METODE ITERASI BARU YANG OPTIMAL BERORDE EMPAT TANPA TURUNAN KEDUA DAN DINAMIKNYA

F. A. Yanti[1*], Agusni[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Laboratorium Matematika Terapan, Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*fitriaafri2@gmail.com

ABSTRACT

This article discusses an iterative method to solve a nonlinear equation, which is free from second derivative by approximating a second derivative by a divided difference. Analytically it is shown using the Taylor expansion and geometric series that this iterative method has a convergence of order four. Furthermore, numerical comparisons between the proposed method and several well-known iterative methods of order four and free from second derivative are performed. By varying the initial guesses, we compare the number of iterations obtained by those methods to get an approximated root. In addition, comparisons are also made through basins of attraction of the discussed methods.

Keywords: *divided difference, free second derivative method, order of convergence, nonlinear equation, basins of attraction.*

ABSTRAK

Pada artikel ini dibahas metode iterasi tanpa turunan kedua untuk menyelesaikan persamaan nonlinear dengan mengaproksimasikan turunan kedua yang ada pada metode iterasi baru menggunakan beda terbagi. Secara analitik dengan menggunakan ekspansi Taylor dan deret geometri ditunjukkan bahwa metode yang dihasilkan mempunyai kekonvergenan orde empat. Selanjutnya, dilakukan perbandingan komputasi antara metode yang dikemukakan dan beberapa metode iterasi berorde empat dan bebas turunan kedua yang sudah dikenal dengan menvariasikan tebakan awal dan memperhatikan jumlah iterasi yang diperlukan untuk mendapatkan akar taksiran. Perbandingan juga dilakukan melalui *basins of attraction* dari beberapa metode iterasi optimal berorde empat tersebut.

Kata kunci: *beda terbagi, metode iterasi tanpa turunan kedua, orde konvergensi, persamaan nonlinear, basins of attraction.*

1. PENDAHULUAN

Penelitian matematika dalam mendapatkan solusi persamaan nonlinear $f(x) = 0$, akhir-akhir ini berkembang pesat. Penelitian sering dilakukan dengan cara memodifikasi metode yang sudah tersedia seperti metode Newton yang memiliki orde konvergensi kuadratik [1, h. 71].

Salah satu cara memodifikasi metode Newton agar kekonvergenannya dapat ditingkatkan adalah dengan membentuk iterasi

$$x_{n+1} = x_n - t(x_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f'(x_n) \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots,$$

kemudian menentukan bentuk fungsi $t(x_n)$ sedemikian hingga orde metode dapat ditingkatkan atau dipertahankan. Gander [4] memperkenalkan suatu fungsi H yang memenuhi $H(0) = 1$, $H'(0) = \frac{1}{2}$, dan $|H''(0)| < \infty$ dan mengusulkan metode iterasi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}H(t(x_n)), \quad f'(x_n) \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots, \tag{1}$$

dengan

$$t(x_n) = \frac{f(x_n)f''(x_n)}{(f'(x_n))^2}, \quad f'(x_n) \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots, \tag{2}$$

yang mempunyai orde kekonvergenan tiga [4]. Perhatikan bahwa metode iterasi ini yang mempunyai 3 perhitungan fungsi, yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$, $f''(x_n)$ pada iterasinya.

Perhitungan derivatif untuk fungsi yang rumit memerlukan waktu yang tidak efisien. Untuk itu perlu dihindari sekurangnya perhitungan turunan kedua pada metode iterasi yang diperkenalkan [4].

Pada tulisan ini, untuk menghindari evaluasi fungsi $f''(x_n)$ pada (2), nilai $f''(x_n)$ dihampiri menggunakan pendekatan beda terbagi sehingga diperoleh metode iterasi baru yang optimal tanpa turunan kedua yang merupakan kajian detil dari artikel Chun et.al [3]. Suatu metode iterasi *multipoint* tanpa memori memerlukan $n + 1$ perhitungan fungsi dan mempunyai orde kekonvergenan 2^n [5].

Pembahasan dimulai dibagian dua untuk mendapatkan metode iterasi baru yang optimal tanpa turunan kedua dan kekonvergenannya. Kemudian dibagian ketiga diberikan beberapa kasus khusus yang menghasilkan beberapa metode iterasi. Diakhir pembahasan disajikan perbandingan numerik dan analisis menggunakan *basins of attraction* dari metode yang dikemukakan.

2. METODE ITERASI BARU YANG OPTIMAL BERORDE EMPAT TANPA TURUNAN KEDUA DAN DINAMIKNYA

Misalkan $\phi(x)$ adalah fungsi iterasi yang sekurangnya berorde dua. Misalkan y_n dibentuk dengan kombinasi konveks antara x_n dan $\phi(x_n)$, yaitu $y_n = (1 - \theta)x_n + \theta\phi(x_n)$. Selanjutnya taksir $f''(x_n)$ dengan beda terbagi berikut :

$$f''(x_n) \approx \frac{f'(y_n) - f'(x_n)}{y_n - x_n}. \tag{3}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3) ke (2) dan menyederhanakan diperoleh metode iterasi baru tanpa turunan kedua dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} H(t(x_n)), \tag{4}$$

dengan

$$\widetilde{t}(x_n) = \frac{f(x_n)(f'(x_n) - f'(y_n))}{\theta(x_n - \phi(x_n))(f'(x_n))^2} \qquad \theta \neq 0. \tag{5}$$

Teorema 1 (Orde Konvergensi) [3]. Misalkan $\rho \in I$ akar sederhana dari fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ yang terdiferensial secukupnya pada interval buka I. Misalkan fungsi H memenuhi $H(0) = 1$, $H'(0) = \frac{1}{2}$, $|H''(0)| < \infty$ dan $y_n = x_n - \theta(x_n - \phi(x_n))$ dengan θ merupakan bilangan real tak nol dan ϕ merupakan fungsi iterasi yang sekurangnya berorde dua. Jika x_0 cukup dekat dengan ρ, maka metode yang didefinisikan oleh persamaan (4) dan persamaan (5) memiliki persamaan *error*

$$\begin{aligned} e_{n+1} =& \left(\left(\frac{3}{2}\theta - 1 \right) c_3 + \left(2 - 2H''(0)\right) c_2^2 \right) e_n^3 \\ &+ \left(4c_2c_3 + \left(5 - \frac{4}{3}H'''(0) \right) c_2^3 - (\phi_2 c_2 - \phi_3)c_2 - 2\phi_2 c_3 + 3c_4 \right) e_n^4 + O(e_n^5), \end{aligned}$$

dengan

$e_n = x_n - \rho$, $\phi(x_n) = \rho + \phi_2 e_n^2 + O(e_n^3)$ dan $c_k = \frac{f^{(k)}(\rho)}{k!}$, $k \geq 1$. Kemudian, jika $H''(0) = 1$ dan $\theta = \frac{2}{3}$ maka metode iterasi baru tanpa turunan kedua yang didefinisikan oleh persamaan (4) dan persamaan (5) memiliki kekonvergenan orde empat.

Bukti: Misalkan ρ adalah akar sederhana dari persamaan $f(x) = 0$, $e_n = x_n - \rho$ dan $d_n = y_n - \rho$, dengan $y_n = x_n - \theta(x_n - \phi(x_n))$. Kemudian dengan menggunakan ekspansi Taylor untuk $f(x_n)$ di sekitar $x_n = \rho$, diperoleh

$$f(x_n) = f'(\rho) \left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4 + O(e_n^5) \right). \tag{6}$$

dengan $e_n = x_n - \rho$, dan $c_k = \frac{f^{(k)}(\rho)}{k! f'(\rho)}, k = 1, 2, ...$ Selanjutnya dengan cara yang sama diperoleh ekspansi Taylor untuk $f'(x_n)$ di sekitar $x_n = \rho$, sebagai berikut

$$f'(x_n) = f'(\rho) \left(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 e_n^3 + O(e_n^4) \right), \tag{7}$$

dan

$$(f'(x_n))^2 = (f'(\rho))^2 \left(1 + 4c_2 e_n + (4{c_2}^2 + 6c_3)e_n^2 + 12c_2c_3 e_n^3 + O(e_n^4) \right). \tag{8}$$

Selanjutnya dengan menghitung $\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ menggunakan persamaan (6), (7), dan dengan bantuan formula deret geometri maka diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2e_n^2 + 2({c_2}^2 - c_3)e_n^3 + (7c_2c_3 - 3c_4 - 4{c_2}^3)e_n^4 + O(e_n^5). \qquad (9)$$

Selanjutnya dengan menggunakan ekspansi Taylor untuk $\phi(x_n)$ di sekitar $x_n = \rho$, diperoleh

$$\phi(x_n) = \rho + \phi_2e_n^2 + \phi_3e_n^3 + \phi_4e_n^4 + O(e_n^5), \qquad (10)$$

dengan $\phi_k = \dfrac{f^{(k)}(\rho)}{k!}, k = 2, 3, 4.$

Selanjutnya dengan mengurangkan $x_n = e_n + \rho$ dan persamaan (10) maka

$$x_n - \phi(x_n) = e_n - \phi_2e_n^2 - \phi_3e_n^3 - \phi_4e_n^4 + O(e_n^5). \qquad (11)$$

Untuk $d_n = y_n - \rho$, dengan $y_n = x_n - \theta(x_n - \phi(x_n))$ maka dapat diperoleh

$$\begin{aligned} d_n &= (x_n - \theta(x_n - \phi(x_n))) - \rho \\ d_n &= (1 - \theta)e_n + \theta\phi_2e_n^2 + \theta\phi_3e_n^3 + \theta\phi_4e_n^4 + O(e_n^5). \end{aligned} \qquad (12)$$

Kemudian dengan menggunakan ekspansi Taylor untuk $f(y_n)$ di sekitar $y_n = \rho$, diperoleh

$$f(y_n) = f'(\rho)\left(d_n + c_2d_n^2 + c_3d_n^3 + c_4d_n^4 + c_5d_n^5 + O(e_n^6)\right), \qquad (13)$$

dengan $d_n = y_n - \rho$ dan $c_k = \dfrac{f^{(k)}(\rho)}{k!f'(\rho)}, k = 1, 2, ...$

Selanjutnya dengan menggunakan ekspansi Taylor untuk $f'(y_n)$ di sekitar $y_n = \rho$, setelah dilakukan penyederhanaan maka diperoleh

$$f'(y_n) = f'(\rho)\left(1 + 2c_2d_n + 3c_3d_n^2 + 4c_4d_n^3 + 5c_5d_n^4 + O(e_n^5)\right). \qquad (14)$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (12) ke persamaan (14), dan menyederhanakan diperoleh

$$\begin{aligned} f'(y_n) = f'(\rho)\big(&1 + 2(1-\theta)c_2e_n + \left(2\theta\phi_2c_3 + 3(1-\theta)^2c_3\right)e_n^2 \\ &+ \left(2\theta\phi_3c_2 + 6\theta(1-\theta)\phi_2c_3 + 4(1-\theta)^3c_4\right)e_n^3 \\ &+ (2\theta\phi_4c_2 + 3\theta(\theta{\phi_2}^2 + 2(1-\theta)\phi_3)c_3 + 12\theta(1-\theta)^2\phi_2c_4 \\ &+ 5(1-\theta)^4c_5)e_n^4 + O(e_n^5)\big). \end{aligned} \qquad (15)$$

Selanjutnya dengan mengurangkan persamaan (7) ke persamaan (15) maka

$$\begin{aligned} f'(x_n) - f'(y_n) = f'(\rho)\big(&2\theta c_2e_n + \left(3c_3 - 2\theta\phi_2c_3 + 3(1-\theta)^2c_3\right)e_n^2 \\ &+ \left(4c_4 - 2\theta\phi_3c_2 + 6\theta(1-\theta)\phi_2c_3 + 4(1-\theta)^3c_4\right)e_n^3 \\ &+ \big(2\theta\phi_4c_2 + 3\theta(\theta{\phi_2}^2 + 2(1-\theta)\phi_3)c_3 \\ &+ 12\theta(1-\theta)^2\phi_2c_4 + 5(1-\theta)^4c_5 - 5c_5\big)e_n^4 + O(e_n^5)\big). \end{aligned} \qquad (16)$$

Kemudian persamaan (6), (8), (11) dan (16) disubstitusikan ke persamaan (5), setelah disederhanakan diperoleh

$$\begin{aligned}\widetilde{t}(x_n) = 2c_2e_n + (3(2-\theta)c_3 - 6c_2^2)e_n^2 + (16c_2^3 + (12\theta - 36)c_2c_3 - 3\theta\phi_2c_3 \\ + (6-3\theta)\phi_2c_3 + 2\phi_3c_2 + 2\phi_2c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4),\end{aligned} \tag{17}$$

Selanjutnya dengan menggunakan ekspansi Taylor untuk $H(\widetilde{t}(x_n))$ di sekitar $t_n = \rho$, diperoleh

$$H(\widetilde{t}(x_n)) = f(\rho) + f'(\rho)\frac{(t_n-\rho)}{1!} + f''(\rho)\frac{(t_n-\rho)^2}{2!} + f'''(\rho)\frac{(t_n-\rho)^3}{3!} + O(e_n^4). \tag{18}$$

Karena $f(\rho) = H(0)$ dan $t_n - \rho = \widetilde{t}(x_n)$, maka persamaan (18) diperoleh

$$H(\widetilde{t}(x_n)) = H(0) + H'(0)\widetilde{t}(x_n) + \frac{1}{2}H''(0)\widetilde{t}^2(x_n) + \frac{1}{6}H'''(0)\widetilde{t}^3(x_n) + O(e_n^4), \tag{19}$$

dengan mensubtitusikan $H(0) = 1$ dan $H'(0) = \frac{1}{2}$, maka persamaan (19) dapat ditulis

$$H(\widetilde{t}(x_n)) = 1 + \frac{1}{2}\widetilde{t}(x_n) + \frac{1}{2}H''(0)\widetilde{t}^2(x_n) + \frac{1}{6}H'''(0)\widetilde{t}^3(x_n) + O(e_n^4). \tag{20}$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (17) maka diperoleh

$$\begin{aligned}H(\widetilde{t}(x_n)) = 1 + c_2e_n + \left((2H''(0) - 3)c_2^2 + \frac{3}{2}(2-\theta)c_3\right)e_n^2 \\ + \left(\left(8 - 12H''(0) + \frac{4}{3}H'''(0)\right)c_2^3 + (12H''(0) - 6\theta H''(0) \right. \\ \left. + 6\theta - 18)c_2c_3 + (3\phi_2 - \frac{3}{2}\theta\phi_2)c_3 + (\phi_2c_2 + \phi_3)c_2\right)e_n^3 + O(e_n^4).\end{aligned} \tag{21}$$

Dari persamaan (8) dan persamaan (21) kita peroleh

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}H(t(x_n)) \\ &= \rho + \left(2(1 - H''(0))c_2^2 + \left(\frac{3}{2}\theta - 1\right)c_3\right)e_n^3 \\ &\quad + \left(\left(14H''(0) - \frac{4}{3}H'''(0) - 9\right)c_2^3 + (6\theta H''(0) - 12H''(0) \right. \\ &\quad \left. - \frac{15}{2}\theta + 12)c_2c_3 + \left(\frac{3}{2}\theta - 3\right)\phi_2c_3 - (\phi_2c_2 - \phi_3)c_2 + 3c_4\right)e_n^4 + O(e_n^5),\end{aligned} \tag{22}$$

dan karena $e_{n+1} = x_{n+1} - \rho$ maka

$$e_{n+1} = \left(2(1 - H''(0))c_2^2 + \left(\frac{3}{2}\theta - 1\right)c_3\right)e_n^3 + \left(\left(14H''(0) - \frac{4}{3}H'''(0) - 9\right)c_2^3 + (6\theta H''(0) - 12H''(0) - \frac{15}{2}\theta + 12)c_2c_3 + \left(\frac{3}{2}\theta - 3\right)\phi_2 c_3 - (\phi_2 c_2 - \phi_3)c_2 + 3c_4\right)e_n^4 + O(e_n^5). \quad (23)$$

Kemudian, jika dipilih $\theta = \frac{2}{3}$ dan $H''(0) = 1$, maka

$$e_{n+1} = \left(4c_2c_3 + \left(5 - \frac{4}{3}H'''(0)\right)c_2^3 - (\phi_2 c_2 - \phi_3)c_2 - 2\phi_2 c_3 + 3c_4\right)e_n^4 + O(e_n^5). \quad (24)$$

Dengan demikian, persamaan *error* pada persamaan (24) menunjukkan bahwa metode iterasi baru tanpa turunan kedua memiliki orde konvergensi empat. □

Jadi dengan mensubstitusikan nilai $\theta = \frac{2}{3}$ di persamaan (24) ke persamaan (4) dan (5), diperoleh metode iterasi baru tanpa turunan kedua dengan orde konvergensi empat sebagai berikut :

$$y_n = x_n - \theta(x_n - \phi(x_n))$$
$$y_n = x_n - \frac{2}{3}(x_n - \phi(x_n)), \quad (25)$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}H(\widetilde{t}(x_n)), \quad (26)$$

dengan

$$\widetilde{t}(x_n) = \frac{3}{2}\frac{f(x_n)(f'(x_n) - f'(y_n))}{(x_n - \phi(x_n))(f'(x_n))^2}. \quad (27)$$

Fungsi ϕ merupakan fungsi iterasi yang sekurangnya berorde dua.

3. BENTUK KHUSUS METODE ITERASI TANPA TURUNAN KEDUA

Pada bagian ini misalkan ϕ merupakan fungsi itersi Newton $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, kemudian persamaan (25)-(27) menjadi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}H(\widetilde{t}(x_n)), \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
y_n &= x_n - \frac{2}{3}(x_n - \phi(x_n)) \\
&= x_n - \frac{2}{3}\left(x_n - \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)\right) \\
y_n &= x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad (29)
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
\widetilde{t}(x_n) &= \frac{3}{2}\frac{f(x_n)(f'(x_n) - f'(y_n))}{(x_n - \phi(x_n))(f'(x_n))^2} \\
&= \frac{3}{2}\frac{f(x_n)(f'(x_n) - f'(y_n))}{\left(x_n - \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)\right)(f'(x_n))^2} \\
\widetilde{t}(x_n) &= \frac{3}{2}\frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{f'(x_n)}. \qquad (30)
\end{aligned}$$

Selanjutnya diberikan kasus khusus untuk suatu fungsi $H(t(x_n))$ pada persamaan (28)-(30) dengan $H(t) = \dfrac{4}{4 - 2t - t^2}$, lalu diperoleh metode iterasi baru yang optimal sebagai berikut :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{16f(x_n)f'(x_n)}{-5f'(x_n)^2 + 30f'(x_n)f'(y_n) - 9f'(y_n)^2}$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

4. PERBANDINGAN KOMPUTASI

Pada bagian ini dilakukan perbandingan komputasi untuk membandingkan metode Halley (MH), metode Euler (ME), Metode Ostrowski (MO), metode King (MKi), metode Kung-Traub (MKT), metode Kou (MKo) dan metode iterasi yang Optimal (MIO). Adapun fungsi-fungsi yang digunakan dalam melakukan perbandingan metode yang didiskusikan yaitu

1. $f_1(x) = x^2 - 1$
2. $f_2(x) = x^3 - 1$

Dalam melakukan perbandingan komputasi ke tujuh metode untuk ke dua fungsi di atas digunakan program Matlab R2010a. Hasil dari perbandingan komputasi untuk ke dua fungsi di atas ditunjukkan pada Tabel 1.

Tabel 1: Perbandingan Hasil Komputasi dari Beberapa Metode Iterasi

f_i	x_0	Metode	n	x_n	$\lvert f(x_n)\rvert$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
$f_1(x)$	0.5	MH	3	1.000000000000	$5.2447e-013$	$1.0161e-004$
		ME	1	1.000000000000	$0.0000e+000$	$5.0000e-001$
		MO	3	1.000000000000	$0.0000e+000$	$2.1665e-006$
		MKi	3	1.000000000000	$0.0000e+000$	$2.4688e-010$
		MKT	3	1.000000000000	$0.0000e+000$	$4.1123e-006$
		MKo	3	1.000000000000	$8.8818e-016$	$1.9337e-004$
		MIO	3	1.000000000000	$0.0000e+000$	$5.3291e-005$
	2.0	MH	3	1.000000000000	$5.2447e-013$	$1.0162e-004$
		ME	1	1.000000000000	$0.0000e+000$	$1.0000e+000$
		MO	3	1.000000000000	$8.8818e-016$	$1.6050e-005$
		MKi	2	1.000000000010	$1.9234e-011$	$1.0110e-002$
		MKT	3	1.000000000000	$0.0000e+000$	$4.2678e-007$
		MKo	3	1.000000000000	$2.2204e-016$	$1.2868e-006$
		MIO	3	1.000000000000	$0.0000e+000$	$3.4802e-007$
$f_2(x)$	-1.0	MH	1	1.000000000000	$0.0000e+000$	$2.0000e+000$
		ME	6	1.000000000002	$5.2519e-011$	$3.7449e-004$
		MO	*Div*	$-$	$-$	$-$
		MKi	42	0.999999999971	$8.8194e-011$	$3.0783e-003$
		MKT	3	1.000000000000	$7.4807e-013$	$6.2232e-004$
		MKo	4	1.000000000000	$0.0000e+000$	$2.2881e-006$
		MIO	4	1.000000000000	$1.1204e-012$	$6.8847e-004$
	1.5	MH	3	1.000000000000	$1.3922e-013$	$4.1136e-005$
		ME	3	1.000000000000	$6.4382e-013$	$8.6343e-005$
		MO	3	1.000000000000	$0.0000e+000$	$8.3130e-007$
		MKi	2	1.000000000000	$4.2966e-014$	$4.5564e-004$
		MKT	3	1.000000000000	$0.0000e+000$	$5.3612e-007$
		MKo	3	1.000000000000	$3.3307e-016$	$1.9229e-006$
		MIO	3	1.000000000000	$0.0000e+000$	$3.9845e-007$

Pada Tabel 1 kolom pertama merupakan fungsi nonlinear yang berbeda, kolom kedua merupakan tebakan awal, x_0, kolom ketiga merupakan metode iterasi yang dibandingkan, kolom keempat merupakan jumlah, n, kolom kelima merupakan akar pendekatan ke n, x_n, kolom keenam merupakan nilai fungsi, $|f(x_n)|$ dan kolom terakhir merupakan selisih dua iterasi yang berdekatan, $|x_n - x_{n-1}|$. Sedangkan *Div* (Divergen) menyatakan bahwa iterasi yang dihasilkan tidak menuju ke akar.

Secara keseluruhan berdasarkan Tabel 1 jumlah iterasi dari metode Halley (MH), metode Euler (ME), Metode Ostrowski (MO), metode King (MKi), metode Kung-Traub (MKT), metode Kou (MKo) dan metode iterasi yang Optimal (MIO) tidak terlihat perbedaan yang signifikan. Hal ini terjadi karena orde konvergensi dari masing-masing metode hampir sama yaitu metode Halley (MH), metode Euler (ME) dan metode Ostrowski (MO) memiliki orde kekonvergenan tiga, sedangkan metode King (MKi), metode Kung-Traub (MKT), metode Kou (MKo) dan metode iterasi yang Optimal (MIO) yang memiliki orde kekonvergenan empat. Namun pada fungsi ke dua $f_2(x)$ dimana iterasi MO tidak menuju ke akar.

Berdasarkan Tabel 1 masing-masing metode mempunyai keunggulan jumlah iterasi pada setiap fungsi yang berbeda untuk mencapai ke akar, akan tetapi secara umum metode iterasi yang Optimal (MIO) lebih baik.

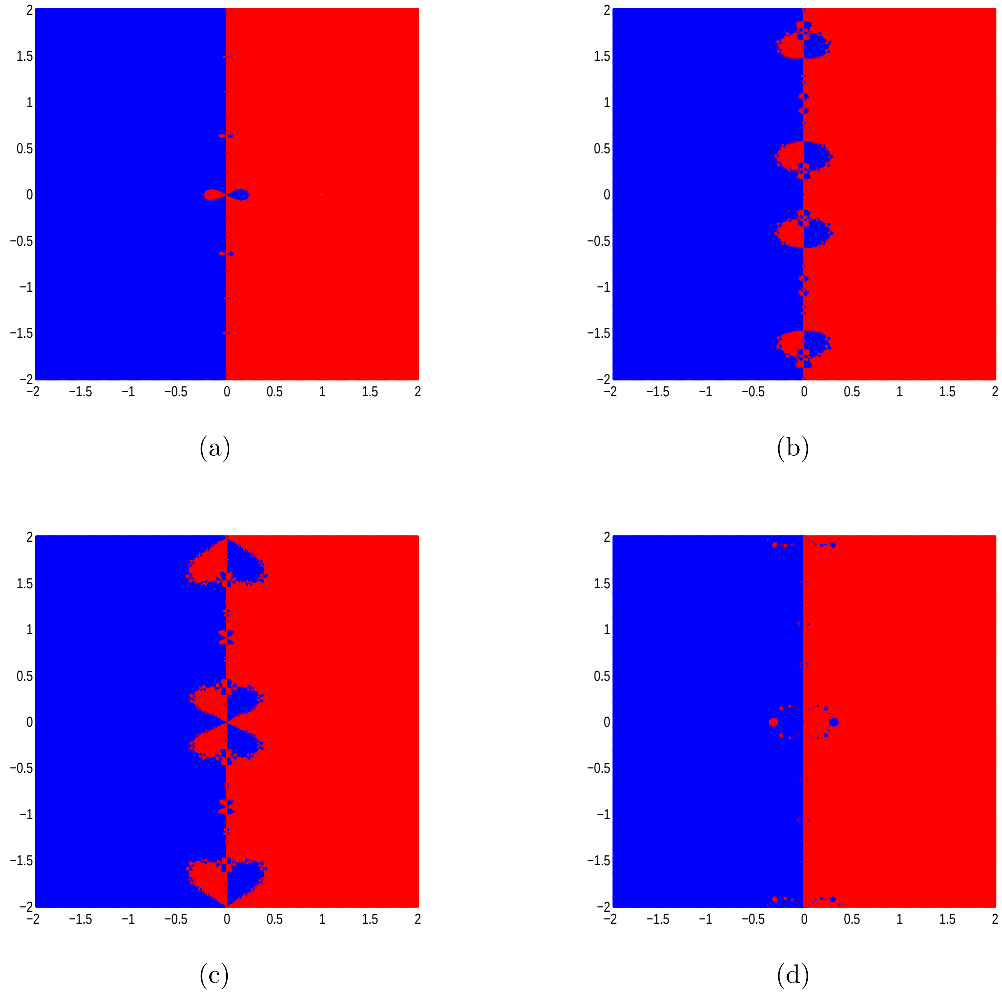
5. *BASINS OF ATTRACTION*

Pada bagian ini dibahas cara lain untuk membandingkan metode berorde empat tanpa turunan kedua. Perbandingan diantara metode dilakukan dengan menggunakan *basins of attraction* yang menghasilkan gambar fraktal yang mempermudah untuk melihat jumlah iterasi yang diperoleh untuk berbagai tebakan awal.

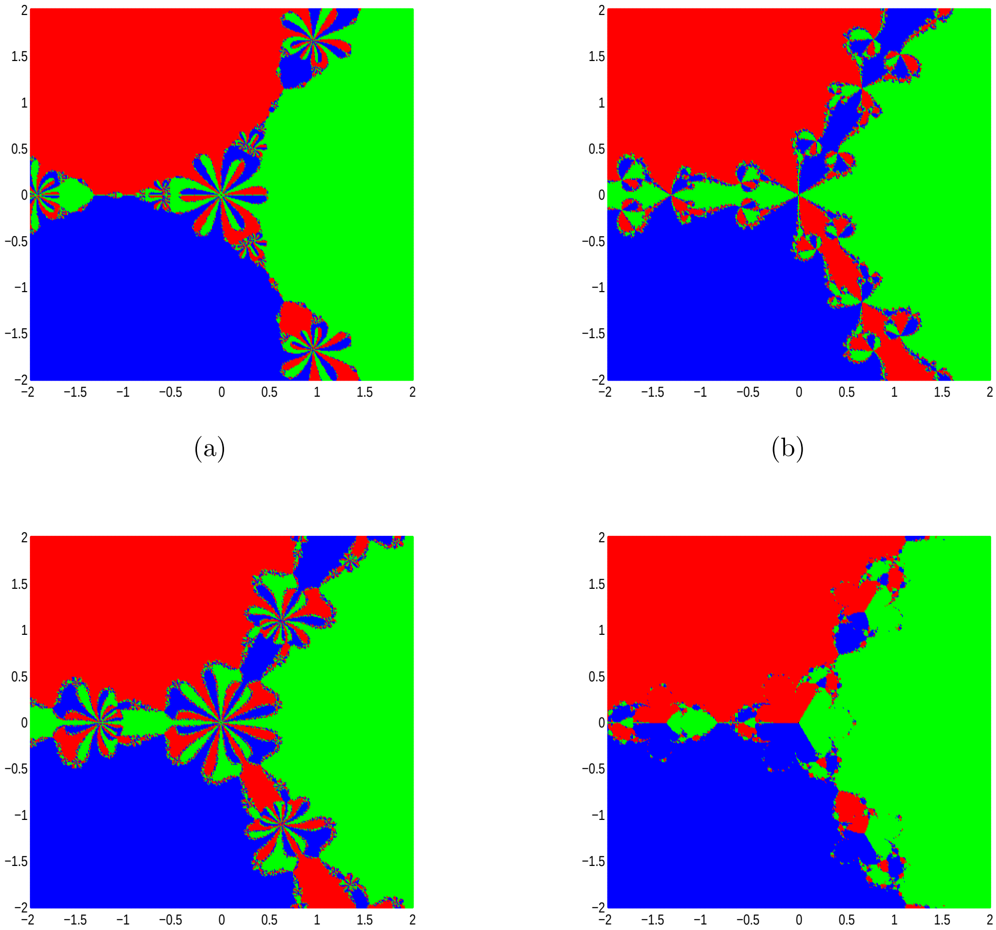
Untuk membuat gambar fraktal *basins of attraction*, pertama dibuat persegi yang berukuran $[-2,2] \times [-2,2]$ pada bidang kompleks dan kemudian persegi tersebut dibagi menjadi grid berukuran 100×100. Setiap titik (x_k, y_j) pada grid tersebut mewakili sebuah bilangan kompleks $z = x_k + iy_j$ yang dijadikan sebagai tebakan awal untuk metode iterasi yang digunakan. Kriteria pemberhentian metode iterasi adalah $|x_{n+1} - \rho_r| < toleransi$, dengan $toleransi = 1.0 \times 10^{-10}$, ρ_r adalah akar-akar dari fungsi yang digunakan dan jumlah iterasi maksimum adalah 100.

Gambar 1 merupakan *basins of attraction* untuk fungsi $f(x) = x^2 - 1$ yang memiliki akar $x = \pm 1$. Sedangkan Gambar 2 merupakan *basins of attraction* untuk fungsi $f(x) = x^3 - 1$ memiliki akar $1, -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2i}\sqrt{3}$.

Pada Gambar 1 karena fungsi $f(x) = x^2 - 1$ memiliki dua akar yang berbeda, maka digunakan dua warna dasar yang berbeda pula, yaitu warna merah untuk titik-titik yang konvergen ke akar $\rho_1 = 1$ dan warna biru untuk titik-titik yang konvergen ke akar $\rho_2 = -1$. Demikian juga pada Gambar 2 fungsi $f(x) = x^3 - 1$ memiliki tiga akar yang berbeda, yaitu warna hijau, merah dan biru. Pada Gambar 1 dan Gambar 2, (a)$-$(c) dapat dilihat bahwa setiap titik tebakan awal yang konvergen ke akar yang dekat dengan titik-titik tersebut, lebih sedikit dibandingkan pada Gambar (d) dan cenderung lebih konvergen ke akar yang lebih jauh. Hal ini berarti bahwa secara umum Gambar 1 $-$ Gambar 2, MIO lebih baik dibandingkan dengan tiga metode lainnya yaitu MKi, MKT dan MKo.



Gambar 1: *Basins of Attraction* $f(x) = x^2 - 1$. (a) MKi, (b) MKT, (c) MKo dan (d) MIO



Gambar 2: *Basins of attraction* $f(x) = x^3 - 1$. (a) MKi, (b) MKT, (c) MKo dan (d) MIO

Ucapan Terimakasih Penulis mengucapkan terimakasih kepada Dr. Imran M., M.Sc. yang telah memberikan arahan dan bimbingan dalam penulisan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Atkinson, K.E. 1993. *Elementary Numerical Analysis, 2nd Ed.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

[2] Bartle, R. G. & Shebert, D. R. 2010. *Introduction to Real Analysis, 4th* Ed. John Wiley & Sons, Inc., New York.

[3] Chun, C., M.Y. Lee., B. Neta. & J. Dzunic. 2012. On Optimal Fourth-Order Iterative Methods Free from Second Derivative and Their Dynamics. *Computational and Applied Mathematics*, **218**:6427-6438.

[4] Gander, W. 1982. On Halley Iteration Method. *Computational and Applied Mathematics*, **95**:131-134.

[5] Kung H.T. , J.F. Traub. 1974. Optimal Order of One-Point and Multipoint Iteration. *Journal of The Association for Computing Marchinery*, **21(4)**:643-651

[6] Simeunovic, D.M. 2010. A Procedure for Obtaining a Family of Iterative Formulas for Finding Zeros of Functions. *Mathematica Moravica*, **2**:1-5.