METODE BERTIPE STEFFENSEN DENGAN ORDE KONVERGENSI OPTIMAL UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NONLINEAR

Sarbaini[1*], **Asmara Karma**[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*Sarbainiunri@yahoo.com

ABSTRACT

This article discusses a modification of a third order Steffensen-type method, by adding three different weight functions into the third order Steffensen-type method, so that we obtain three different correction Steffensen-type methods. These methods are of order three and require three function evaluations per iteration so that their index of efficiency is 1.587. Computational results show the correction Steffensen-type methods are competitive enough in their class.

Keywords: *nonlinear equations, order of convergence, COC, index of efficiency, Steffensen method.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas modifikasi metode bertipe Steffensen berorde tiga dengan menambahkan tiga fungsi bobot yang berbeda ke metode bertipe Steffensen berorde tiga, sehingga diperoleh tiga perbaikan metode bertipe Steffensen berorde empat yang mempunyai tiga perhitungan fungsi pada setiap iterasinya, sehingga indeks efisiensi metode-metode ini adalah 1.587. Hasil perbandingan komputasi menunjukkan bahwa perbaikan metode bertipe Steffensen cukup kompetitif dibanding metode sekelas.

Kata kunci: *persamaan nonlinear, orde konvergensi, COC, indeks efisiensi, metode Steffensen.*

1. PENDAHULUAN

Pendekatan metematika dalam berbagai bidang ilmu yang sering muncul adalah bagaimana menemukan solusi dari persamaan nonlinear

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Metode analitik tidak dapat menyelesaikan semua kasus dari persamaan (1), maka metode numerik menjadi alternatif. Metode numerik yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan (1) adalah metode Newton dengan bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f'(x_n) \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{2}$$

yang memiliki kekonvergenan orde dua [1, h. 71-72]. Namun metode Newton tidak dapat diterapkan jika turunan fungsi tidak diketahui pada sebarang interval. Untuk mengatasi ini, Steffensen mengganti turunan pertama $f'(x_n)$ pada persamaan (2) dengan *forward difference*

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}{f(x_n)}, \tag{3}$$

sehingga diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)},$$

yang dikenal dengan metode Steffensen dan mempunyai orde konvergensi dua [4, h. 278]. Zheng et.al [9] serta Feng dan He [3] telah mengembangkan metode bertipe Steffensen bebas turunan dengan tiga evaluasi fungsi dan berorde 3. Cordero [2] memperkenalkan metode bebas turunan dalam metode Ostrowski [7] dengan aproksimasi beda tengah dengan bentuk iterasinya

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{\left(\dfrac{af(y_n) - bf(w_n)}{y_n - w_n}\right) + \left(\dfrac{cf(y_n) - df(x_n)}{y_n - x_n}\right)},$$
$$a = c = 1,\ b + d = 1,$$

yang berorde konvergensi empat [2] dan selanjutnya disebut dengan (MC). Selain itu Ren [8] (MR) memodifikasi metode Steffensen dengan bentuk iterasinya sebagai berikut

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f[x_n, y_n] + f[y_n, w_n] - f[x_n, w_n] + a(y_n - x_n)(y_n - w_n)},$$

yang berorde konvergensi empat [8], bila $a = 1$.

Dari penjelasan di atas, metode Ren dan Cordero memerlukan 3 evaluasi fungsi serta memiliki orde konvergensi 4. Kung dan Traub [6] mendefinisikan bahwa suatu metode iterasi dikatakan optimal jika orde konvergensinya memenuhi 2^{w-1} dengan w banyaknya evaluasi fungsi. Sehingga dapat disimpulkan metode Ren dan Cordero merupakan metode iterasi optimal.

Artikel ini juga membahas tentang metode iterasi optimal, sehingga dapat dijadikan alternatif, yang merupakan memodifikasi metode Steffensen dengan menambahkan suatu parameter β dan fungsi bobot dengan tujuan meningkatkan orde kekonvergensi dan indeks efisiensi. Artikel ini merupakan review dan koreksi dari artikel yang ditulis oleh M. A. Hafiz [5] yang berjudul *Solving Nonlinear Equations Using Steffensen Type Methods With Optimal Order of Convergence.* Pembahasan dimulai di bagian dua dengan menjelaskan metode bertipe Steffensen dan analisa kekonvergenannya. Selanjutnya dibagian tiga dibahas tentang perbaikan metode bertipe Steffensen dan analisa kekonvergenannya, kemudian dibagian empat melakukan perbandingan numerik.

2. METODE BERTIPE STEFFENSEN UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NONLINEAR

Pada bagian ini dibahas metode bertipe Steffensen untuk menyelesaikan persamaan nonlinear dan dilanjutkan dengan analisa kekonvergenannya.

2.1 Metode Bertipe Steffensen

Perhatikan metode iterasi dua langkah berikut,

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{4}$$

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}. \tag{5}$$

Bila turunan pertama $f'(x_n)$ ditaksir menggunakan *forward difference* dengan parameter β, sehingga diperoleh

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n + \beta f(x_n)) - f(x_n)}{\beta f(x_n)},$$

dan dengan memisalkan $w_n = x_n + \beta f(x_n)$ maka

$$f'(x_n) = \frac{f(w_n) - f(x_n)}{\beta f(x_n)}. \tag{6}$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (6) ke (4) dan (5) sehingga didapat

$$w_n = x_n + \beta f(x_n), \tag{7}$$

$$y_n = x_n - \frac{\beta f(x_n)^2}{f(w_n) - f(x_n)}, \tag{8}$$

$$x_{n+1} = y_n - \frac{\beta f(y_n) f(x_n)}{f(w_n) - f(x_n)}. \tag{9}$$

Persamaan (7) ke (8) dan (9) adalah Metode Bertipe Steffensen (MBS).

2.2 Analisa Kekonvergenan Metode Bertipe Steffensen

Teorema 1 Misal r akar sederhana dari fungsi terdiferensial secukupnya $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan I interval buka. Jika x_0 cukup dekat ke r, maka MBS berorde kekonvergenan 3 dan memenuhi persamaan *error*

$$e_{n+1} = \left(\frac{2c_2^2}{c_1^2} + \frac{3\beta c_2^2}{c_1} + c_2^2\beta^2\right)e_n^3 + \mathcal{O}(e_n^4).$$

Bukti: Misal r akar sederhana dari persamaan nonlinear $f(x) = 0$. Dengan mengekspansikan $f(x_n)$ di sekitar $x_n = r$ dan memisalkan $c_k = \dfrac{f^{(k)}(r)}{k!}, k = 1, 2, 3, 4$ serta $e_n = x_n - r$, maka diperoleh

$$f(x_n) = c_1 e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4 + \mathcal{O}(e_n^5). \tag{10}$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (10) ke persamaan (7) dan disederhanakan, dan karena $x_n = e_n + r$ maka didapat

$$w_n = r + (1 + \beta c_1)e_n + \beta c_2 e_n^2 + \beta c_3 e_n^3 + \beta c_4 e_n^4 + \mathcal{O}(e_n^5). \tag{11}$$

Ekspansikan $f(w_n)$ di sekitar $w_n = r$ dan disederhanakan, selanjutnya substitusikan ke persamaan (11) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} f(w_n) =& \big(c_1 + \beta c_1^2\big)e_n + (c_2\beta^2 c_1^2 + 3c_1\beta c_2 + c_2)e_n^2 + \cdots + \big(c_4 + 5c_2\beta c_3 \\ &+ 6c_4\beta^2 c_1^2 + 5c_1\beta c_4 + 8c_2\beta^2 c_1 c_3 + 3c_3\beta^3 c_1^2 c_2 + \beta^2 c_2^3 + 4c_4\beta^3 c_1^3 \\ &+ c_4\beta^4 c_1^4\big)e_n^4 + \mathcal{O}\big(e_n^5\big). \end{aligned} \tag{12}$$

Selanjutnya dihitung $\dfrac{\beta f(x_n)^2}{f(w_n) - f(x_n)}$ dengan menggunakan persamaan (10) dan (12), didapat

$$\begin{aligned} \frac{\beta f(x_n)^2}{f(w_n) - f(x_n)} =& e_n + \left(-\frac{c_2}{c_1} - \beta c_2\right)e_n^2 + \cdots + \Bigg(-6c_4\beta - c_2^3\beta^3 + \cdots \\ &- \frac{4c_2^3}{c_1^3}\Bigg)e_n^4 + \mathcal{O}(e_n^5). \end{aligned} \tag{13}$$

Kemudian substitusikan persamaan (13) ke persamaan (8) dan diperoleh

$$\begin{aligned} y_n =& r + \left(\frac{c_2}{c_1} + \beta c_2\right)e_n^2 + \cdots + \left(\frac{5\beta c_2^3}{c_1^2} - 7c_3\beta^2 c_2 + \cdots - 2c_1 c_3 \beta^3 c2\right)e_n^4 \\ &+ \mathcal{O}(e_n^5). \end{aligned} \tag{14}$$

Mengekspansikan $f(y_n)$ di sekitar $y_n = r$ dan disederhanakan, selanjutnya substitusikan ke (14), didapat

$$\begin{aligned} f(y_n) = (c_2 + c_1\beta c_2)e_n^2 + \cdots + \big(&-2c_3\beta^3 c_1^2 c_2 - 10c_2\beta c_3 + c_4\beta^3 c_1^3 + 4\beta^2 c_2^3 \\ &+ 3c_4 - \frac{7c_2c_3}{c_1} + 4c_4\beta^2 c_1^2 + \frac{5c_2^3}{c_1^2} + 6c_1\beta c_4 + c_1 c_2^3\beta^3 + \frac{7c_2^3\beta}{c_1} \\ &- 7c_2\beta^2 c_1 c_3\big)e_n^4 + \mathcal{O}(e_n^5). \end{aligned} \tag{15}$$

Selanjutnya dihitung $\dfrac{\beta f(y_n)f(x_n)}{f(w_n)-f(x_n)}$, dengan menggunakan persamaan (15), (10) dan (12), setelah disederhanakan didapat

$$\frac{\beta f(y_n)f(x_n)}{f(w_n)-f(x_n)} = \left(\frac{c_2}{c_1}+\beta c_2\right)e_n^2 + \cdots + \left(6c_4\beta + 3c_2^3\beta^3 + \cdots + \frac{13c_2^3}{c_1^3}\right)e_n^4 + \mathcal{O}(e_n^5). \tag{16}$$

Kemudian substitusikan (14) dan (16) ke persamaan (9), diperoleh

$$e_{n+1} = \left(\frac{2c_2^2}{c_1^2} + \frac{3\beta c_2^2}{c_1} + c_2^2\beta^2\right)e_n^3 + \mathcal{O}(e_n^4).$$

3. PERBAIKAN METODE BERTIPE STEFFENSEN DENGAN ORDE KONVERGENSI OPTIMAL UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NONLINEAR

Pada bagian ini dibahas tiga perbaikan metode bertipe Steffensen dengan orde konvergensi optimal untuk menyelesaikan persamaan nonlinear dengan mengoptimalkan orde konvergensinya tanpa menambah evaluasi fungsi.

3.1 Perbaikan Metode Bertipe Steffensen

Dari analisa kekonvergenan dapat diketahui bahwa MBS berorde kekonvergenan 3. Kung dan Traub [6] mendefinisikan bahwa suatu metode iterasi dikatakan optimal jika orde konvergensinya memenuhi 2^{w-1} dengan w banyaknya evaluasi fungsi. Sehingga dapat disimpulkan MBS tidak memenuhi kriteria metode iterasi optimal, oleh karena itu maka ditambahkan 3 fungsi bobot ke MBS untuk memperoleh metode iterasi optimal tanpa menambahkan evaluasi fungsi. Adapun fungsi bobotnya sebagai berikut

$$W_1 = \frac{4}{1+\dfrac{f[x_n,y_n]f[w_n,y_n]\beta^2 f(x_n)^2}{(f(w_n)-f(x_n))^2}} - 1 \tag{17}$$

$$W_2 = \frac{f[w_n,x_n]^2}{f[x_n,y_n]f[w_n,y_n]}\left(1+\frac{f(y_n)f[w_n,x_n]^2(f[w_n,x_n]-f[x_n,y_n])}{f(x_n)(f[x_n,y_n]f[w_n,y_n])^2}\right), \tag{18}$$

$$W_3 = \frac{f(x_n)f[x_n,y_n]f[w_n,y_n]f[w_n,x_n]^2}{f(x_n)f[x_n,y_n]^2f[w_n,y_n]^2 - f(y_n)(f[w_n,x_n]-f[x_n,y_n])f[w_n,x_n]^3}, \tag{19}$$

dengan $f[x_n,y_n]$, $f[w_n,y_n]$ dan $f[w_n,x_n]$ adalah beda terbagi orde pertama [1, h. 111-113] berikut

$$f[x_1,x_0] = \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = f[x_0,x_1]. \tag{20}$$

Ketiga fungsi bobot pada persamaan (17), (18) dan (19) selanjutnya diaplikasikan ke MBS untuk memperoleh tiga metode baru bertipe Steffensen.

Aplikasikan fungsi bobot W_1 pada persamaan (17) ke persamaan (9), dan bentuk metode iterasinya menggunakan persamaan (7) dan (8) yaitu

$$w_n = x_n + \beta f(x_n), \tag{21}$$

$$y_n = x_n - \frac{\beta f(x_n)^2}{f(w_n) - f(x_n)}, \tag{22}$$

$$x_{n+1} = y_n - \frac{\beta f(y_n) f(x_n)}{f(w_n) - f(x_n)} W_1. \tag{23}$$

Persamaan (21), (22) dan (23) selanjutnya disebut juga dengan Perbaikan Metode Bertipe Steffensen 1 atau disingkat dengan PMBS1.

Selanjutnya aplikasikan fungsi bobot W_2 pada persamaan (18) ke persamaan (9), dan bentuk iterasinya menggunakan (7) dan (8) yaitu

$$w_n = x_n + \beta f(x_n), \tag{24}$$

$$y_n = x_n - \frac{\beta f(x_n)^2}{f(w_n) - f(x_n)}, \tag{25}$$

$$x_{n+1} = y_n - \frac{\beta f(y_n) f(x_n)}{f(w_n) - f(x_n)} W_2. \tag{26}$$

Persamaan (24), (25) dan (26) tersebut selanjutnya dinamakan dengan PMBS2 atau Perbaikan Metode Bertipe Steffensen 2.

Langkah berikutnya aplikasikan fungsi bobot W_3 pada persamaan (19) ke persamaan (9), dan bentuk iterasinya menggunakan (7) dan (8) yaitu

$$w_n = x_n + \beta f(x_n), \tag{27}$$

$$y_n = x_n - \frac{\beta f(x_n)^2}{f(w_n) - f(x_n)}, \tag{28}$$

$$x_{n+1} = y_n - \frac{\beta f(y_n) f(x_n)}{f(w_n) - f(x_n)} W_3. \tag{29}$$

Persamaan (27), (28) dan (29) selanjutnya dinamakan dengan PMBS3 yang merupakan singkatan dari Perbaikan Metode Bertipe Steffensen 3.

3.2 Analisa Kekonvergenan Perbaikan Metode Bertipe Steffensen

Berikut diberikan beberapa teorema untuk membuktikan orde kekonvergenan dari PMBS1, PMBS2 dan PMBS3.

Teorema 2 Misal r akar sederhana dari fungsi terdiferensial secukupnya $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan I interval buka. Jika x_0 cukup dekat ke r, maka PMBS1 berorde kekonvergenan 4 dan memenuhi persamaan *error*

$$e_{n+1} = \left(\frac{c_2^3 \beta^3}{2} - \frac{c_2 c_3}{c_1^2} - c_3 \beta^2 c_2 + \frac{9 c_2^3 \beta^2}{2 c_1} - \frac{2 c_2 \beta c_3}{c_1} + \frac{4 c_2^3}{c_1^3} + \frac{8 \beta c_2^3}{c_1^2} \right) e_n^4 + \mathcal{O}(e_n^5).$$

Bukti: Langkah pertama, dihitung $f[w_n, y_n]$ dengan menggunakan persamaan (12), (15), (11) dan (14), maka setelah disederhanakan diperoleh

$$f[w_n, y_n] = c_1 + (c_2 + c_1\beta c_2)e_n + \cdots + \left(-\frac{3c_2^4}{c_1^3} - 36c_1^2c_3\beta^4c_2^2 + \cdots + 7\beta c_3^2\right)e_n^4 + \mathcal{O}(e_n^5). \quad (30)$$

Selanjutnya dihitung $f[x_n, y_n]$ dengan menggunakan persamaan (10), (15) dan (14), maka setelah disederhanakan diperoleh

$$f[x_n, y_n] = c_1 + c_2e_n + \left(\frac{c_2^2}{c_1} + c_3 + \beta c_2^2\right)e_n^2 + \cdots + \left(\beta^2c_1c_3^2 - 7\beta^2c_2^2c_3 + \cdots + \frac{4c_4c_2}{c_1}\right)e_n^4 + \mathcal{O}(e_n^5). \quad (31)$$

Kemudian substitusikan persamaan (31), (30), (10) dan (12) ke persamaan (17), setelah disederhanakan diperoleh

$$W_1 = 1 + \left(\frac{2c_2}{c_1} + \beta c_2\right)e_n + \cdots + \left(\frac{29c_3\beta^2c_2^2}{c_1} + \frac{8c_3^2}{c_1^2} + \cdots + \frac{11c_2^4\beta^3}{2c_1}\right)e_n^4 + \mathcal{O}\big(e_n^5\big). \quad (32)$$

Kemudian substitusikan persamaan (32) ,(16) dan (14) ke persamaan (23) setelah disederhanakan diperoleh

$$e_{n+1} = \left(\frac{c_2^3\beta^3}{2} - \frac{c_2c_3}{c_1^2} - c_3\beta^2c_2 + \frac{9c_2^3\beta^2}{2c_1} - \frac{2c_2\beta c_3}{c_1} + \frac{4c_2^3}{c_1^3} + \frac{8\beta c_2^3}{c_1^2}\right)e_n^4 + \mathcal{O}(e_n^5).$$

Teorema 3 Misal r akar sederhana dari fungsi terdiferensial secukupnya $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan I interval buka. Jika x_0 cukup dekat ke r, maka PMBS2 berorde kekonvergenan 4 dan memenuhi persamaan *error*

$$e_{n+1} = \left(-3c_2^3c_1^8\beta^2 - c_2^3c_1^9\beta^3 - \frac{c_2c_3}{c_1^2} - 3c_2^3c_1^7\beta + \frac{2c_2^3}{c_1^3} + \frac{5c_4}{c_1} - c_2^3c_1^6 - c_3\beta^2c_2 - \frac{2c_2\beta c_3}{c_1} + c_1^2c_4\beta^3 + 4c_1c_4\beta^2 + \frac{4\beta c_2^3}{c_1^2} + \frac{2c_2^3}{c_1} + 6\beta c_4\right)e_n^4 + \mathcal{O}(e_n^5).$$

Bukti: Langkah pertama, dihitung $f[w_n, x_n]$ dengan menggunakan persamaan (12), (14) dan (11), setelah disederhanakan diperoleh

$$f[w_n, x_n] = c_1 + (c_1\beta c_2 + 2c_2)e_n + \cdots + \big(7c_4c_2\beta + 3c_4\beta^3c_1^2c_2 + \beta^2c_2^2c_3 + 2\beta^2c_1c_3^2 + 8c_2\beta^2c_1c_4 + 3\beta c_3^2\big)e_n^4 + \mathcal{O}(e_n^5). \quad (33)$$

Kemudian substitusikan persamaan (33), (30), (31), (15) dan (10) ke persamaan (18) diperoleh

$$W_2 = 1 + \left(\beta c_2 + \frac{2c_2}{c_1}\right)e_n + \cdots + \big(9c_1^8c_2^2c_3\beta^2 - c_1^7c_2^2\beta c_3 + 5c_1^9c_2^2\beta^3c_3 + \cdots - 2c_2^2c_3\beta^3\big)e_n^4 + \mathcal{O}(e_n^5). \quad (34)$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (16), (34) dan (14) ke persamaan (26), setelah disederhanakan diperoleh

$$\begin{aligned} e_{n+1} = \bigg(& -3c_2^3c_1^8\beta^2 - c_2^3c_1^9\beta^3 - \frac{c_2c_3}{c_1^2} - 3c_2^3c_1^7\beta + \frac{2c_2^3}{c_1^3} + \frac{5c_4}{c_1} - c_2^3c_1^6 - c_3\beta^2c_2 \\ & - \frac{2c_2\beta c_3}{c_1} + c_1^2c_4\beta^3 + 4c_1c_4\beta^2 + \frac{4\beta c_2^3}{c_1^2} + \frac{2c_2^3}{c_1} + 6\beta c_4\bigg)e_n^4 + \mathcal{O}(e_n^5). \end{aligned}$$

Teorema 4 Misal r akar sederhana dari fungsi terdiferensial secukupnya $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan I interval buka. Jika x_0 cukup dekat ke r, maka PMBS3 berorde kekonvergenan 4 dan memenuhi persamaan *error*

$$\begin{aligned} e_{n+1} = & \bigg(-7c_3\beta^2c_2 + \frac{2c_2^3\beta^2}{c_1} - 2c_1c_3\beta^3c_2 - \frac{3c_2c_3}{c_1^2} - \frac{8c_2\beta c_3}{c_1} + \frac{4c_2^3}{c_1^3} + \frac{6\beta c_2^3}{c_1^2}\bigg)e_n^4 \\ & + \mathcal{O}(e_n^5). \end{aligned}$$

Bukti: Substitusikan persamaan (10), (31), (30), (15) dan (33) ke persamaan (19) diperoleh

$$\begin{aligned} W_3 = 1 + & \left(\beta c_2 + \frac{2c_2}{c_1}\right)e_n + \cdots + \big(16c_1c_3\beta^4c_2^2 - 40c_1c_2^4\beta^5 + 6c_1c_3^2\beta^3 + \cdots \\ & - 38c_2^4\beta^4\big)e_n^4 + \mathcal{O}(e_n^5). \end{aligned} \tag{35}$$

Kemudian substitusikan persamaan (16), (35) dan (14) ke persamaan (29) diperoleh

$$\begin{aligned} e_{n+1} = & \bigg(-7c_3\beta^2c_2 + \frac{2c_2^3\beta^2}{c_1} - 2c_1c_3\beta^3c_2 - \frac{3c_2c_3}{c_1^2} - \frac{8c_2\beta c_3}{c_1} + \frac{4c_2^3}{c_1^3} + \frac{6\beta c_2^3}{c_1^2}\bigg)e_n^4 \\ & + \mathcal{O}(e_n^5). \end{aligned}$$

Dengan menggunakan definisi optimal 2^{w-1} [6], dapat disimpulkan bahwa PMBS1, PMBS2 dan PMBS3 merupakan metode iterasi optimal.

4. PERBANDINGAN NUMERIK

Pada bagian ini dilakukan uji komputasi membandingan kecepatan dalam menemukan akar persamaan antara metode Ren (MR), metode Cordero (MC), MBS, PMBS1, PMBS2 dan PMBS3 untuk menyelesaikan persamaan nonlinear. Berikut ini diberikan beberapa fungsi yang akan dilakukan uji komputasinya untuk membandingkan metode-metode tersebut

1. $f_1(x) = \sin(x)^2 - x^2 + 1$,
2. $f_2(x) = \cos(x) - x$,
3. $f_3(x) = x^2 - e^x - 3x + 2$,
4. $f_4(x) = \sqrt{x} - \cos(x)$,
5. $f_5(x) = \sin(x) - \dfrac{x}{100}$.

Simulasi numerik menggunakan program Maple dengan toleransi 1.0×10^{-250}. Hasil perbandingan numerik dapat dilihat pada Tabel 1.

Dari Tabel 1 kolom pertama menyatakan nomor fungsi, kolom kedua merupakan tebakan awal, kolom ketiga merupakan metode-metode yang dibandingkan, kolom keempat adalah banyaknya iterasi yang digunakan untuk mencapai akar, kolom kelima menyatakan harga mutlak fungsi untuk setiap akar pendekatan, kolom keenam merupakan selisih dari dua akar pendekatan dan kolom terakhir adalah akar pendekatan dari masing-masing metode yang dibandingkan.

Berdasarkan Tabel 1 semua metode yang diberikan berhasil menemukan akar yang sama untuk semua contoh fungsi yang diberikan dengan tebakan awal yang sama. Tampak bahwa untuk $f_1(x)$ metode MC, MR dan PMBS2 memerlukan iterasi lebih sedikit daripada MBS, PMBS1 dan PMBS3. Tetapi untuk *error* MBS, PMBS1 dan PMBS3 lebih kecil dari pada MBS, PMBS1 dan PMBS3. Selanjutnya untuk $f_2(x)$ *error* pada metode MBS lebih baik dari pada metode lainnya, tetapi kalah efektif untuk jumlah iterasi mencapai akar persamaan dari pada metode pembanding lainnya.

Sedangkan metode MC, PMBS1, PMBS2 dan PMBS3 lebih efektif daripada MR dan MBS untuk jumlah iterasi untuk memperoleh akar pada fungsi ke3. Akan tetapi untuk *error* yang dihasilkan metode MR dan MBS lebih baik. Kemudian untuk $f_4(x)$ *error* untuk MC, PMBS1, PMBS2 dan PMBS3 lebih besar daripada metode lainnya, tetapi untuk jumlah iterasinya sedikit lebih baik dari pada metode lainnya. Untuk contoh fungsi terakhir seperti yang terlihat pada Tabel 1, metode MC, PMBS1, PMBS2 dan PMBS3 memerlukan satu iterasi lebih banyak daripada metode MR dan MBS untuk mencapai akar. Tetapi untuk *error* yang dihasilkan lebih besar daripada metode pembanding lainnya.

Sehingga dapat disimpulkan, untuk menyelesaikan persamaan suatu persamaan nonlinear MBS, PMBS1, PMBS2 dan PMBS3 mempunyai banyak iterasi yang hampir sama dengan metode pembanding MR dan MC. Begitu juga untuk harga mutlak fungsi dan selisih dua akar pendekatan yang relatif sama antara metode pembanding dengan metode yang dibandingkan. Secara keseluruhan dapat disimpulkan PMBS1, PMBS2 dan PMBS3 sama relatif efektifnya untuk mencapai akar pendekatan dengan metode Ren dan metode Cordero.

Tabel 1: Perbandingan Uji Komputasi untuk MC, MR, MBS, PMBS1, PMBS2 dan PMBS3

No	x_0	Metode	n	$\|f(x_n)\|$	$\|x_n - r\|$	x_n
1	1.3	MC	4	$5.5965e-264$	$1.2558e-066$	1.404491648215
		MR	4	$1.2000e-299$	$1.0907e-079$	1.404491648215
		MBS	5	$2.0808e-295$	$5.7577e-099$	1.404491648215
		PMBS1	5	$1.2000e-299$	$1.3693e-238$	1.404491648215
		PMBS2	4	$6.6007e-251$	$2.1136e-063$	1.404491648215
		PMBS3	5	$1.2000e-299$	$3.7937e-213$	1.404491648215
2	1.0	MC	4	$1.0000e-300$	$2.7672e-077$	0.739085133215
		MR	4	$6.5443e-257$	$1.6871e-064$	0.739085133215
		MBS	5	$1.0000e-300$	$8.3911e-131$	0.739085133215
		PMBS1	4	$5.6790e-297$	$2.1425e-074$	0.739085133215
		PMBS2	4	$1.0000e-300$	$2.4865e-075$	0.739085133215
		PMBS3	4	$3.0844e-289$	$1.7471e-072$	0.739085133215
3	0.5	MC	4	$1.7626e-284$	$1.9124e-071$	0.257530285439
		MR	5	$0.0000e+000$	$5.7361e-214$	0.257530285439
		MBS	5	$0.0000e+000$	$1.5638e-100$	0.257530285439
		PMBS1	4	$1.0004e-287$	$3.0122e-072$	0.257530285439
		PMBS2	4	$1.2806e-286$	$5.6522e-072$	0.257530285439
		PMBS3	4	$0.0000e+000$	$2.3685e-086$	0.257530285439
4	0.9	MC	4	$1.2257e-288$	$2.2953e-072$	0.641714370872
		MR	5	$0.0000e+000$	$5.9561e-183$	0.641714370872
		MBS	5	$7.7497e-263$	$8.1136e-088$	0.641714370872
		PMBS1	4	$0.0000e+000$	$3.4531e-075$	0.641714370872
		PMBS2	4	$2.8490e-297$	$1.5106e-074$	0.641714370872
		PMBS3	4	$0.0000e+000$	$2.1634e-077$	0.641714370872
5	0.7	MC	5	$1.4984e-644$	$2.1421e-129$	0.000000000000
		MR	6	$0.0000e+000$	$1.4440e-183$	0.000000000000
		MBS	6	$0.0000e+000$	$5.0914e-168$	0.000000000000
		PMBS1	6	$0.0000e+000$	$2.5598e-183$	0.000000000000
		PMBS2	5	$1.8595e-628$	$3.5448e-126$	0.000000000000
		PMBS3	5	$9.2789e-576$	$1.2280e-115$	0.000000000000

Ucapan Terimakasih Penulis mengucapkan terimakasih yang tak terhingga kepada Dr. Imran M., M.Sc. yang telah memberikan arahan dan nasehat dalam penulisan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Atkinson, K. 1993. *Elementary Numerical Analysis*, 2^{nd}Ed. John Wiley & Sons, Inc., New York.

[2] Cordero, A. & J. R. Torregrosa. 2011. A Class of Steffensen Type Methods with Optimal Order Convergence. *Applied Mathematics and Computation.* **217**: 7653–7659.

[3] Feng, X. & Y. He. 2007. High Order Iterative Methods without Derivatives for Solving Nonlinear Equations. *Applied Mathematics and Computation.* **186**: 1617–1623.

[4] Gautschi, W. 2011. *Numerical Analysis,* 2^{nd} Ed. West Lafayette, Indiana

[5] Hafiz, M. A. 2014. Solving Nonlinear Equation Using Steffensen-Type Methods with Optimal Order of Convergence. *Palestine Journal of Mathematics.* **3**: 113–119.

[6] Kung, H. T. & J. F. Traub 1974. Optimal Order of One-Point and Multipoint Iteration . *Journal of The Association for Computing Machinery.* **21**: 643–651.

[7] Ostrowski, A. M. 1966. *Solution of Equations and Systems of Equations.* Academic Press, New York - London.

[8] Ren, H., Q. Wub & W. Bi. 2009. A Class of Two Step Steffensen Type Methods with Fourth Order of Convergence. *Applied Mathematics and Computation.* **217**: 206–210.

[9] Zheng, Q., J. Wang, P. Zhao, & L. Zhang. 2009. A Steffensen-like method and its higher-order variants. *Applied Mathematics of Computation.* **214**: 10–16.