

PENAKSIR RASIO DAN PRODUK EKSPONENSIAL YANG EFISIEN UNTUK RATA-RATA POPULASI PADA SAMPLING ACAK SISTEMATIK

Fanny Wirastuti^{1*}, Bustami², Haposan Sirait²

¹Mahasiswa Program S1 Matematika

²Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau

Kampus Bina Widya Pekanbaru, 28293, Indonesia.

*fwirastuti@gmail.com

ABSTRACT

The estimators discussed in this paper are the ratio exponential estimator, the product exponential estimator and the combination of ratio exponential estimator and product exponential estimator on systematic random sampling, which is a review and an expansion correction from the article of Singh, et. al. [*Journal of Modern Applied Statistical Methods*, 10: 424-435]. Each estimator is a biased estimator and the mean square errors are determined. Estimator with the smallest mean square error is the most efficient estimator. An example is given at the end of the discussion.

Keywords: Ratio and product estimator exponential, systematic random sampling, bias, mean square error.

ABSTRAK

Penaksir yang dibahas merupakan penaksir rasio eksponensial, penaksir produk eksponensial, dan kombinasi penaksir rasio dan produk eksponensial pada sampling acak sistematis, yang merupakan *review* dari artikel Singh, et. al. [*Journal of Modern Applied Statistical Methods*, 10: 424-435]. Masing-masing penaksir merupakan penaksir bias dan ditentukan *mean square error*. Penaksir dengan *mean square error* terkecil merupakan penaksir yang efisien. Contoh numerik diberikan pada akhir pembahasan.

Kata Kunci: Penaksir rasio dan produk eksponensial, sampling acak sistematis, bias, *mean square error*.

1. PENDAHULUAN

Dalam artikel ini, dibahas rata-rata sampel yang merupakan penaksir untuk rata-rata populasi. Salah satu cara untuk meningkatkan ketelitian penaksiran adalah dengan menggunakan metode penaksir rasio. Metode ini digunakan jika suatu variabel pendukung X yang diketahui berkorelasi positif dengan variabel Y yang diteliti. Jika variabel X berkorelasi negatif dengan variabel Y yang diteliti, maka dapat digunakan metode produk. Penaksir rasio dan penaksir produk eksponensial untuk rata-rata

populasi pada sampling acak sederhana dinotasikan dengan \hat{Y}_{RE} dan \hat{Y}_{PE} , yang dirumuskan sebagai

$$\hat{Y}_{RE} = \bar{y} \exp\left(\frac{\bar{X} - \bar{x}}{\bar{X} + \bar{x}}\right)$$

$$\hat{Y}_{PE} = \bar{y} \exp\left(\frac{\bar{x} - \bar{X}}{\bar{x} + \bar{X}}\right)$$

dengan \bar{y} dan \bar{x} berturut-turut menyatakan rata-rata sampel dari Y dan X serta \bar{X} menyatakan rata-rata populasi X .

Dari penaksir rasio dan penaksir produk eksponensial sederhana, Singh, *et. al.* [4] memodifikasi menjadi penaksir rasio eksponensial \hat{Y}_{REsy} dan penaksir produk eksponensial \hat{Y}_{PEsy} pada sampling acak sistematis. Berdasarkan ide dari Singh & Taylor [3], penulis mengkombinasikan antara penaksir \hat{Y}_{REsy} dengan penaksir \hat{Y}_{PEsy} yang dinotasikan dengan \hat{Y}_{KESy} . Penaksir dengan menggunakan metode rasio dan produk merupakan penaksir bias. Ketelitian dari suatu penaksir yang bersifat bias ditinjau berdasarkan *mean square error (MSE)*. Masing-masing *MSE* penaksir dibandingkan dengan tujuan mendapatkan penaksir yang lebih efisien dengan tingkat ketelitian tinggi [2: h.21].

2. SAMPLING ACAK SISTEMATIK

Apabila banyaknya elemen dalam populasi cukup besar dan telah tersusun secara sistematis dalam suatu daftar atau telah tersusun menurut pola dan aturan tertentu, maka cara pengambilan sampel dengan sampling acak sederhana kurang tepat digunakan, sehingga digunakan sampling acak sistematis. Pengambilan sampel secara sistematis adalah suatu metode dimana hanya unsur pertama dari sampel yang diambil secara acak sedangkan unsur-unsur selanjutnya diambil secara sistematis menurut suatu pola tertentu. Misalkan terdapat suatu populasi yang terdiri dari N unit diberi nomor 1 sampai N dalam beberapa susunan. Untuk mengambil sebuah sampel berukuran n unit, ambil sebuah unit secara acak dari k unit yang pertama, selanjutnya ambil setiap kelipatan k . Dalam pengambilan sampel secara sistematis dikenal istilah interval pengambilan sampel yaitu perbandingan antara populasi N dengan sampel n yang dinotasikan dengan $k = N/n$ dimana k merupakan bilangan bulat positif [2:h.234].

Unit pertama yang dipilih secara acak, namakanlah unit pertama urutan ke- i . Selanjutnya unit kedua tidak lagi dilakukan pengambilan, akan tetapi dilakukan dengan sistematis yaitu unit kedua adalah urutan ke $i+k$, urutan ketiga $i+2k$ dan seterusnya hingga urutan ke- n yaitu $i+(n-1)k$, maka probabilitasnya adalah $1/k$ untuk seluruh n unit-unit tertentu yang terpilih dalam n pengambilan [5:h.417].

Misalkan suatu populasi berukuran N yang berkarakter Y dengan nilai variabel y_{ij} untuk masing-masing unit dengan $i = 1, 2, 3, \dots, k$; $j = 1, 2, 3, \dots, N$ menyatakan anggota sampel ke- j dari sampel sistematis ke- i . Rata-rata dari populasi \bar{Y} adalah

$$\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij}.$$

Kemudian diambil sampel berukuran n unit dari populasi berukuran N secara sistematis, dengan rata-rata sampel \bar{y}_{sy} adalah $\bar{y}_{sy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij}$, dan \bar{y}_{sy} merupakan penaksir untuk rata-rata populasi [5:h.425].

Untuk menentukan bias dan MSE pada sampling acak sistematis digunakan definisi variansi dan kovariansi.

Definisi 2.1 [1:h.73] Variansi $\hat{\beta}$ yang dinotasikan dengan $\text{var}(\hat{\beta})$ didefinisikan dengan

$$\text{var}(\hat{\beta}) = E[(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))^2].$$

Definisi 2.2 [1:h.174] Kovariansi dari pasangan variabel X dan Y dengan rata-rata untuk masing-masing variabel adalah μ_x dan μ_y dinotasikan dengan $\text{cov}(X, Y)$ adalah

$$\sigma_{XY} = \text{cov}(X, Y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)].$$

Selanjutnya digunakan koefisien korelasi antara pasangan dari unit-unit yang berada dalam sampel sistematis y dan dinotasikan dengan ρ_y diberikan sebagai berikut

$$\rho_y = \frac{E[(y_{ij} - \bar{Y})(y_{ij'} - \bar{Y})]}{E[(y_{ij} - \bar{Y})^2]}$$

dimana pembilangnya adalah rata-rata seluruh $\frac{kn-1}{2}$ pasangan yang berlainan dan penyebutnya keseluruhan nilai N dari y_{ij} . Karena penyebutnya adalah $\frac{(kn-1)S_y^2}{kn}$, maka diperoleh

$$\rho_y = \frac{2 \sum_{i=1}^k \sum_{j < j'}^n (y_{ij} - \bar{Y})(y_{ij'} - \bar{Y})}{kn-1} \cdot \frac{kn}{(kn-1)S_y^2}$$

dengan $S_y^2 = \left(\frac{1}{kn-1} \right) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{Y})^2$ merupakan variansi populasi Y .

Begitu juga halnya untuk koefisien korelasi antara pasangan dari unit-unit yang berada dalam sampel sistematis x dan dinotasikan dengan ρ_x diberikan sebagai berikut

$$\rho_x = \frac{2 \sum_{i=1}^k \sum_{j < j'}^n (x_{ij} - \bar{X})(x_{ij'} - \bar{X})}{kn(n-1)} \frac{kn}{(n-1)S_x^2}$$

dengan $S_x^2 = \left(\frac{1}{kn-1} \right) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{X})^2$ merupakan variansi dari populasi X .

3. PENAKSIR RASIO DAN PRODUK EKSPONENSIAL PADA SAMPLING ACAK SISTEMATIK

Penaksir rasio dan penaksir produk untuk rata-rata populasi telah banyak dikembangkan oleh para peneliti diantaranya Singh dan Taylor mengajukan penaksir rasio \hat{Y}_{REsy} dan produk \hat{Y}_{PEsy} [4], dirumuskan sebagai

$$\hat{Y}_{REsy} = \bar{y}_{sy} \exp\left(\frac{\bar{X} - \bar{x}_{sy}}{\bar{X} + \bar{x}_{sy}}\right) \quad (1)$$

$$\hat{Y}_{PEsy} = \bar{y}_{sy} \exp\left(\frac{\bar{x}_{sy} - \bar{X}}{\bar{x}_{sy} + \bar{X}}\right) \quad (2)$$

dengan \bar{Y} dan \bar{X} merupakan rata-rata populasi untuk Y dan X , sedangkan \bar{y}_{sy} dan \bar{x}_{sy} merupakan rata-rata sampel dari populasi Y dan X . Bentuk lain dari rata-rata sampel dapat ditulis [4:h.427] sebagai berikut

$$\bar{y}_{sy} = \bar{Y} (1 + e_0)$$

$$\bar{x}_{sy} = \bar{X} (1 + e_1)$$

Terdapat dua variabel y_{ij} dan x_{ij} dimana y_{ij} adalah unit dari populasi Y dan x_{ij} adalah unit dari populasi X , sehingga populasi X dari x_{ij} harus diketahui sebagai informasi pendukung yang berkorelasi dengan variabel y_{ij} yang akan ditaksir. Penaksir ketiga adalah kombinasi penaksir rasio eksponensial dengan penaksir produk eksponensial \hat{Y}_{KEsy} dengan bentuk :

$$\hat{Y}_{KEsy} = \bar{y}_{sy} \exp\left[\alpha \left(\frac{\bar{X} - \bar{x}_{sy}}{\bar{X} + \bar{x}_{sy}}\right) + (1 - \alpha) \left(\frac{\bar{x}_{sy} - \bar{X}}{\bar{x}_{sy} + \bar{X}}\right)\right] \quad (3)$$

dengan α menyatakan konstanta, $0 < \alpha < 1$.

Ketiga penaksir rasio dan produk eksponensial untuk rata-rata populasi tersebut merupakan penaksir bias. Untuk mengetahui penaksir yang lebih efisien akan dibandingkan MSE masing-masing penaksir. Semakin kecil MSE suatu penaksir yang diperoleh maka akan menghasilkan penaksir yang efisien.

4. BIAS DAN *MSE* PENAKSIR RASIO DAN PRODUK EKSPONENSIAL UNTUK RATA-RATA POPULASI

Masing-masing penaksir yang dibahas merupakan penaksir bias. Kemudian akan ditentukan bias dan *MSE* dari masing-masing penaksir. Selanjutnya akan ditentukan penaksir yang efisien dengan membandingkan *MSE* dari setiap penaksir. Suatu penaksir dikatakan efisien apabila mempunyai *MSE* yang minimum.

Bias dan *MSE* penaksir rasio eksponensial, produk eksponensial dan kombinasi penaksir rasio eksponensial dengan penaksir produk eksponensial untuk rata-rata populasi pada sampling acak sistematis yaitu:

1. Bias dari persamaan (1) adalah

$$B_{REsy} \approx \frac{1}{n} \bar{Y} \left(\frac{C_x^2}{8} \right) (1 + \rho_x (n-1)) \left(3 - 4C \sqrt{\frac{1 + \rho_y (n-1)}{1 + \rho_x (n-1)}} \right)$$

dengan $C = \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x}$, $\rho_{xy} = \frac{S_{yx}}{S_y S_x}$, $C_y = \frac{S_y}{\bar{Y}}$, $C_x = \frac{S_x}{\bar{X}}$, $R = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$.

dan *MSE*-nya adalah

$$MSE(\hat{Y}_{REsy}) \approx \frac{1}{n} \left(S_y^2 + \frac{1}{4} R^2 S_x^2 - R \rho_{xy} S_x S_y \right) (1 + (n-1)\rho).$$

2. Bias dari persamaan (2) diperoleh

$$B_{PEsy} \approx \frac{1}{n} \bar{Y} \left(\frac{C_x^2}{8} \right) (1 + \rho_x (n-1)) \left(4C \sqrt{\frac{1 + \rho_y (n-1)}{1 + \rho_x (n-1)}} - 1 \right)$$

dan *MSE*-nya adalah

$$MSE_{PEsy} \approx \frac{1}{n} \left(S_y^2 + \frac{1}{4} R^2 S_x^2 + R \rho_{xy} S_x S_y \right) (1 + (n-1)\rho).$$

3. Bias dari persamaan (3) diperoleh

$$B_{KEsy} \approx \frac{1}{n} \bar{Y} \left(\frac{C_x^2}{8} \right) (1 + \rho_x (n-1)) \left(-4C \sqrt{\frac{1 + \rho_y (n-1)}{1 + \rho_x (n-1)}} - 1 + 4\alpha - 8\alpha C \sqrt{\frac{1 + \rho_y (n-1)}{1 + \rho_x (n-1)}} \right)$$

dan *MSE*-nya adalah

$$MSE(\hat{Y}_{KEsy}) \approx \frac{1}{n} \left(S_y^2 + \left(\alpha - \frac{1}{2} \right)^2 R^2 S_x^2 - 2 \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) R \rho_{xy} S_x S_y \right) (1 + (n-1)\rho) \tag{4}$$

Dengan menentukan nilai optimum dari α pada persamaan (4), sehingga diperoleh

$MSE(\hat{r}_{KEsy})_{min}$, yaitu

$$MSE(\hat{r}_{KEsy})_{min} \approx \frac{1}{n}(S_y^2 - \rho_{xy}^2 S_y^2)(1 + (n-1)\rho)$$

Selanjutnya ditentukan penaksir yang efisien diantara ketiga penaksir rasio eksponensial dan produk eksponensial yang diajukan, yaitu

1. Perbandingan antara $MSE(\hat{r}_{REsy})$ dengan $MSE(\hat{r}_{PEsy})$ diperoleh

$$MSE(\hat{r}_{REsy}) < MSE(\hat{r}_{PEsy}),$$

jika

$$\rho > \frac{-1}{n-1}$$

2. Perbandingan antara $MSE(\hat{r}_{KEsy})$ dengan $MSE(\hat{r}_{REsy})$ diperoleh

$$MSE(\hat{r}_{KEsy}) < MSE(\hat{r}_{REsy}),$$

jika

$$\rho > \frac{-1}{n-1}$$

3. Perbandingan antara $MSE(\hat{r}_{KEsy})$ dengan $MSE(\hat{r}_{PEsy})$ diperoleh

$$MSE(\hat{r}_{KEsy}) < MSE(\hat{r}_{PEsy}),$$

jika

$$\rho > \frac{-1}{n-1}$$

4. CONTOH

Berikut ini diberikan dua contoh, yang pertama digunakan data [6] tentang lingkaran batang (Y) dan umur pohon dendran (X) yang tumbuh di Pulau Bengkalis seperti tertera pada Tabel 1. Contoh pertama ini digunakan untuk metode penaksir rasio.

Tabel 1. Lingkaran Batang dan Umur Pohon Dendran yang Tumbuh di Pulau Bengkalis

No	Daerah Asal	Lingkaran Batang (cm)	Umur (Tahun)	No	Daerah Asal	Lingkaran Batang (cm)	Umur (Tahun)
1	Air Putih 1	54	28	26	Sungai Alam 4	116	65
2	Air Putih 2	50	28	27	Sungai Alam 5	91	59
3	Jangkang 1	48	12	28	Sungai Alam 6	62	40
4	Jangkang 2	42	10	29	Sungai Alam	60	40

					7		
5	Jangkang 3	44	10	30	Sungai Alam 8	49	32
6	Jangkang 4	47	15	31	Sungai Alam 9	48	32
7	Jangkang 5	45	12	32	Sungai Alam 10	52	37
8	Jangkang 6	42	10	33	Sungai Alam 11	48	25
9	Jangkang 7	47	14	34	Sungai Alam 12	48.5	25
10	Jangkang 8	47.5	14	35	Sungai Alam 13	50	25
11	Jangkang 9	49	15	36	Sungai Alam 14	52	29
12	Jangkang 10	42	12	37	Sungai Alam 15	51	26
13	Ketam Putih 1	72	41	38	Sungai Alam 16	50	34
14	Ketam Putih 2	64	41	39	Sungai Alam 17	67	41
15	Padekik 1	55	39	40	Sungai Alam 18	72	41
16	Padekik 2	52	35	41	Temberan 1	69	43
17	Padekik 3	52	25	42	Temberan 2	71	43
18	Pangkalan Batang 1	49	24	43	Temberan 3	53	36
19	Pangkalan Batang 2	45	18	44	Temberan 4	52	36
20	Sebauk 1	56	35	45	Temberan 5	54	38
21	Sebauk 2	57	35	46	Temberan 6	48	29
22	Sebauk 3	61	40	47	Temberan 7	45	20
23	Sungai Alam 1	47	23	48	Temberan 8	43	20
24	Sungai Alam 2	52	35	49	Temberan 9	45	23
25	Sungai Alam 3	51	37	50	Temberan 10	48	23

Sumber [6].

$$\begin{aligned}
 N &= 50 & \bar{X} &= 29,4 & S_y^2 &= 170,3061 \\
 n &= 10 & \bar{Y} &= 54,3 & S_x^2 &= 150,9387 \\
 \rho_{xy} &= 0,8426 & R^2 &= 1,84693
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan informasi dari data tersebut, diperoleh bahwa $MSE_{KEsy} < MSE_{REsy} < MSE_{PEsy}$ yaitu $4,9566 < 4,9863 < 5,58949$ dengan $\alpha = 0,5$.

5. KESIMPULAN

Pada artikel ini telah dibahas tiga penaksir rasio-produk eksponensial pada sampling acak sistematis. Penaksir yang dibahas merupakan penaksir bias, penaksir yang efisien adalah penaksir yang mempunyai MSE terkecil. Setelah membandingkan MSE dari ketiga penaksir eksponensial untuk rata-rata populasi pada sampling acak sistematis, diperoleh bahwa MSE minimum dari kombinasi penaksir rasio dan produk eksponensial merupakan MSE terkecil. MSE kombinasi penaksir rasio dan produk eksponensial minimum diperoleh dengan menentukan nilai α yang optimum. Kombinasi penaksir rasio dan produk eksponensial merupakan penaksir yang lebih efisien dibanding penaksir rasio eksponensial dan penaksir produk eksponensial.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bain, L. J & M. Engelhardt. 1991. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, Second Edition. Duxbury Press, California.
- [2] Cochran, W.G. 1991. *Teknik Penarikan Sampel, Edisi Ketiga*. Terj. Dari *Sampling Techniques*, oleh Rudiansyah & E.R Osman. Penerbit Universitas Indonesia, Jakarta.
- [3] Singh, H.P. & R. Tailor. 2005. Estimation of Finite Population Mean with Known Coefficient of Variation of an Auxiliary Character. *Statistica, anno LXV*, 3: 301-313.
- [4] Singh, H.P., R. Tailor & N.K. Jatwa. 2011. Modified Ratio and Product Estimators for Population Mean in Systematic Sampling. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, 10: 424-435.
- [5] Sukhatme, P.V. 1957. *Sampling Theory of Surveys with Applications*. The Indian Council of Agricultural Research, New Delhi.
- [6] Sefni, R. 2007. Keanekaragaman Genetik Plasma Nutfah Drendan (*Lansium Aqueum Jack*) di Pulau Bengkalis Provinsi Riau dengan Pendekatan Morfologi. Skripsi Jurusan Biologi FMIPA Universitas Riau, Pekanbaru.