MENENTUKAN NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN DARI MATRIKS TRIDIAGONAL

Nur Meliana Sari[1*], Sri Gemawati[2], Asli Sirait[2]

[1*] Mahasiswa Program S1 Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Kampus Binawidya Pekanbaru 28293, Indonesia

[*] nurmelianasari@ymail.com

ABSTRACT

This article discusses how to obtain eigenvalues and their corresponding eigenvectors of tridiagonal matrices, of the form

$$A_n(\sigma)=\begin{pmatrix} -\alpha+b & c_{\sigma_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{\sigma_1} & b & c_{\sigma_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{\sigma_2} & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{\sigma_{n-1}} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{\sigma_{n-1}} & -\beta+b \end{pmatrix}$$

where α, β , b are number complex and σ is mapping from a set of integer from 1 to n-1 into a nonnegative integer.

Keywords: *Eigenvalues, eigenvectors, tridiagonal matrices.*

ABSTRAK

Artikel ini mendiskusikan cara menentukan nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian dari matriks tridiagonal berbentuk

$$A_n(\sigma)=\begin{pmatrix} -\alpha+b & c_{\sigma_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{\sigma_1} & b & c_{\sigma_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{\sigma_2} & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{\sigma_{n-1}} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{\sigma_{n-1}} & -\beta+b \end{pmatrix}$$

dengan α, β ,b bilangan kompleks dan σ adalah pemetaan dari himpunan bilangan bulat 1 sampai $n-1$ ke himpunan bilangan bulat yang berbeda dengan nol.

Kata kunci: *Nilai eigen, vektor eigen, matriks tridiagonal*.

1. PENDAHULUAN

Matriks adalah himpunan bilangan-bilangan yang disusun secara empat persegi panjang menurut baris dan kolom. Dalam matematika matriks dapat digunakan untuk menangani model-model linear, seperti mencari penyelesaian sistem persamaan diferensi dengan himpunan-himpunan dari beberapa persamaan diferensi yang diubah ke dalam bentuk matriks, sehingga bentuk matriks tersebut dapat diubah ke dalam bentuk persamaan nilai eigen atau nilai karakteristik dengan matriks yang berukuran $n \times n$ (matriks bujur sangkar). Pada artikel ini penulis akan membahas tentang menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tridiagonal yang berbentuk

$$A_n = \begin{pmatrix} -\alpha+b & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & b & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n-1} & -\beta+b \end{pmatrix}$$

dengan α, β dan b bilangan kompleks.

Misalkan bahwa $a_j c_j = \begin{cases} d_1^2, \ j = \text{ganjil} \\ d_2^2, \ j = \text{genap} \end{cases} \quad j = 1,2,...,$ (1)

dengan d_1, d_2 merupakan akar-akar polinomial karakteristik. Jika σ adalah pemetaan dari himpunan bilangan bulat 1 sampai $n-1$ ke dalam himpunan bilangan bulat yang berbeda dengan nol $\left(\mathrm{N}^*\right)$ dan dinotasikan menjadi matriks

$$A_n(\sigma) = \begin{pmatrix} -\alpha+b & c_{\sigma_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{\sigma_1} & b & c_{\sigma_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{\sigma_2} & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{\sigma_{n-1}} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{\sigma_{n-1}} & -\beta+b \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Tulisan ini merupakan review sebagian artikel S. Kouachi yang berjudul *"Eigenvalues and Eigenvectors of Tridiagonal Matrices"*[2].

2. Menentukan Nilai Eigen dan Vektor Eigen dari Matriks Tridiagonal

Sebelum mendiskusikan penentuan nilai eigen dan vektor eigen dari matrik pada persamaan (2) terlebih dahulu diberikan definisi tentang nilai eigen dan vektor eigen.

Definisi 1 [1:h.277] Misalkan A adalah matriks berukuran $n \times n$ (dengan elemen-elemen real atau kompleks), maka vektor tak nol x di dalam R^n dinamakan vektor eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x, yakni,

$$Ax = \lambda x,$$

untuk suatu skalar λ (real atau kompleks). Maka λ dinamakan nilai eigen atau nilai karakteristik dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Selanjutnya akan dibahas nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tridiagonal (2) yang mana untuk kasus $\alpha = \beta = 0$ matriks $A_n(\sigma)$ dan polinomial karakteristiknya $\Delta_n(\sigma)$ dinotasikan berturut-turut dengan $A_n^0(\sigma)$ dan $\Delta_n^0(\sigma)$ dan untuk kasus $\alpha \neq 0$ dan $\beta \neq 0$, dinotasikan berurut-turut dengan A_n dan Δ_n. Untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tridiagonal (2) terlebih dahulu dinyatakan

$$Y^2 = d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_2 \cos\theta \text{ dengan } Y = b - \lambda, \tag{3}$$

dan untuk pembahasan lanjutan diperlukan Teorema 2 berikut.

Teorema 2 [2] Asumsikan $d_1 d_2 \neq 0$, nilai eigen dari matriks $A_n(\sigma)$ yang diberikan persamaan (2) adalah bebas dari entri-entri $\left(a_i, c_i, i = 1,\ldots,n-1\right)$ dan bebas dari pemetaan σ selama kondisi persamaan (1) terpenuhi, dan polinomial karakteristik diberikan oleh

$$\Delta_n = (d_1 d_2)^{m-1} \frac{d_1 d_2 (Y - \alpha - \beta)\sin(m+1)\theta + (\alpha\beta Y - \alpha d_1^2 - \beta d_2^2)\sin m\theta}{\sin\theta} \qquad (4)$$

bila $n = 2m+1$ adalah bilangan ganjil dan

$$\Delta_n = (d_1 d_2)^{m-1} \frac{d_1 d_2 \sin(m+1)\theta + \left[\alpha\beta + d_2^2 - (\alpha+\beta)Y\right]\sin m\theta + \alpha\beta \dfrac{d_1}{d_2}\sin(m-1)\theta}{\sin\theta} \qquad (5)$$

bila $n = 2m$ adalah bilangan genap.

Misalkan komponen vektor eigen $\mu^{(k)}(\sigma),\ k = 1,\ldots,n$ yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_k,\ k = 1,\ldots,n$ dan dinotasikan dengan $\mu_j^{(k)}(\sigma),\ j = 1,\ldots,n$ adalah solusi dari sistem persamaan linear

$$\begin{cases} (-\alpha + \xi_k)\mu_1^{(k)} + c_{\sigma_1}\mu_2^{(k)} & = 0 \\ a_{\sigma_1}\mu_1^{(k)} + \xi_k \mu_2^{(k)} + c_{\sigma_2}\mu_3^{(k)} & = 0 \\ \cdots \qquad \vdots & = \vdots \\ a_{\sigma_{n-1}1}\mu_{n-1}^{(k)} + (-\beta + \xi_k)\mu_n^{(k)} & = 0, \end{cases} \qquad (6)$$

dengan $\xi_k = Y$ diberikan oleh persamaan (3) dan $\theta_k,\ k = 1,\ldots,n$ adalah solusi dari persamaan

$$d_1 d_2 (\xi_k - \alpha - \beta)\sin(m+1)\theta_k + \left(\alpha\beta\xi_k - \alpha d_1^2 - \beta d_2^2\right)\sin m\theta_k = 0 \qquad (7)$$

bila $n = 2m+1$ adalah bilangan ganjil dan

$$d_1 d_2 \sin(m+1)\theta_k + \left[\alpha\beta + d_2^2 - (\alpha+\beta)\xi_k\right]\sin m\theta_k + \alpha\beta\frac{d_1}{d_2}\sin(m-1)\theta_k = 0$$

bila $n = 2m$ adalah bilangan genap.

Karena sistem persamaan (6) bergantung linear maka dengan mengeliminasi persamaan pertama pada sistem (6) diperoleh sistem persamaan berukuran $(n-1)\times(n-1)$, yang dalam bentuk matrik diberikan oleh

$$\begin{pmatrix} \xi_k & c_{\sigma_2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{\sigma_2} & \xi_k & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{\sigma_{n-1}} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{\sigma_{n-1}} & (-\beta + \xi_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_2^{(k)} \\ \mu_3^{(k)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \mu_n^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{\sigma_1}\mu_1^{(k)} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Berdasarkan persamaan (4) dan (5) untuk $\alpha = 0$ dan n diganti dengan $n-1$ diperoleh determinan dari sistem (8) , yaitu

$$\Delta_{n-1}^{(k)} = \left(d_1 d_2\right)^{m-1} \frac{d_1 d_2 \sin(m+1)\theta_k + \left[d_1^2 - \beta\xi_k\right]\sin m\theta_k}{\sin\theta_k}$$

bila $n = 2m+1$ adalah bilangan ganjil dan

$$\Delta_{n-1}^{(k)} = \left(d_1 d_2\right)^{m-1} \frac{(\xi_k - \beta)\sin m\theta_k - \beta\dfrac{d_1}{d_2}\sin(m-1)\theta_k}{\sin\theta_k}$$

bila $n = 2m$ adalah bilangan genap, untuk semua $k = 1,\ldots,n$.

Penyelesaian sistem persamaan (8) menggunakan Aturan Cramer diperoleh

$$\mu_j^{(k)}(\sigma) = \frac{\Gamma_j^{(k)}(\sigma)}{\Delta_{n-1}^{(k)}}, \; j,k = 1,\dots,n, \tag{9}$$

dengan

$$\Gamma_j^{(k)}(\sigma) = \begin{vmatrix} \xi_k & c_{\sigma_2} & 0 & \cdots & a_{\sigma_2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{\sigma_2} & \xi_k & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & c_{\sigma_{j-2}} & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{\sigma_{j-2}} & \xi_k & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{\sigma_{j-1}} & 0 & c_{\sigma_j} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \xi_k & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots & a_{\sigma_{j+1}} & \ddots & c_{\sigma_{n-1}} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_{\sigma_{n-1}} & (-\beta + \xi_k) \end{vmatrix}$$

$j = 2,\dots,n,\; k = 1,\dots,n$. Dengan mempertukarkan $j-2$ kolom pertama dengan $j-1$ kolom pertama dan menggunakan sifat determinan diperoleh

$$\mu_j^{(k)}(\sigma) = (-1)^{j-2}\, \frac{\Lambda_j^{(k)}(\sigma)}{\Delta_{n-1}}, \; j = 2,\dots,n, \tag{10}$$

dengan $\Lambda_j^{(k)}(\sigma)$ merupakan determinan dari matrik

$$C_j^{(k)}(\sigma) = \begin{pmatrix} T_{j-1}^{(k)}(\sigma) & 0 \\ 0 & S_{n-j}^{(k)}(\sigma) \end{pmatrix}$$

dengan

$$T_{j-1}^{(k)}(\sigma) = \begin{pmatrix} a_{\sigma_1}\mu_1^{(k)} & \xi_k & c_{\sigma_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{\sigma_2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & c_{\sigma_{j-2}} \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \xi_k \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{\sigma_{j-1}} \end{pmatrix}$$

adalah matriks *supertriangular* berorde $j-1$ dengan diagonal $\left(-a_{\sigma_1}\mu_1^{(k)}, a_{\sigma_2}, \dots, a_{\sigma_{j-1}}\right)$ dan

$$S_{n-j}^{(k)}(\sigma) = \begin{pmatrix} \xi_k & c_{\sigma_{j+1}} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{\sigma_{j+1}} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{\sigma_{n-1}} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{\sigma_{n-1}} & (-\beta + \xi_k) \end{pmatrix}$$

adalah matriks tridiagonal berorde $n-j$ yang berbentuk persamaan (2) dan memenuhi kondisi (1). Jadi

$$\begin{aligned} \left|C_j^{(k)}(\sigma)\right| &= \left|T_{j-1}^{(k)}(\sigma)\right|\left|S_{n-j}^{(k)}(\sigma)\right| \\ &= -a_{\sigma_1} \dots a_{\sigma_{j-1}} \mu_1^{(k)} \Delta_{n-j}^{(k)} \end{aligned} \tag{11}$$

untuk $j = 2,\dots,n$ dan $k = 1,\dots,n$, dimana $\Delta_{n-j}^{(k)}(\sigma)$ diberikan oleh persamaan (4) dan (5) untuk $\alpha = 0$ dan $n-1$ diganti dengan $n-j$ dan misalkan $\frac{n-j}{2} = x$ sehingga diperoleh persamaan berikut

$$\Delta_{n-j}^{(k)} = \begin{cases} (d_1 d_2)^{x-1} \dfrac{d_1 d_2 \sin(x+1)\theta_k + (d_1^2 - \beta\xi_k)\sin x\theta_k}{\sin\theta_k}, \ j \text{ ganjil} \\ (d_1 d_2)^{x-\frac{1}{2}} \dfrac{(\xi_k - \beta)\sin\left(x+\frac{1}{2}\right)\theta_k - \beta\dfrac{d_2}{d_1}\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)\theta_k}{\sin\theta_k}, \ j \text{ genap} \end{cases} \quad (12)$$

jika n bilangan ganjil, untuk semua $j = 2,...,n$ dan $k = 1,...,n$. Subtitusikan (11) dengan (12) diperoleh

$$\mu_j^{(k)}(\sigma) = (-1)^{j-1} a_{\sigma_1} \ldots a_{\sigma_{j-1}} \mu_1^{(k)} \frac{\Delta_{n-j}^{(k)}}{\Delta_{n-1}^{(k)}}, \ j = 2,...,n \text{ dan } k = 1,...,n. \quad (13)$$

Subtitusikan juga persamaan (9)-(13) sehingga diperoleh

$$\mu_j^{(k)}(\sigma) = \mu_j(\sigma)\mu_1^{(k)} \begin{cases} \dfrac{d_1 d_2 \sin(x+1)\theta_k + (d_1^2 - \beta\xi_k)\sin x\theta_k}{d_1 d_2 \sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta_k + (d_1^2 - \beta\xi_k)\sin\frac{n-1}{2}\theta_k}, \ j \text{ ganjil} \\ \sqrt{d_1 d_2}\, \dfrac{(\xi_k - \beta)\sin\left(x+\frac{1}{2}\right)\theta_k - \beta\dfrac{d_2}{d_1}\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)\theta_k}{d_1 d_2 \sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta_k + (d_1^2 - \beta\xi_k)\sin\frac{n-1}{2}\theta_k}, \ j, \text{genap} \end{cases} \quad (14)$$

jika n ganjil, dan untuk semua $j = 2,...,n$ dan $k = 1,...,n$ dengan

$$\mu_j(\sigma) = \left(-\sqrt{d_1 d_2}\right)^{1-j} a_{\sigma_1} \ldots a_{\sigma_{j-1}}, \ j = 2,..,n, \quad (15)$$

$\xi_k = Y$ dan θ_k masing-masing diberikan oleh (3) dan (7).

Kasus khusus untuk kasus pada matriks tridiagonal $A_n(\sigma)$ ketika n ganjil:

Misalkan dinyatakan

$$\rho_j(\sigma) = \left(-\sqrt{d_1 d_2}\right)^{n-1} \mu_j(\sigma), \quad j = 1,...,n \quad (16)$$

dengan $\mu_j(\sigma)$ diberikan persamaan (15).

Selanjutnya nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tridiagonal $A_n(\sigma)$ diberikan pada Teorema 3.

Teorema 3 [2] Jika $\alpha = \beta = 0$, maka nilai eigen $\lambda_k(\sigma), k = 1,...,n$ dari matriks tridiagonal $A_n(\sigma)$ yang diberikan persamaan (2) adalah bebas dari entri-entri $(a_i, c_i, \ i = 1,...,n-1)$ dan bebas pemetaan σ selama kondisi persamaan (1) terpenuhi dan diberikan oleh

$$\lambda_k = \begin{cases} b + \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_2 \cos\theta_k}, k = 1,...,m \\ b - \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_2 \cos\theta_k}, k = m+1,...,2m \\ b, \ k = n \end{cases}.$$

Vektor eigen yang bersesuaian $\mu^{(k)}(\sigma) = \left(\mu_1^{(k)}(\sigma),..., \mu_n^{(k)}(\sigma)\right)^t$, $k = 1,...,n-1$ diberikan oleh

$$\mu_j^{(k)}(\sigma) = \rho_j(\sigma) \begin{cases} d_1 d_2 \sin(x+1)\theta_k + d_1^2 \sin x\theta_k, \ j \text{ ganjil} \\ \sqrt{d_1 d_2}(b - \lambda_k)\sin\left(x+\frac{1}{2}\right)\theta_k, \ j \text{ genap} \end{cases}$$

dan

$$\mu_j^{(k)}(\sigma)=\begin{cases} a_{\sigma_1}\dots a_{\sigma_{j-1}}\left(-d_2^2\right)^x, & j \text{ ganjil}, \\ 0, & j \text{ genap}, \end{cases}$$

$j=1,\dots,n$ dengan $\rho_j(\sigma)$ diberikan oleh persamaan (19) dan

$$\theta_k=\begin{cases} \dfrac{2k\pi}{n+1}, & k=1,\dots,m \\ \dfrac{2(k-m)\pi}{n+1}, & k=1,\dots,2m \end{cases}.$$

Bukti : (Lihat [2]).

Teorema 4 [2] Jika $\alpha=d_2$ dan $\beta=d_1$ atau $\beta=-d_1$ dan $\alpha=-d_2$, nilai eigen $\lambda_k(\sigma),\ k=1,\dots,n$ dari matriks yang berbentuk $A_n(\sigma)$ yang diberikan persamaan (2) adalah bebas dari entri-entri $(a_i, c_i,\ i=1,\dots,n-1)$ dan bebas dari pemetaan σ selama kondisi persamaan (1) terpenuhi dan diberikan oleh

$$\lambda_k=\begin{cases} b+\sqrt{d_1^2+d_2^2+2d_1d_2\cos\theta_k}, & k=1,\dots,m, \\ b-\sqrt{d_1^2+d_2^2+2d_1d_2\cos\theta_k}, & k=m+1,\dots,2m, \\ b-(\alpha+\beta), & k=n. \end{cases} \tag{17}$$

Vektor eigen yang bersesuaian $\mu^{(k)}(\sigma)=\left(\mu_1^{(k)}(\sigma),\dots,\mu_n^{(k)}(\sigma)\right)^t$, $k=1,\dots,n$ diberikan oleh

$$\mu_j^{(k)}(\sigma)=\rho_j(\sigma)\begin{cases} d_2\sin(x+1)\theta_k+[d_1-b+\lambda_k]\sin x\theta_k, & j \text{ ganjil} \\ -\sqrt{\dfrac{d_2}{d_1}}\left[(d_1-b+\lambda_k)\sin\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\theta_k+d_2\sin\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\theta_k\right], & j \text{ genap} \end{cases} \tag{18}$$

$k=1,\dots,n-1$ dan

$$\mu_j^{(n)}(\sigma)=\rho_j(\sigma)\begin{cases} 1, & j \text{ ganjil}, \\ \sqrt{\dfrac{d_2}{d_1}}, & j \text{ genap} \end{cases}$$

$j=1,\dots,n$, ketika $\alpha=d_2$ dan $\beta=d_1$ dan

$$\mu_j^{(k)}(\sigma)=\rho_j(\sigma)\begin{cases} d_2\sin(x+1)\theta_k+[d_1+b-\lambda_k]\sin x\theta_k, & j \text{ ganjil} \\ \sqrt{\dfrac{d_2}{d_1}}\left[(d_1+b-\lambda_k)\sin\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\theta_k+d_2\sin\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\theta_k\right], & j \text{ genap} \end{cases} \tag{19}$$

$k=1,..,n-1$ dan

$$\mu_j^{(n)}(\sigma)=\rho_j(\sigma)\begin{cases} 1, & j \text{ ganjil}, \\ -\sqrt{\dfrac{d_2}{d_1}}, & j \text{ genap} \end{cases}$$

$j=1,\dots,n$ ketika $\beta=-d_1$ dan $\alpha=-d_2$, $j=1,\dots,n$ dimana $\rho_j(\sigma)$ diberikan oleh (16) dan

$$\theta_k=\begin{cases} \dfrac{2k\pi}{n}, & k=1,\dots,m \\ \dfrac{2(k-m)\pi}{n}, & k=m+1,\dots,2m \end{cases}. \tag{20}$$

Bukti : Pertama, ditunjukkan nilai eigen dipersamaan (17) untuk $\alpha = \beta = 0$ dan kondisi (1) terpenuhi, sehingga $\lambda = \lambda_k$ dan $\theta = \theta_k$, dan (3) menjadi

$$Y^2 = d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_2 \cos\theta_k$$
$$(b - \lambda_k)(b - \lambda_k) = d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_2 \cos\theta_k$$
$$\lambda_k^2 - (2b)\lambda_k + b^2 - d_1^2 - d_2^2 - 2d_1 d_2 \cos\theta_k = 0$$
$$\lambda_k = \frac{-(-2b) \pm \sqrt{(-2b)^2 - 4.1\left(b^2 - d_1^2 - d_2^2 - 2d_1 d_2 \cos\theta_k\right)}}{2}$$
$$= b \pm \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_2 \cos\theta_k},$$
$$\lambda_n = b - Y$$
$$\lambda_n = b - \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_2 \cos\theta_k}$$
$$\lambda_n = b - \sqrt{\beta_1^2 + \alpha_2^2 + 2\beta\alpha \cos\theta_k}$$
$$\lambda_n = b - \sqrt{(\beta + \alpha)^2}$$
$$\lambda_n = b - (\alpha + \beta),\ k = n$$

Jadi

$$\lambda_k = \begin{cases} b + \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_2 \cos\theta_k} & ,k = 1,\dots,m \\ b - \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_2 \cos\theta_k} & ,k = m+1,\dots,2m \\ b - (\alpha + \beta), & k = n \end{cases}.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan eigen vektor yang bersesuaian dengan nilai eigen persamaan (17). Dengan menggunakan persamaan (14) untuk $\alpha = d_2$, $\beta = d_1$ dan

$$\mu_1^{(k)} = \left(-\sqrt{d_1 d_2}\right)^{n-1}\left[d_2 \sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta_k + \left[d_1 - b + \lambda_k\right]\sin\left(\frac{n-1}{2}\right)\theta_k\right]$$

Jika j ganjil maka

$$\mu_j^{(k)}(\sigma) = \mu_j(\sigma)\mu_1^{(k)}\left(\frac{d_1 d_2 \sin(x+1)\theta_k + \left(d_1^2 - \beta\xi_k\right)\sin x\theta_k}{d_1 d_2 \sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta_k + \left(d_1^2 - \beta\xi_k\right)\sin\left(\frac{n-1}{2}\right)\theta_k}\right)$$

karena $\xi_k = Y = b - \lambda_k$ diperoleh

$$\mu_j^{(k)}(\sigma) = \mu_j(\sigma)\left(-\sqrt{d_1 d_2}\right)^{n-1}\left[d_2 \sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta_k + \left[d_1 - b + \lambda_k\right]\sin\left(\frac{n-1}{2}\right)\theta_k\right]$$
$$\left(\frac{d_1 d_2 \sin(x+1)\theta_k + (d_1 - b + \lambda_k)\sin x\theta_k}{d_1 d_2 \sin\left(\frac{n-1}{2}\right)\theta_k + (d_1 - b + \lambda_k)\sin\left(\frac{n-1}{2}\right)\theta_k}\right)$$

dari persamaan (16) diperoleh

$$\mu_j^{(k)}(\sigma) = \rho_j(\sigma)\left(d_2 \sin(x+1)\theta_k + \left[d_1 - b + \lambda_k\right]\sin x\theta_k\right).$$

Jika j genap maka

$$\mu_j^{(k)}(\sigma)=\mu_j(\sigma)\mu_1^{(k)}\left(\sqrt{d_1d_2}\,\frac{(\xi_k-\beta)\sin\left(x+\frac{1}{2}\right)\theta_k-\beta\frac{d_2}{d_1}\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)\theta_k}{d_1d_2\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta_k+\left(d_1^2-\beta\xi_k\right)\sin\left(\frac{n-1}{2}\right)\theta_k}\right)$$

karena $\xi_k=Y=b-\lambda_k$ diperoleh

$$\mu_j^{(k)}(\sigma)=\mu_j(\sigma)\left(-\sqrt{d_1d_2}\right)^{n-1}\left[d_2\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta_k+\left[d_1-b+\lambda_k\right]\sin\left(\frac{n-1}{2}\right)\theta_k\right]$$

$$\left(\sqrt{d_1d_2}\,\frac{(b-\lambda_k-d_1)\sin\left(x+\frac{1}{2}\right)\theta_k-d_1\frac{d_2}{d_1}\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)\theta_k}{d_1d_2\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta_k+\left(d_1-b+\lambda_k\right)\sin\left(\frac{n-1}{2}\right)\theta_k}\right)$$

dari persamaan (16) diperoleh

$$\mu_j^{(k)}(\sigma)=\rho_j(\sigma)\left(-\sqrt{\frac{d_2}{d_1}}\left[(d_1-b+\lambda_k)\sin\left(x+\frac{1}{2}\right)\theta_k+d_2\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)\theta_k\right]\right)$$

Jadi

$$\mu_j^{(k)}(\sigma)=\rho_j(\sigma)\begin{cases}d_2\sin(x+1)\theta_k+\left[d_1-b+\lambda_k\right]\sin x\theta_k,\ j\ \text{ganjil}\\ -\sqrt{\frac{d_2}{d_1}}\left[(d_1-b+\lambda_k)\sin\left(x+\frac{1}{2}\right)\theta_k+d_2\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)\theta_k\right],\ j\ \text{genap}\end{cases}.$$

Dengan cara yang sama akan ditentukan untuk $\beta=-d_1$, $\alpha=-d_2$ dan

$$\mu_1^{(k)}=\left(-\sqrt{d_1d_2}\right)^{n-1}\left[d_2\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta_k+\left[d_1+b-\lambda_k\right]\sin\left(\frac{n-1}{2}\right)\theta_k\right].$$

Jika j ganjil maka

$$\mu_j^{(k)}(\sigma)=\mu_j(\sigma)\mu_1^{(k)}\left(\frac{d_1d_2\sin(x+1)\theta_k+\left(d_1^2-\beta\xi_k\right)\sin x\theta_k}{d_1d_2\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta_k+\left(d_1^2-\beta\xi_k\right)\sin\left(\frac{n-1}{2}\right)\theta_k}\right)$$

karena $\xi_k=Y=b-\lambda_k$ diperoleh

$$\mu_j^{(k)}(\sigma)=\mu_j(\sigma)\left(-\sqrt{d_1d_2}\right)^{n-1}\left[d_2\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta_k+\left[d_1+b-\lambda_k\right]\sin\left(\frac{n-1}{2}\right)\theta_k\right]$$

$$\left(\frac{d_1d_2\sin(x+1)\theta_k+\left(d_1-b+\lambda_k\right)\sin x\theta_k}{d_1d_2\sin\left(\frac{n-1}{2}\right)\theta_k+\left(d_1-b+\lambda_k\right)\sin\left(\frac{n-1}{2}\right)\theta_k}\right)$$

dari persamaan (16) diperoleh

$$\mu_j^{(k)}(\sigma)=\rho_j(\sigma)\left(d_2\sin(x+1)\theta_k+\left[d_1+b-\lambda_k\right]\sin x\theta_k\right).$$

Jika j genap maka

$$\mu_j^{(k)}(\sigma) = \mu_j(\sigma)\mu_1^{(k)}\left(\sqrt{d_1 d_2}\,\frac{(\xi_k - \beta)\sin\left(x+\frac{1}{2}\right)\theta_k - \beta\frac{d_2}{d_1}\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)\theta_k}{d_1 d_2\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta_k + \left(d_1^2 - \beta\xi_k\right)\sin\left(\frac{n-1}{2}\right)\theta_k}\right)$$

karena $\xi_k = Y = b - \lambda_k$ diperoleh

$$\mu_j^{(k)}(\sigma) = \mu_j(\sigma)\left(-\sqrt{d_1 d_2}\right)^{n-1}\left[d_2\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta_k + [d_1 + b - \lambda_k]\sin\left(\frac{n-1}{2}\right)\theta_k\right]$$

$$\left(\sqrt{d_1 d_2}\,\frac{(b-\lambda_k - d_1)\sin\left(x+\frac{1}{2}\right)\theta_k - d_1\frac{d_2}{d_1}\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)\theta_k}{d_1 d_2\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta_k + (d_1 - b + \lambda_k)\sin\left(\frac{n-1}{2}\right)\theta_k}\right)$$

dari persamaan (16) diperoleh

$$\mu_j^{(k)}(\sigma) = \rho_j(\sigma)\left(\sqrt{\frac{d_2}{d_1}}\left[(d_1 + b - \lambda_k)\sin\left(\frac{x+1}{2}\right)\theta_k + d_2\sin\left(\frac{x-1}{2}\right)\theta_k\right]\right).$$

Jadi

$$\mu_j^{(k)}(\sigma) = \rho_j(\sigma)\begin{cases} d_2\sin(x+1)\theta_k + [d_1 + b - \lambda_k]\sin x\theta_k,\ j\ \text{ganjil} \\ \sqrt{\frac{d_2}{d_1}}\left[(d_1 + b - \lambda_k)\sin\left(x+\frac{1}{2}\right)\theta_k + d_2\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)\theta_k\right],\ j\ \text{genap}\end{cases}.$$

Untuk membuktikan θ_k pada persamaan (20) digunakan persamaan (5) dan nilai $\alpha = \beta = 0$ diperoleh $\sin m\theta_k = 0$ maka $Y \neq 0$, sehingga

$$\sin m\theta_k = 0$$

$$\sin m\theta_k = \sin 0$$

$$m\theta_k = 0 + k\pi$$

$$\theta_k = \frac{k\pi}{m}$$

dengan $m = \frac{n}{2}$ sehingga θ_k menjadi

$$\theta_k = \frac{2k\pi}{n}\ ,k = 1,\ldots,m.$$

Jika $k = m+1,\ldots,2m$

$$\theta_k = \frac{2(k-m)\pi}{n}\ ,k = m+1,\ldots,2m.$$

Jadi

$$\theta_k = \begin{cases} \dfrac{2k\pi}{n} & ,k = 1,\ldots,m \\ \dfrac{2(k-m)\pi \quad k = m+1,\ldots,2m}{n} \end{cases}.$$ ■

Teorema 5 [2] Jika $\alpha = -d_2$ dan $\beta = d_1$ atau $\beta = -d_1$ dan $\alpha = d_2$, nilai eigen $\lambda_k(\sigma)$, $k = 1,\ldots,n$ dari matriks berbentuk $A_n(\sigma)$ yang diberikan persamaan (2) adalah bebas dari entri-entri $(a_i, c_i,\ i = 1,\ldots,n-1)$ dan bebas dari pemetaan σ selama kondisi persamaan (1) terpenuhi dan diberikan oleh

$$\lambda_k = \begin{cases} b + \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_2 \cos\theta_k}\ , k = 1,\ldots,m, \\ b - \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_2 \cos\theta_k}\ , k = m+1,\ldots,2m, \\ b - (\alpha + \beta),\ k = n. \end{cases}$$

Vektor eigen $\mu^{(k)}(\sigma) = \left(\mu_1^{(k)}(\sigma),\ldots,\mu_n^{(k)}(\sigma)\right)^t$, $k = 1,\ldots,n$ diberikan oleh (18) dan

$$\mu_j^{(n)}(\sigma) = \rho_j(\sigma)\begin{cases} (-1)^{\frac{j-1}{2}},\ j \text{ ganjil}, \\ \sqrt{\dfrac{d_2}{d_1}}(-1)^{\frac{j+2}{2}},\ j \text{ genap}, \end{cases}$$

$j = 1,\ldots,n$, ketika $\alpha = -d_2$ dan $\beta = d_1$ dan (19) dan

$$\mu_j^{(n)}(\sigma) = \rho_j(\sigma)\begin{cases} (-1)^{\frac{j-1}{2}},\ j \text{ ganjil}, \\ \sqrt{\dfrac{d_2}{d_1}}(-1)^{\frac{j}{2}},\ j \text{ genap}, \end{cases}$$

$j = 1,\ldots,n$ ketika $\beta = -d_1$ dan $\alpha = d_2$, dengan $\rho_j(\sigma)$ diberikan oleh (16) dan

$$\theta_k = \begin{cases} \dfrac{(2k-1)\pi}{n},\ k = 1,\ldots,m \\ \dfrac{(2(k-m)-1)\pi}{n},\ k = m+1,\ldots,2m \end{cases}.$$

Bukti : dapat diperoleh sengan cara yang sama seperti Teorema 4.

Contoh

$$A_7(\sigma) = \begin{pmatrix} 5-4\sqrt{2} & 54i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 5 & -16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 6i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9i & 5 & -8i\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i\sqrt{2} & 5 & -18i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3i & 5 & 2+2i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8-8i & 5-3\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

dengan

$$a_j c_j = \begin{cases} d_1^2 = 49, & j = ganjil \\ d_2^2 = 49 & j = genap \end{cases},\ b = 5,\ \alpha = 4\sqrt{2} \text{ dan } \beta = 3\sqrt{6}.$$

Nilai eigen yang diperoleh dari matriks di atas dengan menggunakan persamaan (17) adalah

$$\lambda_1 = 5 + \sqrt{\left(3\sqrt{6}\right)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(3\sqrt{6}\right)\left(4\sqrt{2}\right)\cos\frac{2\pi}{7}} = 5 + 11,73 = 16,37$$
$$\lambda_2 = 5 + \sqrt{\left(3\sqrt{6}\right)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(3\sqrt{6}\right)\left(4\sqrt{2}\right)\cos\frac{4\pi}{7}} = 5 + 8,23 = 13,23$$
$$\lambda_3 = 5 + \sqrt{\left(3\sqrt{6}\right)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(3\sqrt{6}\right)\left(4\sqrt{2}\right)\cos\frac{6\pi}{7}} = 5 + 3,37 = 8,37$$
$$\lambda_4 = 5 - \sqrt{\left(3\sqrt{6}\right)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(3\sqrt{6}\right)\left(4\sqrt{2}\right)\cos\frac{2\pi}{7}} = 5 - 11,73 = -6,73$$
$$\lambda_5 = 5 - \sqrt{\left(3\sqrt{6}\right)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(3\sqrt{6}\right)\left(4\sqrt{2}\right)\cos\frac{4\pi}{7}} = 5 - 8,23 = -3,23$$
$$\lambda_6 = 5 - \sqrt{\left(3\sqrt{6}\right)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(3\sqrt{6}\right)\left(4\sqrt{2}\right)\cos\frac{6\pi}{7}} = 5 - 3,37 = 1,63$$
$$\lambda_7 = 5 - \left(3\sqrt{6} + 4\sqrt{2}\right) = 5 - 12,99 = -7,99,$$

dan vektor eigennya yaitu:
untuk $\lambda_1 = 16,37$

$$\mu_1^{(1)}(\sigma) = (-7)^6\left(7\sin\frac{8\pi}{7} + 18,73\sin\frac{6\pi}{7}\right) = (117649)(1,18) = 138825,82$$
$$\mu_2^{(1)}(\sigma) = (-7)^5\left(-\left(18,73\sin\frac{6\pi}{7} + 7\sin\frac{4\pi}{7}\right)\right) = (-16807)(-0,98) = 16470,86$$
$$\mu_3^{(1)}(\sigma) = (-7)^4\left(7\sin\frac{6\pi}{7} + 18,73\sin\frac{4\pi}{7}\right) = (2401)(0,81) = 19448,1$$
$$\mu_4^{(1)}(\sigma) = (-7)^3\left(-\left(18,73\sin\frac{4\pi}{7} + 7\sin\frac{2\pi}{7}\right)\right) = (-343)(-0,61) = 209,23$$
$$\mu_5^{(1)}(\sigma) = (-7)^2\left(7\sin\frac{4\pi}{7} + 18,73\sin\frac{2\pi}{7}\right) = (49)(0,45) = 22,05$$
$$\mu_6^{(1)}(\sigma) = (-7)^1\left(-\left(18,73\sin\frac{2\pi}{7} + 7\sin 0\right)\right) = (-7)(-0,26) = 1,82$$
$$\mu_7^{(1)}(\sigma) = (-7)^0\left(7\sin\frac{2\pi}{7} + 18,73\sin 0\right) = 0,098,$$

jadi vektor eigen untuk μ_1 yaitu $\begin{pmatrix} 138825,82 \\ 16470,86 \\ 19448,1 \\ 209,23 \\ 22,05 \\ 1,82 \\ 0,098 \end{pmatrix}$,

dan untuk vektor eigen lainnya dicari dengan cara yang sama.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, Howard. 1987. *Aljabar Linear Elementer Edisi Kelima*. Terj. Dari *Elementary Linear Algebra*, *fifth Edition*, oleh Silaban, Ph. D. & Susila, I. N. Penerbit Erlangga, Jakarta.

[2] S. Kouachi . 2006. Eigenvalues and eigenvectors of tridiagonal matrices. *Electronic Journal of Linear Algebra*,15:115-133.