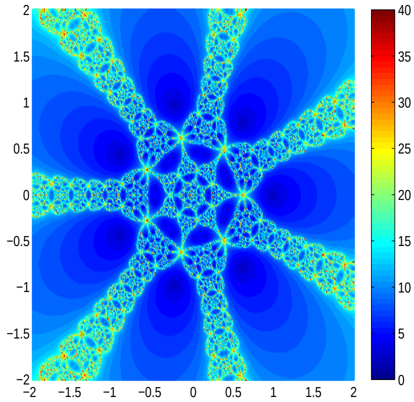


(b)

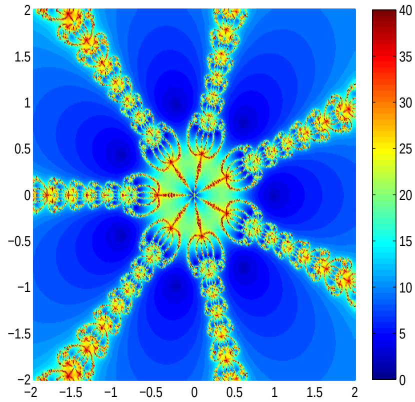
Gambar 2: Jumlah iterasi yang dibutuhkan metode iterasi (4) untuk menuju suatu akar dari $f(x)$ pada bidang (x, b).

bahwa ketika b mengecil ke arah -1 maka ukuran kumpulan titik-titik menjadi lebih besar. Ketika $b > 0$ metode Relaksasi Newton tidak konvergen ke $x = 1$ yang diwakili oleh daerah berwarna merah.

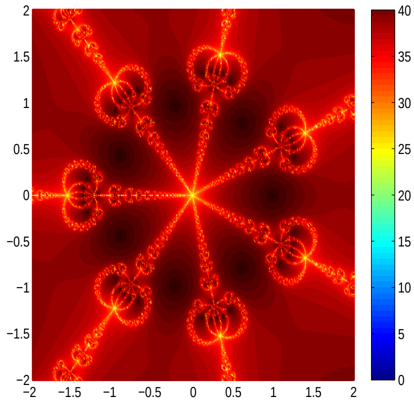
Pada Gambar 3, menunjukkan jumlah iterasi yang dibutuhkan metode Relaksasi Newton untuk menuju ke salah satu akar pada bidang kompleks untuk beberapa variasi nilai b.



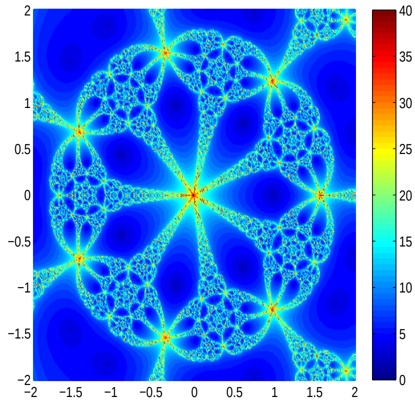
(a) $b = 0.05$



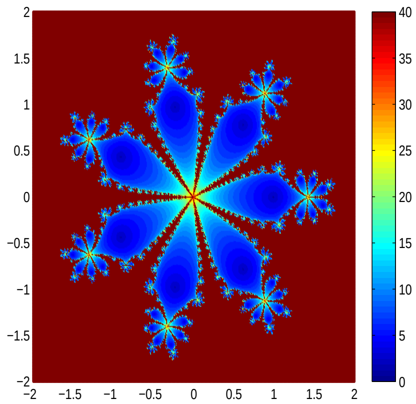
(b) $b = -0.005$



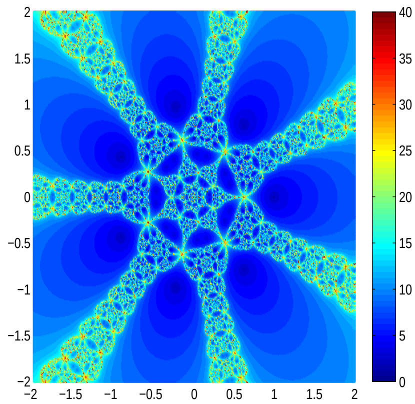
(c) $b = -0.95$



(d) $b = -1.05$



(e) $b = -1.1$



(f) $b = -1.5$

Gambar 3: *Basins of Attraction* dari Metode Relaksasi Newton untuk fungsi $f(x) = (x^7 - 1)$ dengan beberapa variasi nilai b.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Atkinson, K.E. 1989. *An Introduction to Numerical Analysis, 2^{nd} Ed.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

[2] Bartle, R.G. & D.R. Shebert. 2011. *Introduction to Real Analysis, 4^{th} Ed.* John Wiley & Sons, Inc, New York.

[3] Burden, R.L & J.D. Faires. 2002. *Numerical Methods, 3^{rd} Ed.* Brooks Cole, New York.

[4] H. Susanto,& N.Karjanto. 2009. Newton's Method's basins of attraction revisited. *Applied Mathematics and Computation* **215**: 1084–1090.

[5] Mathews, J. H. 1992. *Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering, 2^{rd} Ed.* Prentice Hall. Englewood Cliffs, New Jersey.

[6] Wait, R. 1979. *The Numerical Solution of Algebraic Equation.* John Wiley & Sons, Inc.,Chicester.