

PENAKSIR RASIO DAN PRODUK EKSPONENSIAL YANG EFISIEN UNTUK VARIANSI POPULASI PADA SAMPLING ACAK SEDERHANA

Mega Elysmayanti^{1*}, Firdaus², Haposan Sirait²

¹Mahasiswa Program S1 Matematika

²Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru 28293, Indonesia

*mega.sarjono@gmail.com

ABSTRACT

Estimators discussed here are three estimators for estimating population variance in simple random sampling without replacement, i.e. exponential ratio estimator using variance of auxiliary variable, and exponential ratio and product estimators using mean of auxiliary variable. This work is a review of article written by Asghar *et al.* [*Revista Colombiana de Estadística*, 37 (2014): 213-224]. These estimators are all biased and mean square error (*MSE*) of each estimator can be obtained. Furthermore, these *MSE* are compared to each other. The most efficient estimator is the one which has the smallest *MSE*. An example is given to show the efficiency of the estimator.

Keywords: *exponential ratio estimator, exponential product estimator, simple random sampling, biased estimator and mean square error.*

ABSTRAK

Penaksir yang dibahas merupakan tiga penaksir untuk variansi populasi pada sampling acak sederhana tanpa pengembalian, yaitu penaksir rasio eksponensial dengan menggunakan variansi dari variabel tambahan, dan penaksir rasio dan produk eksponensial dengan menggunakan rata-rata dari variabel tambahan, yang merupakan penjabaran dari artikel yang ditulis oleh Asghar *et al.* [*Revista Colombiana de Estadística*, 37 (2014): 213-224]. Ketiga penaksir merupakan penaksir yang bersifat bias, dan *mean square error (MSE)* dari masing-masing penaksir dapat diperoleh. Selanjutnya, *MSE* dari penaksir dibandingkan satu sama lain. Penaksir yang memiliki *MSE* terkecil merupakan penaksir yang paling efisien. Contoh diberikan untuk menunjukkan efisiensi dari penaksir.

Kata kunci: *penaksir rasio eksponensial, penaksir produk eksponensial, sampling acak sederhana, penaksir bias dan mean square error.*

1. PENDAHULUAN

Suatu populasi berukuran N berkarakter Y akan ditaksir variansinya dengan metode sampling acak sederhana tanpa pengembalian. Dari N unit anggota populasi akan

diambil n unit sampel, kemudian diperoleh variansi sampel. Suatu penaksir yang baik berasal dari sampel yang bersifat representatif, yaitu sampel dapat mewakili parameter populasi.

Ketelitian penaksir dapat ditingkatkan dengan memperbesar ukuran sampel, namun cara ini tidak efektif. Untuk itu perlu digunakan suatu metode penaksiran dengan memanfaatkan informasi dari karakter tambahan yang berkorelasi dengan variabel penelitian, di antaranya yaitu metode rasio dan produk. Pada metode tersebut, suatu karakter tambahan X yang berkorelasi dengan variabel penelitian Y diperoleh untuk setiap unit dalam sampel, dengan parameter populasi X telah diketahui. Ketika karakter tambahan berkorelasi positif dengan variabel penelitian, maka metode rasio merupakan metode yang cocok untuk menaksir variansi populasi. Pada metode produk, karakter tambahan berkorelasi negatif dengan variabel penelitian. Kedua metode tersebut dapat meningkatkan ketelitian suatu penaksir meskipun penaksir yang dihasilkan merupakan penaksir bias. Jika terdapat beberapa penaksir yang bersifat bias, maka untuk memperoleh penaksir yang efisien, dibandingkan nilai *Mean Square Error (MSE)*-nya. Penaksir yang memiliki nilai *MSE* yang terkecil merupakan penaksir yang lebih efisien [2:h.21].

2. SAMPLING ACAK SEDERHANA

Sampling acak sederhana merupakan metode untuk mengambil sampel dari populasi sehingga setiap elemen dari data populasi mempunyai kesempatan yang sama untuk diambil. Suatu populasi yang berkarakter Y dengan ukuran populasi N unit dan peluang terambilnya adalah $1/N$, akan diambil sampel berukuran n unit, maka peluang tiap unit terambil ke dalam sampel adalah n/N . Pengambilan sampel dapat dilakukan dengan atau tanpa pengembalian [2:h.21].

Jika pengambilan sampel dilakukan dengan pengembalian, ada kemungkinan data yang telah terambil akan terambil kembali menjadi anggota sampel, sehingga hasil yang diperoleh kurang representatif. Oleh karena itu, pada umumnya sampling dilakukan tanpa pengembalian agar hasilnya lebih akurat. Pada sampling acak sederhana tanpa pengembalian, peluang satu dari n unit akan terambil menjadi sampel pada penarikan pertama adalah n/N . Selanjutnya pada penarikan ke dua, peluang satu dari $(n-1)$ unit sisanya yang akan terambil adalah $(n-1)/(N-1)$, dan seterusnya, sehingga peluang dari n unit terambil pada pengambilan ke- n kali adalah $(C_n^N)^{-1}$ [2:h.21].

Teorema 1 [2:h.27] Apabila \bar{y} adalah rata-rata sampel yang diambil secara sampling acak sederhana tanpa pengembalian, maka variansi dari \bar{y} dengan notasi $V(\bar{y})$ adalah

$$V(\bar{y}) = \frac{S_y^2}{n} \frac{N-n}{N},$$

dengan $S_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2$.

Bukti: Dapat dilihat pada [2:h.27]. ■

Teorema 2 [4:h.36] Apabila s_y^2 merupakan variansi sampel yang diambil secara sampling acak sederhana, maka variansi dari s_y^2 dilambangkan dengan notasi $V(s_y^2)$ adalah

$$V(s_y^2) = \frac{1}{n} S_y^4 (\delta_{40} - 1),$$

$$\text{dengan } \delta_{pq} = \frac{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^p (x_i - \bar{X})^q}{\left(\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 \right)^p \left(\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^2 \right)^q},$$

p, q merupakan bilangan bulat positif.

Bukti: Dapat dilihat pada [4:h.36]. ■

3. PENAKSIR RASIO DAN PRODUK SEDERHANA UNTUK VARIANSI POPULASI

Ketelitian penaksir dapat ditingkatkan dengan memperbesar ukuran sampel, namun cara ini tidak efektif. Untuk itu perlu digunakan suatu metode penaksiran dengan memanfaatkan informasi dari karakter tambahan yang berkorelasi dengan variabel penelitian, di antaranya yaitu metode rasio dan produk. Pada metode tersebut, suatu karakter tambahan X yang berkorelasi dengan variabel penelitian Y diperoleh untuk setiap unit dalam sampel, dengan parameter populasi X telah diketahui. Ketika informasi pada karakter tambahan berkorelasi positif dengan variabel penelitian, maka metode rasio merupakan metode yang cocok untuk menaksir variansi populasi.

Rasio antara variansi populasi berkarakter Y dengan variansi populasi berkarakter X adalah

$$R = \frac{S_y^2}{S_x^2}.$$

Penaksir dari R dilambangkan dengan notasi \hat{R} adalah

$$\hat{R} = \frac{s_y^2}{s_x^2}.$$

Asumsikan bahwa variansi populasi setara dengan variansi sampel, sehingga diperoleh

$$\frac{S_y^2}{S_x^2} = \frac{s_y^2}{s_x^2}$$

$$\hat{S}_y^2 = \frac{s_y^2}{s_x^2} S_x^2,$$

\hat{S}_y^2 disebut penaksir rasio sederhana untuk variansi populasi yang dilambangkan dengan notasi \hat{S}_R^2 dan dirumuskan sebagai berikut

$$\hat{S}_R^2 = \frac{s_y^2}{s_x^2} S_x^2.$$

Jika karakter tambahan X berkorelasi negatif dengan variabel penelitian Y , maka digunakan metode produk untuk menaksir variansi populasi. Produk antara variansi populasi berkarakter Y dengan variansi populasi berkarakter X adalah

$$P = S_y^2 S_x^2.$$

Penaksir dari P dilambangkan dengan notasi \hat{P} adalah

$$\hat{P} = s_y^2 s_x^2.$$

Asumsikan variansi populasi setara dengan variansi sampel, diperoleh

$$\begin{aligned} S_y^2 S_x^2 &= s_y^2 s_x^2 \\ \hat{S}_y^2 &= \frac{s_y^2 s_x^2}{S_x^2}, \end{aligned}$$

\hat{S}_y^2 merupakan penaksir produk sederhana untuk variansi populasi dilambangkan dengan notasi \hat{S}_P^2 dan dirumuskan dengan

$$\hat{S}_P^2 = \frac{s_y^2 s_x^2}{S_x^2}.$$

4. BIAS DAN *MSE* PENAKSIR RASIO DAN PRODUK EKSPONENSIAL UNTUK VARIANSI POPULASI

Selanjutnya akan dibahas bias dan *MSE* dari penaksir rasio dan produk eksponensial untuk variansi populasi pada sampling acak sederhana. Penaksir rasio dan produk eksponensial yang diajukan, yaitu

Penaksir rasio eksponensial tipe 1, yaitu

$$\hat{S}_{Re_1}^2 = s_y^2 \exp\left(\frac{S_x^2 - s_x^2}{S_x^2 + (\alpha - 1)s_x^2}\right), \quad (1)$$

dengan $\alpha \geq 0$ merupakan nilai yang ditentukan sedemikian hingga *MSE* dari penaksir menjadi minimum.

Penaksir rasio eksponensial tipe 2, yaitu

$$\hat{S}_{Re_2}^2 = s_y^2 \exp\left(\frac{\bar{X} - \bar{x}}{\bar{X} + \bar{x}}\right). \quad (2)$$

Penaksir produk eksponensial, yaitu

$$\hat{S}_{Pe}^2 = s_y^2 \exp\left(\frac{\bar{x} - \bar{X}}{\bar{x} + \bar{X}}\right). \quad (3)$$

Bias dan *MSE* penaksir rasio eksponensial tipe 1 pada persamaan (1), yaitu

$$B(\hat{S}_{Re_1}^2) \approx \frac{1}{n\alpha} S_y^2 \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} (\delta_{04} - 1) - (\delta_{22} - 1) \right),$$

$$MSE(\hat{S}_{Re_1}^2) \approx \frac{1}{n} S_y^4 \left((\delta_{40} - 1) - \frac{2}{\alpha} (\delta_{22} - 1) + \frac{1}{\alpha^2} (\delta_{04} - 1) \right).$$

MSE($\hat{S}_{Re_1}^2$) minimum ketika $\alpha = \alpha^* = \frac{\delta_{04} - 1}{\delta_{22} - 1}$, sehingga diperoleh

$$\min MSE(\hat{S}_{Re_1}^2) \approx \frac{1}{n} S_y^4 \left((\delta_{40} - 1) - \frac{(\delta_{22} - 1)^2}{\delta_{04} - 1} \right). \quad (4)$$

Bias dan *MSE* penaksir rasio eksponensial tipe 2 pada persamaan (2), yaitu

$$B(\hat{S}_{Re_2}^2) \approx \frac{1}{2n} S_y^2 C_x \left(\frac{3}{4} C_x - \delta_{21} + 1 \right),$$

$$MSE(\hat{S}_{Re_2}^2) \approx \frac{1}{n} S_y^4 \left((\delta_{40} - 1) - C_x (\delta_{21} - 1) + \frac{1}{4} C_x^2 \right). \quad (5)$$

Bias dan *MSE* penaksir produk eksponensial pada persamaan (3), yaitu

$$B(\hat{S}_{Pe}^2) \approx \frac{1}{2n} S_y^2 C_x \left(\delta_{21} - 1 - \frac{1}{4} C_x \right),$$

$$MSE(\hat{S}_{Pe}^2) \approx \frac{1}{n} S_y^4 \left((\delta_{40} - 1) + C_x (\delta_{21} - 1) + \frac{1}{4} C_x^2 \right). \quad (6)$$

5. PENAKSIR RASIO DAN PRODUK EKSPONENSIAL YANG EFISIEN

Apabila terdapat beberapa penaksir yang bersifat bias, maka untuk menentukan penaksir yang lebih efisien dapat dilakukan dengan cara membandingkan *MSE* dari masing-masing penaksir. Dalam membandingkan *MSE* digunakan efisiensi relatif dari $\hat{S}_{Re_1}^2$ terhadap $\hat{S}_{Re_2}^2$, $\hat{S}_{Re_2}^2$ terhadap \hat{S}_{Pe}^2 , dan \hat{S}_{Pe}^2 terhadap $\hat{S}_{Re_1}^2$. Suatu penaksir dikatakan efisien apabila mempunyai *MSE* yang terkecil.

a. Perbandingan $MSE(\hat{S}_{Re_1}^2)$ dengan $MSE(\hat{S}_{Re_2}^2)$

Dari persamaan (4) dan (5) diperoleh $\hat{S}_{Re_1}^2$ lebih efisien dari $\hat{S}_{Re_2}^2$ jika

$$\delta_{21} < \frac{C_x^2(\delta_{04} - 1) + 4(\delta_{22} - 1)^2}{4C_x(\delta_{04} - 1)} + 1 . \quad (7)$$

b. Perbandingan $MSE(\hat{S}_{Re_2}^2)$ dengan $MSE(\hat{S}_{Pe}^2)$

Dari persamaan (5) dan (6) diperoleh \hat{S}_{Pe}^2 lebih efisien dari $\hat{S}_{Re_2}^2$ jika

$$\delta_{21} < 1 . \quad (8)$$

c. Perbandingan $MSE(\hat{S}_{Pe}^2)$ dengan $MSE(\hat{S}_{Re_1}^2)$

Dari persamaan (4) dan (6) diperoleh \hat{S}_{Pe}^2 lebih efisien dari $\hat{S}_{Re_1}^2$ jika

$$\delta_{21} < 1 - \frac{C_x^2(\delta_{04} - 1) + 4(\delta_{22} - 1)^2}{4C_x(\delta_{04} - 1)} . \quad (9)$$

Contoh Diketahui data mengenai frekuensi kunjungan (Y) dan pendapatan (X) dari pengunjung objek wisata Air Terjun Guruh Gemurai di Kecamatan Kuantan Mudik Kabupaten Kuantan Singingi dari 100 responden dengan menganggap data tersebut merupakan data populasi. Dari data tersebut, akan ditaksir variansi frekuensi kunjungan dengan pengambilan sampel sebanyak $n = 40$ responden. Untuk meningkatkan ketelitian penaksir, diperlukan informasi dari karakter tambahan yang telah diketahui sebelumnya, yaitu rata-rata dan variansi pendapatan pengunjung. Pada data tersebut Y berkorelasi dengan X sehingga metode rasio dan produk eksponensial merupakan metode yang cocok untuk menaksir variansi.

Tabel 1: Frekuensi Kunjungan dan Pendapatan Pengunjung Objek Wisata Air Terjun Guruh Gemurai di Kec. Kuantan Mudik Kab. Kuantan Singingi

No.	Frekuensi Kunjungan (Y)	Pendapatan Pengunjung (X)	No.	Frekuensi Kunjungan (Y)	Pendapatan Pengunjung (X)
1	2	18	52	3	21
2	2	27,6	53	2	18
3	1	24	54	2	45,6
4	3	12	55	2	14,4
5	2	18	56	3	24
6	2	29,4	57	2	14,4
7	2	18	58	3	9,6
8	1	9,6	59	2	27,6
9	3	28,8	60	2	18
10	2	12	61	2	21,6
11	2	14,4	62	2	12

12	2	12	63	3	36
13	3	42	64	2	14,4
14	2	27,6	65	3	10,8
15	3	13,2	66	3	30
16	1	24	67	2	12
17	2	15,6	68	2	36
18	2	12	69	2	9,6
19	3	9,6	70	2	21,6
20	3	24	71	2	18
21	1	28,8	72	3	12
22	2	18	73	3	18
23	2	14,4	74	3	24
24	3	24	75	2	36
25	3	9,6	76	2	18
26	2	21,6	77	2	12
27	1	9,6	78	2	9,6
28	3	18	79	3	12
29	3	14,4	80	2	9,6
30	2	33,6	81	2	14,4
31	2	60	82	2	15
32	2	12	83	3	30
33	2	21,6	84	2	14,4
34	3	10,8	85	2	33,6
35	2	14,4	86	2	36
36	3	12	87	2	48
37	2	12	88	2	60
38	2	30	89	3	12
39	3	18	90	3	15
40	3	12	91	2	10,8
41	2	12	92	2	12
42	3	9,6	93	2	14,4
43	3	42	94	2	54
44	2	24	95	2	33,6
45	2	38	96	2	30
46	2	36	97	3	12
47	2	30	98	3	9,6
48	3	12	99	3	14,4
49	1	60	100	2	9,6
50	2	12	Jumlah	227	2142,8
51	2	36			

Sumber: [3]

Y : Frekuensi kunjungan objek wisata Air Terjun Guruh Gemurai di Kecamatan Kuantan Mudik Kabupaten Kuantan Singingi (kali/tahun).

X : Pendapatan pengunjung objek wisata Air Terjun Guruh Gemurai (juta/tahun).

Dari data pada Tabel 1, diperoleh nilai parameter yang diperlukan untuk menaksir variansi frekuensi kunjungan objek wisata Air Terjun Guruh Gemurai.

Tabel 2: Parameter dari Populasi

N	100	C_x	0,57
\bar{Y}	2	δ_{40}	2,491
\bar{X}	21,428	δ_{04}	4,469
S_y^2	0,3203	δ_{22}	1,132
S_x^2	149,275	δ_{21}	-0,015

Berdasarkan nilai yang diperoleh pada Tabel 2, maka dapat ditentukan penaksir yang paling efisien dari ketiga penaksir yang telah dibahas dengan cara mensubstitusikan nilai-nilai tersebut ke syarat-syarat efisiensi pada persamaan (7), (8) dan (9), sehingga diperoleh

- $\hat{S}_{Re_1}^2$ lebih efisien dari $\hat{S}_{Re_2}^2$ jika $\delta_{21} < 1,151$,
- \hat{S}_{Pe}^2 lebih efisien dari $\hat{S}_{Re_2}^2$ jika $\delta_{21} < 1$,
- \hat{S}_{Pe}^2 lebih efisien dari $\hat{S}_{Re_1}^2$ jika $\delta_{21} < 0,849$.

Penaksir yang efisien dapat juga ditentukan dengan menghitung *MSE* dari ketiga penaksir. Berdasarkan nilai-nilai dari Tabel 2, diperoleh *MSE* dari ketiga penaksir.

Tabel 3: Nilai Taksiran dan *MSE* untuk Ketiga Penaksir

Penaksir	Nilai Taksiran	<i>MSE</i>
$\hat{S}_{Re_1}^2$	0,3808	0,003811
$\hat{S}_{Re_2}^2$	0,4385	0,003867
\hat{S}_{Pe}^2	0,3258	0,003802

Dari Tabel 3 diperoleh bahwa $MSE(\hat{S}_{Pe}^2) < MSE(\hat{S}_{Re_1}^2) < MSE(\hat{S}_{Re_2}^2)$, dan nilai taksiran dari \hat{S}_{Pe}^2 merupakan taksiran yang paling mendekati parameter.

6. KESIMPULAN

Nilai MSE diperoleh untuk penaksir rasio eksponensial tipe 1, penaksir rasio eksponensial tipe 2 dan penaksir produk eksponensial untuk variansi populasi pada sampling acak sederhana tanpa pengembalian. Kemudian masing-masing MSE dibandingkan, sehingga dapat disimpulkan untuk data pada Tabel 1 diperoleh bahwa penaksir produk eksponensial paling efisien dibandingkan kedua penaksir lainnya jika syarat efisiensi δ_{21} terpenuhi.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Asghar, A., A. Sanauallah & M. Hanif. 2014. Generalized Exponential Type Estimator for Population Variance in Survey Sampling. *Revista Colombiana de Estadística*. 37(1): 213-224.
- [2] Cochran, W. G. 1991. *Teknik Penarikan Sampel, Edisi ke Tiga*. Terj. dari *Sampling Techniques* oleh Rudiansyah & Erwin R. Osman. UI-Press, Jakarta.
- [3] Julisman, D. 2013. *Analisis Permintaan Objek Wisata Air Terjun Guruh Gemurai Kecamatan Kuantan Mudik Kabupaten Kuantan Singingi dengan Metode Biaya Perjalanan*. Skripsi Fakultas Ekonomi Universitas Riau, Pekanbaru.
- [4] Sukhatme, P. V. 1957. *Sampling Theory of Surveys with Applications*. The Indian Council of Agricultural Research, New Delhi.