

# BEBERAPA IDENTITAS PADA GENERALISASI BARISAN FIBONACCI

Sri Melati<sup>1\*</sup>, Mashadi<sup>2</sup>, Musraini M<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Mahasiswa Program Studi S1 Matematika

<sup>2</sup> Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau  
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

\*srimelati92@gmail.com

## ABSTRACT

We discuss some identities of generalized Fibonacci sequence,  $(u_n)$ , which satisfies linear homogeneous recurrence relations of order two having a non-zero constant coefficient. Then given some matrices, we show that the  $n$ -power of these matrices provide some identities for  $\sum_{i=0}^n u_i^2$ ,  $u_n u_{n+2}$ , and  $\sum_{i=0}^n u_n u_{n+1}$ . At the end we give generating functions for  $u_n u_{n+1}$  and  $u_n u_{n+2}$ .

Keywords: *Fibonacci sequence, generating function, Lucas sequence, Vandermonde matrix.*

## ABSTRAK

Artikel ini membahas beberapa identitas generalisasi barisan Fibonacci,  $(u_n)$ , yang memenuhi relasi berulang linear homogen berorde dua dengan koefisien bilangan bulat yang tak-nol. Kemudian diberikan beberapa matriks, yang mana perpangkatan ke- $n$  dari matriks tersebut akan menghasilkan beberapa identitas, yaitu  $\sum_{i=0}^n u_i^2$ ,  $u_n u_{n+2}$ , dan  $\sum_{i=0}^n u_n u_{n+1}$  pada barisan  $(u_n)$ . Selanjutnya juga dibahas fungsi pembangkit untuk perkalian suku-suku dalam bentuk  $u_n u_{n+1}$  dan  $u_n u_{n+2}$ .

Kata kunci: *Barisan Fibonacci, barisan Lucas, fungsi pembangkit, matriks Vandermonde.*

## 1. PENDAHULUAN

Relasi berulang [2, h. 245] mendefinisikan suatu barisan dengan mengaitkan unsur ke- $n$  dari barisan tersebut dengan elemen sebelumnya. Barisan Fibonacci dapat didefinisikan dalam bentuk relasi berulang [4, h. 6] yaitu,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad (1)$$

dengan nilai awalnya  $F_1 = 1$  dan  $F_2 = 1$ . Barisan Lucas juga dapat didefinisikan dalam bentuk relasi berulang [4, h. 8] yaitu,

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad (2)$$

dengan nilai awalnya  $L_1 = 1$  dan  $L_2 = 3$ .

Untuk jumlah kuadrat suku-suku barisan Fibonacci diberikan oleh [4, h. 77], yaitu

$$\sum_{i=0}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}, \quad (3)$$

dan jumlah perkalian dua suku yang berurutan barisan Fibonacci diberikan oleh [4, h. 90],

$$\sum_{i=0}^n F_i F_{i+1} = F_{n+1}^2 - \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}. \quad (4)$$

Pada [4, h. 229] diberikan fungsi pembangkit untuk perkalian dua suku yang berurutan pada barisan Fibonacci, yaitu

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n F_{n+1} x^n = \frac{x}{1 - 2x - 2x^2 + x^3}. \quad (5)$$

Barisan Fibonacci dan Lucas pada persamaan (1) dan (2) dapat digeneralisasi menjadi suatu barisan baru dan dapat ditentukan identitas-identitasnya. Pada artikel ini dibahas beberapa identitas pada generalisasi barisan Fibonacci yang merupakan review dan koreksi dari sebagian artikel E. Kilic [3] yang berjudul "Sums of the Square of Terms of Sequence  $\{u_n\}$ ".

Pembahasan dimulai dengan menggeneralisasi barisan Fibonacci dan Lucas. Kemudian pada bagian tiga dan empat akan diberikan beberapa matriks dan dari pangkat ke- $n$ -nya akan diperoleh identitas-identitas generalisasi barisan Fibonacci. Kemudian juga akan digeneralisasi persamaan (3) dan (4). Pada bagian lima akan dikonstruksi fungsi pembangkit untuk  $u_n u_{n+1}$  dan  $u_n u_{n+2}$ .

## 2. GENERALISASI BARISAN FIBONACCI DAN LUCAS

Barisan Fibonacci dan Lucas digeneralisasi menjadi relasi berulang homogen linear berorde dua dengan koefisien konstan  $A$  yang selanjutnya disebut barisan  $(u_n)$  dan  $(v_n)$  [3] didefinisikan oleh

$$u_{n+1} = Au_n + u_{n-1}, \quad (6)$$

$$v_{n+1} = Av_n + v_{n-1}, \quad (7)$$

dengan  $A$  bilangan bulat yang tak-nol,  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$ ,  $v_0 = 2$ , dan  $v_1 = A$ . Persamaan karakteristik yang bersesuaian dengan persamaan (6) dan (7) adalah  $x^2 - Ax - 1 = 0$ . Jika  $\alpha$  dan  $\beta$  adalah akar persamaan karakteristik tersebut, dengan  $\alpha = \frac{A + \sqrt{A^2 + 1}}{2}$  dan  $\beta = \frac{A - \sqrt{A^2 + 1}}{2}$ , maka formula Binet [3] untuk barisan  $(u_n)$  dan  $(v_n)$  didefinisikan oleh

$$u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \text{ dan } v_n = \alpha^n + \beta^n.$$

Berikut diberikan alternatif formula untuk jumlah kuadrat suku-suku barisan  $(u_n)$ .

**Lema 1** [3] Misalkan  $u_n$  adalah suku ke- $n$  pada barisan  $(u_n)$ . Jumlah kuadrat suku-suku pada barisan tersebut, yaitu

$$\sum_{i=0}^n u_i^2 = \frac{u_n u_{n+1}}{A}. \quad (8)$$

**Bukti.** Lema ini akan dibuktikan dengan induksi matematika. Untuk  $n = 1$ , berdasarkan persamaan (6), diperoleh

$$\sum_{i=0}^1 u_i^2 = u_0^2 + u_1^2 = 0 + 1 = \frac{(1)(A)}{A} = 1.$$

Misalkan untuk  $n = k$  persamaan (8) benar, sehingga berlaku

$$\sum_{i=0}^k u_i^2 = \frac{u_k u_{k+1}}{A}.$$

Akan ditunjukkan untuk  $n = k + 1$  juga benar, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} u_i^2 &= \sum_{i=0}^k u_i^2 + u_{k+1}^2 \\ &= u_{k+1} \left( \frac{u_k + A u_{k+1}}{A} \right) \\ \sum_{i=0}^{k+1} u_i^2 &= \frac{u_{k+1} u_{k+2}}{A}. \end{aligned}$$

Karena untuk  $n = k + 1$  benar, maka Lema 1 terbukti.  $\square$

### 3. JUMLAH KUADRAT SUKU-SUKU BARISAN $(u_n)$

Definisikan matriks  $T$  dan  $H_n$ ,

$$T = \begin{bmatrix} u_3 & u_3 & -u_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

dan

$$H_n = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n+1} u_i^2 & u_n u_{n+2} & -\sum_{i=0}^n u_i^2 \\ \sum_{i=0}^n u_i^2 & u_{n-1} u_{n+1} & -\sum_{i=0}^{n-1} u_i^2 \\ \sum_{i=0}^{n-1} u_i^2 & u_{n-2} u_n & -\sum_{i=0}^{n-2} u_i^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

dengan  $u_n$  adalah suku ke- $n$  dari barisan  $(u_n)$ .

**Teorema 2** [3] Misalkan terdapat matriks  $T$  dan  $H_n$  seperti pada (9) dan (10), untuk  $n > 1$ , berlaku

$$T^n = H_n. \quad (11)$$

**Bukti.** Teorema ini akan dibuktikan dengan induksi matematika. Untuk  $n = 2$ , berdasarkan persamaan (6), diperoleh

$$T^2 = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^3 u_i^2 & u_2 u_4 & -\sum_{i=0}^2 u_i^2 \\ \sum_{i=0}^2 u_i^2 & u_1 u_3 & -\sum_{i=0}^1 u_i^2 \\ \sum_{i=0}^1 u_i^2 & u_0 u_2 & -\sum_{i=0}^0 u_i^2 \end{bmatrix}.$$

Sehingga diperoleh  $T^2 = H_2$ . Misalkan untuk  $n = k$  persamaan (11) benar, maka berlaku  $T^k = H_k$ , dengan  $k > 1$ . Akan ditunjukkan untuk  $n = k + 1$ , dengan  $k > 1$ , juga benar. Asumsikan  $T^{k+1} = T^k T$ , sehingga diperoleh

$$T^{k+1} = \begin{bmatrix} (A^2 + 1) \sum_{i=0}^{k+1} u_i^2 + u_k u_{k+2} & (A^2 + 1) \sum_{i=0}^{k+1} u_i^2 - \sum_{i=0}^k u_i^2 & -\sum_{i=0}^{k+1} u_i^2 \\ (A^2 + 1) \sum_{i=0}^k u_i^2 + u_{k-1} u_{k+1} & (A^2 + 1) \sum_{i=0}^k u_i^2 - \sum_{i=0}^{k-1} u_i^2 & -\sum_{i=0}^k u_i^2 \\ (A^2 + 1) \sum_{i=0}^{k-1} u_i^2 + u_{k-2} u_k & (A^2 + 1) \sum_{i=0}^{k-1} u_i^2 - \sum_{i=0}^{k-2} u_i^2 & -\sum_{i=0}^{k-1} u_i^2 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan persamaan (6) dan Lema 1, entri baris kedua kolom pertama dari matriks  $T^{k+1}$ , yaitu

$$\begin{aligned} (A^2 + 1) \sum_{i=0}^k u_i^2 + u_{k-1} u_{k+1} &= (A^2 + 1) \frac{u_k u_{k+1}}{A} + u_{k-1} u_{k+1} \\ &= \frac{A u_{k+1} (A u_k + u_{k-1}) + u_k u_{k+1}}{A} \\ (A^2 + 1) \sum_{i=0}^k u_i^2 + u_{k-1} u_{k+1} &= \sum_{i=0}^{k+1} u_i^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Kemudian dengan menggunakan cara yang sama seperti pada persamaan (12), akan

diperoleh entri-entri lain pada matriks  $T^{k+1}$ . Sehingga matriks  $T^{k+1}$  menjadi

$$T^{k+1} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{k+2} u_i^2 & u_{k+1}u_{k+3} & -\sum_{i=0}^{k+1} u_i^2 \\ \sum_{i=0}^{k+1} u_i^2 & u_k u_{k+2} & -\sum_{i=0}^k u_i^2 \\ \sum_{i=0}^k u_i^2 & u_{k-1}u_{k+1} & -\sum_{i=0}^{k-1} u_i^2 \end{bmatrix}.$$

Karena untuk  $n = k + 1$  benar, maka persamaan (11) terbukti.  $\square$

Dari matriks  $T$  pada persamaan (9), diperoleh persamaan karakteristik yaitu  $x^3 - (A^2 + 1)x^2 - (A^2 + 1)x + 1 = 0$ . Akar karakteristik adalah  $\gamma_1 = \frac{A^2 + A\sqrt{A^2 + 4}}{2} + 1$ ,  $\gamma_2 = \frac{A^2 - A\sqrt{A^2 + 4}}{2} + 1$  dan  $\gamma_3 = -1$ , atau  $\gamma_1 = \alpha^2$  dan  $\gamma_2 = \beta^2$ . Selanjutnya, didefinisikan matriks Vandermonde [3],

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & \gamma_3^2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dari matriks  $\Lambda$  diperoleh  $\det \Lambda = A(A^2 + 4)^{\frac{3}{2}}$ . Misal  $V = \Lambda^t$ . Misal  $V_j^{(i)}$  adalah matriks yang diperoleh dari  $V$  dengan mengganti kolom ke- $j$  dengan

$$\omega_i = \begin{bmatrix} \gamma_1^{n-i+3} \\ \gamma_2^{n-i+3} \\ \gamma_3^{n-i+3} \end{bmatrix}.$$

**Teorema 3** [3] Misalkan  $H_n = [h_{ij}]$  seperti pada (10), untuk  $1 \leq i, j \leq 3$ , berlaku

$$h_{ij} = \frac{\det(V_j^{(i)})}{\det V}.$$

**Bukti.** Diketahui  $T\Lambda = \Lambda D$ , dengan  $D = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ . Karena matriks  $T$  similar dengan matriks  $D$ , diperoleh  $T^n \Lambda = \Lambda D^n$ . Berdasarkan Teorema 2, diperoleh  $H_n \Lambda = \Lambda D^n$ . Sehingga diperoleh sistem persamaan linear,

$$\left. \begin{aligned} h_{i1}\gamma_1^2 + h_{i2}\gamma_1 + h_{i3} &= \gamma_1^{n-1+3} \\ h_{i1}\gamma_2^2 + h_{i2}\gamma_2 + h_{i3} &= \gamma_2^{n-1+3} \\ h_{i1}\gamma_3^2 + h_{i2}\gamma_3 + h_{i3} &= \gamma_3^{n-1+3} \end{aligned} \right\}. \quad (13)$$

Berdasarkan aturan Cramer [1, h. 83], diperoleh solusi untuk sistem persamaan linear (13) yaitu

$$h_{ij} = \frac{\det(V_j^{(i)})}{\det V}.$$

Sehingga Teorema 3 terbukti.  $\square$

Selanjutnya, akan diberikan bentuk umum identitas  $\sum_{i=0}^n u_i^2$  dan  $u_n u_{n+2}$ .

**Akibat 4** [3] Untuk  $n > 0$ , berlaku

$$\sum_{i=0}^n u_i^2 = \frac{v_{2n+1} + u_2(-1)^{n+1}}{A(A^2 + 4)},$$

dengan  $u_n$  dan  $v_n$  adalah suku ke- $n$  dari barisan  $(u_n)$  dan  $(v_n)$ .

**Bukti.** Berdasarkan Teorema 3, diperoleh

$$h_{21} = \sum_{i=0}^n u_i^2 = \frac{\det V_1^{(2)}}{\det V}.$$

Untuk  $\det V_1^{(2)}$ , diperoleh

$$\det V_1^{(2)} = \begin{vmatrix} \gamma_1^{n+1} & \gamma_1 & 1 \\ \gamma_2^{n+1} & \gamma_2 & 1 \\ \gamma_3^{n+1} & \gamma_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det V_1^{(2)} = \sqrt{A^2 + 4}(v_{2n+1} + u_2(-1)^{n+1}).$$

Kemudian dari matriks  $V$  diperoleh  $\det V = \det \Lambda$ , sehingga Akibat 4 terbukti.  $\square$

Berdasarkan Akibat 4, untuk  $A = 1$ , diperoleh generalisasi persamaan (3) yaitu

$$\sum_{i=0}^n F_i^2 = \frac{L_{2n+1} + (-1)^{n+1}}{5},$$

dengan  $F_n$  dan  $L_n$  adalah suku ke- $n$  dari barisan Fibonacci dan Lucas.

**Akibat 5** Untuk  $n > 0$ , berlaku

$$u_n u_{n+2} = \frac{v_{2n+2} + v_2(-1)^{n+1}}{A^2 + 4},$$

dengan  $u_n$  dan  $v_n$  adalah suku ke- $n$  dari barisan  $(u_n)$  dan  $(v_n)$ .

**Bukti.** Berdasarkan Teorema 3, diperoleh

$$h_{12} = u_n u_{n+2} = \frac{\det V_2^{(1)}}{\det V}.$$

Untuk  $\det V_2^{(1)}$ , diperoleh

$$\det V_2^{(1)} = \begin{vmatrix} \gamma_1^2 & \gamma_1^{n+2} & 1 \\ \gamma_2^2 & \gamma_2^{n+2} & 1 \\ \gamma_3^2 & \gamma_3^{n+2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det V_2^{(1)} = A\sqrt{A^2 + 4}(v_{2n+2} + v_2(-1)^{n+1}).$$

Kemudian dari matriks  $V$  diperoleh  $\det V = \det \Lambda$ , sehingga Akibat 5 terbukti.  $\square$

Berdasarkan Akibat 5, untuk  $A = 1$ , diperoleh

$$F_n F_{n+2} = \frac{L_{2n+2} + 3(-1)^{n+1}}{5},$$

dengan  $F_n$  dan  $L_n$  adalah suku ke- $n$  dari barisan Fibonacci dan Lucas.

**Akibat 6** [3] Untuk  $n > 0$ ,  $x_n$  memenuhi relasi berulang ( $x_n$ ),

$$x_{n+2} = u_3x_{n+1} + u_3x_n - x_{n-1},$$

dengan  $x_n$  adalah  $\frac{u_n u_{n+1}}{A} = \sum_{i=0}^n u_i^2$  atau  $u_n u_{n+2}$ .

**Bukti.** Untuk  $n = 1$ ,  $T = H$ . Berdasarkan Teorema 2, diperoleh

$$H_{n+1} = T^{n+1} = T^n T = H_n T = H_n H.$$

Dari perkalian matriks  $H_{n+1} = H_n H$ , diperoleh persamaan

$$x_{n+2} = u_3x_{n+1} + u_3x_n - x_{n-1}. \quad \square$$

#### 4. JUMLAH PERKALIAN DUA SUKU BERURUTAN BARISAN ( $u_n$ )

Misalkan  $G$  adalah perluasan dari matriks  $T$  pada (9), sehingga

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & u_3 & u_3 & -u_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Kemudian, untuk  $n > 0$ , misalkan

$$C_n = \frac{1}{A} \sum_{i=0}^n u_i u_{i+1}. \quad (15)$$

Definisikan matriks  $Q_n$  yaitu,

$$Q_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ C_n & \frac{u_{n+1}u_{n+2}}{A} & u_n u_{n+2} & -\frac{u_n u_{n+1}}{A} \\ C_{n-1} & \frac{u_n u_{n+1}}{A} & u_{n-1} u_{n+1} & -\frac{u_{n-1} u_n}{A} \\ C_{n-2} & \frac{u_{n-1} u_n}{A} & u_{n-2} u_n & -\frac{u_{n-2} u_{n-1}}{A} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

**Teorema 7** [3] Misal matriks  $G$  dan  $Q_n$  yang diberikan oleh (14) dan (16). Untuk  $n > 2$ , berlaku

$$G^n = Q_n. \quad (17)$$

**Bukti.** Teorema ini akan dibuktikan dengan induksi matematika. Berdasarkan persamaan (6) dan (15), untuk  $n = 3$ , diperoleh

$$G^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ C_3 & \frac{u_4 u_5}{A} & u_3 u_5 & -\frac{u_3 u_4}{A} \\ C_2 & \frac{u_3 u_4}{A} & u_2 u_4 & -\frac{u_2 u_3}{A} \\ C_1 & \frac{u_2 u_3}{A} & u_1 u_3 & -\frac{u_1 u_2}{A} \end{bmatrix}.$$

Misalkan untuk  $n = k$ ,  $k > 2$ , persamaan (17) benar. Akan ditunjukkan untuk  $n = k + 1$ ,  $k > 2$ , juga benar. Asumsikan  $G^{k+1} = G^k G$ . Berdasarkan persamaan (6) dan (15), diperoleh

$$G^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ C_{k+1} & \frac{u_{k+2}u_{k+3}}{A} & u_{k+1}u_{k+3} & -\frac{u_{k+1}u_{k+2}}{A} \\ C_k & \frac{u_{k+1}u_{k+2}}{A} & u_k u_{k+2} & -\frac{u_k u_{k+1}}{A} \\ C_{k-1} & \frac{u_k u_{k+1}}{A} & u_{k-1}u_{k+1} & -\frac{u_{k-1}u_k}{A} \end{bmatrix}.$$

Karena untuk  $n = k + 1$ ,  $k > 2$ , juga benar, sehingga Teorema 7 terbukti.  $\square$

**Akibat 8** [3] Untuk  $n > 0$ ,  $C_n$  memenuhi relasi berulang nonhomogen,

$$C_{n+1} = (A^2 + 1)C_n + (A^2 + 1)C_{n-1} - C_{n-2} + 1,$$

dengan  $C_n$  yang diberikan oleh (15).

**Bukti.** Untuk  $n = 1$ ,  $G = Q$ . Berdasarkan Teorema 7, diperoleh

$$Q_{n+1} = G^{n+1} = G^n G = Q_n G = Q_n Q.$$

Dari perkalian matriks  $Q_{n+1} = Q_n Q$ , diperoleh

$$C_{n+1} = (A^2 + 1)C_n + (A^2 + 1)C_{n-1} - C_{n-2} + 1. \quad \square$$

Selanjutnya didefinisikan matriks  $E$  dan  $D_1$ ,

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2A^2} & \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & \gamma_3^2 \\ \frac{-1}{2A^2} & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \frac{-1}{2A^2} & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

dan

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_3 \end{bmatrix},$$

dengan  $\gamma_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , akar karakteristik dari matriks  $T$  yang diberikan oleh (9).

Berikut diberikan bentuk umum identitas  $\sum_{i=0}^n u_i u_{i+1}$ .

**Teorema 9** Untuk  $n > 0$ , jumlah perkalian dua suku yang berurutan diberikan oleh

$$\sum_{i=0}^n u_i u_{i+1} = \frac{u_{n+1}^2 + u_n u_{n+2} - 1}{2A},$$

dengan  $u_n$  adalah suku ke- $n$  dari barisan  $(u_n)$ .

**Bukti.** Diketahui  $GE = ED_1$ . Karena matriks  $G$  similar dengan matriks  $D_1$ , diperoleh  $G^n E = ED_1^n$ . Berdasarkan Teorema 7, diperoleh  $Q_n E = ED_1^n$ . Dari perkalian matriks  $Q_n E = ED_1^n$ , diperoleh

$$C_n = \frac{1}{2A^2} \left( \frac{u_{n+1}u_{n+2}}{A} + u_n u_{n+2} - \frac{u_n u_{n+1}}{A} - 1 \right).$$

Berdasarkan persamaan (6) dan persamaan (15), diperoleh

$$\sum_{i=0}^n u_i u_{i+1} = \frac{u_{n+1}^2 + u_n u_{n+2} - 1}{2A}.$$

Sehingga diperoleh bentuk umum untuk  $\sum_{i=0}^n u_i u_{i+1}$  dan Teorema 9 terbukti.  $\square$

Berdasarkan Teorema 9, untuk  $A = 1$ , diperoleh generalisasi persamaan (4), yaitu

$$\sum_{i=0}^n F_i F_{i+1} = \frac{F_{n+1}^2 + F_n F_{n+2} - 1}{2}.$$

dengan  $F_n$  adalah suku ke- $n$  dari barisan Fibonacci.

## 5. FUNGSI PEMBANGKIT UNTUK $u_n u_{n+1}$ DAN $u_n u_{n+2}$

Pandang persamaan (5). Kemudian akan dikonstruksi fungsi pembangkit untuk  $u_n u_{n+1}$ . Misal

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n u_{n+1} x^n. \quad (18)$$

Kemudian dengan mengalikan persamaan (18) terhadap  $u_3 x$ ,  $u_3 x^2$ , dan  $x^3$ , diperoleh

$$u_3 x g(x) = u_0 u_1 u_3 x + u_1 u_2 u_3 x^2 + u_2 u_3 u_3 x^3 + u_3 u_4 u_3 x^4 + \dots, \quad (19)$$

$$u_3 x^2 g(x) = u_0 u_1 u_3 x^2 + u_1 u_2 u_3 x^3 + u_2 u_3 u_3 x^4 + u_3 u_4 u_3 x^5 + \dots, \quad (20)$$

$$x^3 g(x) = u_0 u_1 x^3 + u_1 u_2 x^4 + u_2 u_3 x^5 + u_3 u_4 x^6 + \dots. \quad (21)$$

Selanjutnya persamaan (18) dikurangi persamaan (19), (20) dan ditambah persamaan (21), diperoleh

$$\begin{aligned} (1 - u_3 x - u_3 x^2 + x^3)g(x) &= u_0 u_1 + (u_1 u_2 - u_0 u_1 u_3)x + (u_2 u_3 - u_1 u_2 u_3 - u_0 u_1 u_3)x^2 \\ &\quad + \dots + (u_n u_{n+1} - u_{n-1} u_n u_3 - u_{n-2} u_{n-1} u_3 \\ &\quad + u_{n-3} u_{n-2})x^n + \dots \\ &= 0 + u_2 x + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots \\ g(x) &= \frac{u_2 x}{1 - u_3 x - u_3 x^2 + x^3}. \end{aligned} \quad (22)$$

Berdasarkan  $g(x)$  pada persamaan (18), maka persamaan (22) adalah fungsi pembangkit untuk  $u_n u_{n+1}$ . Selanjutnya dengan cara yang sama, akan dikonstruksi fungsi pembangkit untuk  $u_n u_{n+2}$ . Misal

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n u_{n+2} x^n. \quad (23)$$

Kemudian dengan mengalikan persamaan (23) terhadap  $u_3 x$ ,  $u_3 x^2$ , dan  $x^3$ , diperoleh

$$u_3 x h(x) = u_0 u_2 u_3 x + u_1 u_3 u_3 x^2 + u_2 u_4 u_3 x^3 + u_3 u_5 u_3 x^4 + \dots, \quad (24)$$

$$u_3 x^2 h(x) = u_0 u_2 u_3 x^2 + u_1 u_3 u_3 x^3 + u_2 u_4 u_3 x^4 + u_3 u_5 u_3 x^5 + \dots, \quad (25)$$

$$x^3 h(x) = u_0 u_2 x^3 + u_1 u_3 x^4 + u_2 u_4 x^5 + u_3 u_5 x^6 + \dots. \quad (26)$$

Selanjutnya persamaan (23) dikurangi persamaan (24), (25) dan ditambah persamaan (26), diperoleh

$$\begin{aligned} (1 - u_3 x - u_3 x^2 + x^3)h(x) &= u_0 u_2 + (u_1 u_3 - u_0 u_2 u_3)x + (u_2 u_4 - u_1 u_3 u_3 - u_0 u_2 u_3)x^2 \\ &\quad + \dots + (u_n u_{n+2} - u_{n-1} u_{n+1} u_3 - u_{n-2} u_n u_3 \\ &\quad + u_{n-3} u_{n-1})x^n + \dots \\ &= 0 + u_3 x - x^2 + 0 + \dots + 0 + \dots \\ h(x) &= \frac{u_3 x - x^2}{1 - u_3 x - u_3 x^2 + x^3}. \end{aligned} \quad (27)$$

Berdasarkan  $h(x)$  pada persamaan (23), maka persamaan (27) adalah fungsi pembangkit untuk  $u_n u_{n+2}$ . Jika diambil  $A = 1$ , maka persamaan (27) menjadi

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n F_{n+2} x^n = \frac{2x - x^2}{1 - 2x - 2x^2 + x^3},$$

yang merupakan fungsi pembangkit untuk  $F_n F_{n+2}$  pada barisan Fibonacci.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Anton, H. 1987. *Aljabar Linier Elementer Edisi Kelima*. Terj. dari *Elementary Linear Algebra, Fifth Edition*, oleh Silaban, P. & I.N. Susila. Penerbit Erlangga, Jakarta.
- [2] Johnsonbaugh, R. 1997. *Matematika Diskrit Edisi Keempat Jilid 1*. Terj. dari *Discrete Mathematics, Forth Edition*, oleh Djunaedi, Drs. D. Penerbit PT. Prenhallindo, Jakarta.
- [3] Killic, E. 2008. Sums of the Square of Term of Sequence  $\{u_n\}$ . *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci)*, **118** (1): 27-41.
- [4] Koshy, T. 2001. *Fibonacci and Lucas Number with Applications*. John Wiley & Sons, Inc. New York.