# FAMILI BARU METODE ITERASI BERORDE TIGA UNTUK MENEMUKAN AKAR GANDA PERSAMAAN NONLINEAR

**Nurul Khoiromi**

Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

nurulkhoiromi@yahoo.co.id

## ABSTRACT

In this article, we discuss a new family iterative method derived from a linear combination of Osada's and Euler-Chebyshev's for multiple roots. Analytically, it is shown that the method is of order three. Furthermore, by choosing the certain values of the parameter in the new family iterative methods, several well-known methods and new iterative methods are obtained. Numerical comparisons between the proposed iterative methods and well-known methods are carried out by looking at the number of iterations and number of function evaluations.

Keywords: *Newton's method, multiple roots, nonlinear equation, order of convergence, iterative methods.*

## ABSTRAK

Artikel ini membahas famili baru metode iterasi yang diperoleh dari kombinasi linear metode Osada dan Metode Euler-Chebyshev untuk akar ganda. Secara analitik ditunjukkan bahwa famili baru metode iterasi ini mempunyai konvergensi berorde tiga. Selanjutnya, dengan memilih parameter tertentu yang ada pada famili baru metode iterasi diperoleh beberapa metode iterasi yang sudah dikenal dan beberapa metode iterasi baru. Perbandingan numerik antara metode yang diperkenalkan dan metode yang sudah dikenal dilakukan dengan melihat jumlah iterasi dan jumlah perhitungan fungsi.

Kata kunci: *metode Newton, akar ganda, persamaan nonlinear, orde konvergensi, metode iterasi.*

## 1. PENDAHULUAN

Menyelesaikan persamaan nonlinear yang berbentuk $f(x) = 0$ merupakan permasalahan yang paling penting dalam analisis numerik. Penyelesaian persamaan nonlinear dapat dilakukan dengan dua metode, yaitu metode analitik dan metode numerik.

Banyak metode numerik yang dapat digunakan untuk mencari akar dari persamaan nonlinear. Metode numerik yang sering digunakan dalam menyelesaikan persamaan nonlinear adalah metode Newton, yang konvergensinya kuadratik untuk persamaan nonlinear yang mempunyai akar sederhana dan linear untuk persamaan nonlinear yang memiliki akar ganda [3, h. 78]. Oleh karena itu perlu dilakukan modifikasi metode Newton untuk diterapkan pada persamaan nonlinear akar ganda, dengan tujuan mempercepat iterasi dan mempertahankan/memperkecil tingkat kesalahan (*error*). Formula hasil modifikasi metode Newton yang konvergen kuadratik untuk akar ganda diberikan oleh

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{1}$$

dengan $f'(x_n) \neq 0$ dan $n = 0, 1, 2, \cdots$.

Pada artikel ini dibahas famili baru metode iterasi berorde tiga untuk akar ganda yang merupakan review sebagian dari artikel Chun et al. [2] yang berjudul "*New Families of Nonlinear Third-Order Solvers for Finding Multiple Roots*".

Pembahasan dimulai dengan menurunkan metode iterasi baru. Kemudian dilanjutkan dengan melakukan kajian *error* analisis yang menunjukkan famili baru metode iterasi ini memiliki konvergensi berorde tiga. Pada bagian tiga dilakukan perbandingan numerik persamaan nonlinear terhadap beberapa fungsi uji.

Pada artikel ini digunakan tanda titik "." sebagai ganti tanda koma "," untuk memisahkan digit desimal.

## 2. FAMILI BARU METODE ITERASI BERORDE TIGA

Metode Osada untuk akar ganda (MO) [4] dinyatakan dalam bentuk iterasi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}m\,(m+1)\,\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{1}{2}\,(m-1)^2\,\frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}, \tag{2}$$

dan metode Euler-Chebyshev untuk akar ganda (MEC) [6, h. 130] dinyatakan dalam bentuk iterasi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{m\,(3-m)}{2}\,\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{m^2}{2}\frac{(f(x_n))^2\,f''(x_n)}{(f'(x_n))^3}. \tag{3}$$

Selanjutnya dibentuk kombinasi linear antara metode Osada untuk akar ganda (MO) pada persamaan (2) dan metode Euler-Chebyshev untuk akar ganda (MEC) pada persamaan (3), dengan memperkenalkan suatu parameter $\theta \in \mathbb{R}$, yaitu

$$x_{n+1} = \theta(\mathrm{MO}) + (1-\theta)(\mathrm{MEC}). \tag{4}$$

Penyederhanaan persamaan (4) metode iterasi baru

$$x_{n+1} = x_n - \frac{m\left((2\theta-1)\,m+3-2\theta\right)}{2}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{\theta\,(m-1)^2}{2}\frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} - \frac{(1-\theta)\,m^2}{2}\frac{\left(f(x_n)\right)^2 f''(x_n)}{\left(f'(x_n)\right)^3}, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Persamaan (5) merupakan famili metode satu parameter untuk akar ganda.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa metode iterasi yang diberikan persamaan (5) memiliki konvergensi berorde tiga.

**Teorema 1 (Orde Konvergensi)** Misalkan $x^* \in I$ adalah akar ganda dengan multiplisitas $m$ dari $f : I \to \mathbb{R}$ yang terdiferensialkan secukupnya pada interval terbuka $I$. Jika $x_0$ cukup dekat dengan $x^*$, maka metode yang didefinisikan oleh persamaan (5) memiliki konvergensi berorde tiga untuk setiap $\theta \in \mathbb{R}$, dan memenuhi persamaan *error*

$$e_{n+1} = K_3 e_n^3 + O(e_n^4),$$

dengan $e_n = x_n - x^*$, dan konstanta *error* $K_3$ sebagai berikut

$$K_3 = \gamma\frac{(f^{(m+1)}(x^*))^2}{(f^{(m)}(x^*))^2} - \frac{1}{(m+2)(m+1)m}\frac{f^{(m+2)}(x^*)}{f^{(m)}(x^*)},$$

dengan

$$\gamma = \frac{m^3+4m^2+(1+4\theta)m+8\theta-6}{2(m+2)(m+1)^2m^2(m-1)}.$$

**Bukti:** Misalkan $x^*$ adalah akar ganda dari $f(x) = 0$ dengan multiplisitas $m$ dan $e_n$ adalah *error* pada iterasi ke-$n$ sehingga $e_n = x_n - x^*$. Maka dengan menggunakan ekspansi Taylor dari $f(x_n)$ di sekitar $x_n = x^*$, dan dengan mengabaikan suku yang memuat $(x_n - x^*)^j$ untuk $j \geq m+4$, diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(x^*) + f'(x^*)(x_n - x^*) + \cdots + \frac{f^{(m-1)}(x^*)}{(m-1)!}(x_n - x^*)^{m-1} \\ &\quad + \frac{f^{(m)}(x^*)}{m!}(x_n - x^*)^m + \frac{f^{(m+1)}(x^*)}{(m+1)!}(x_n - x^*)^{m+1} \\ &\quad + \frac{f^{(m+2)}(x^*)}{(m+2)!}(x_n - x^*)^{m+2} + \frac{f^{(m+3)}(x^*)}{(m+3)!}(x_n - x^*)^{m+3} \\ &\quad + O((x_n - x^*)^{m+4}). \end{aligned}$$

Karena $e_n = x_n - x^*$ dan $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) = 0, \cdots, f^{(m-1)}(x^*) = 0$, maka diperoleh

$$f(x_n) = \frac{f^{(m)}(x^*)}{m!}e_n^m\Big(1 + \bar{C}_1 e_n + \bar{C}_2 e_n^2 + \bar{C}_2 e_n^3 + O(e_n^4)\Big), \tag{6}$$

dengan

$$\bar{C}_j = \frac{m!}{(m+j)!}\frac{f^{(m+j)}(x^*)}{f^{(m)}(x^*)}.$$

Kemudian jika persamaan (6) dikuadratkan, maka diperoleh

$$(f(x_n))^2 = \frac{\left(f^{(m)}(x^*)\right)^2}{(m!)^2} e_n^{2m}\Big(1 + 2\bar{C}_1 e_n + (\bar{C}_1^2 + 2\bar{C}_2)e_n^2 + 2(\bar{C}_3 + \bar{C}_1\bar{C}_2)e_n^3 + O(e_n^4)\Big). \tag{7}$$

Jika $f'(x_n)$ diekspansikan dengan deret Taylor di sekitar $x_n = x^*$ [1, h. 189] dan kemudian dilakukan penyederhanaan, maka diperoleh

$$f'(x_n) = \frac{f^{(m)}(x^*)}{(m-1)!} e_n^{m-1}\Big(1 + \bar{D}_1 e_n + \bar{D}_2 e_n^2 + \bar{D}_3 e_n^3 + O(e_n^4)\Big), \tag{8}$$

dengan

$$\bar{D}_j = \frac{(m-1)!}{(m+j-1)!}\frac{f^{(m+j)}(x^*)}{f^{(m)}(x^*)}.$$

Kemudian dengan cara yang sama, jika $f''(x_n)$ diekspansi dengan deret Taylor di sekitar $x_n = x^*$, maka diperoleh

$$f''(x_n) = \frac{f^{(m)}(x^*)}{(m-2)!} e_n^{m-2}\Big(1 + \bar{S}_1 e_n + \bar{S}_2 e_n^2 + \bar{S}_3 e_n^3 + O(e_n^4)\Big), \tag{9}$$

dengan

$$\bar{S}_j = \frac{(m-2)!}{(m+j-2)!}\frac{f^{(m+j)}(x^*)}{f^{(m)}(x^*)}.$$

Jika persamaan (7) dikalikan dengan persamaan (9), maka diperoleh

$$(f(x_n))^2 f''(x_n) = \frac{\left(f^{(m)}(x^*)\right)^3}{(m-2)!(m!)^2} e_n^{3m-2}\Big(1 + (2\bar{C}_1 + \bar{S}_1)e_n + (\bar{C}_1^2 + 2\bar{C}_2 + 2\bar{S}_1\bar{C}_1 + \bar{S}_2)e_n^2 + (2\bar{C}_3 + 2\bar{C}_1\bar{C}_2 + \bar{S}_1\bar{C}1^2 + 2\bar{S}_1\bar{C}_2 + 2\bar{S}_2\bar{C}_1 + \bar{S}_3)e_n^3 + O(e_n^4)\Big), \tag{10}$$

dan dengan menghitung $(f'(x_n))^3$, diperoleh

$$(f'(x_n))^3 = \frac{\left(f^{(m)}(x^*)\right)^3}{((m-1)!)^3} e_n^{3m-3}\Big(1 + 3\bar{D}_1 e_n + (3\bar{D}_1^2 + 3\bar{D}_2)e_n^2 + (\bar{D}_1^3 + 3\bar{D}_3 + 6\bar{D}_1\bar{D}_2)en^3 + O(e_n^4)\Big). \tag{11}$$

Selanjutnya persamaan (6) dibagi dengan persamaan (8), sehingga

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{\frac{f^{(m)}(x^*)}{m!} e_n^m\Big(1 + \bar{C}_1 e_n + \bar{C}_2 e_n^2 + \bar{C}_3 e_n^3 + O(e_n^4)\Big)}{\frac{f^{(m)}(x^*)}{(m-1)!} e_n^{m-1}\Big(1 + \bar{D}_1 e_n + \bar{D}_2 e_n^2 + \bar{D}_3 e_n^3 + O(e_n^4)\Big)}. \tag{12}$$

Persamaan (12) dapat disederhanakan dengan menggunakan formula deret geometri [5, h. 500] dengan $r = -(\bar{D}_1 e_n + \bar{D}_2 e_n^2 + \bar{D}_3 e_n^3 + O(e_n^4))$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{e_n}{m}\Big(&1 + (\bar{C}_1 - \bar{D}_1)e_n + (\bar{C}_2 - \bar{D}_2 - \bar{C}_1\bar{D}_1 + \bar{D}_1^2)e_n^2 \\ &+ (\bar{C}_3 - \bar{D}_3 - \bar{C}_1\bar{D}_2 + \bar{C}_1\bar{D}_1^2 - \bar{C}_2\bar{D}_1 + 2\bar{D}_1\bar{D}_2 - \bar{D}_1^3)e_n^3 \\ &+ O(e_n^4)\Big). \end{aligned} \tag{13}$$

Kemudian persamaan (8) dibagi dengan persamaan (9), sehingga diperoleh

$$\frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} = \frac{\frac{f^{(m)}(x^*)}{(m-1)!} e_n^{m-1}\Big(1 + \bar{D}_1 e_n + \bar{D}_2 e_n^2 + O(e_n^3)\Big)}{\frac{f^{(m)}(x^*)}{(m-2)!} e_n^{m-2}\Big(1 + \bar{S}_1 e_n + \bar{S}_2 e_n^2 + \bar{S}_3 e_n^3 + O(e_n^4)\Big)}. \tag{14}$$

Persamaan (14) dapat disederhanakan dengan menggunakan formula deret geometri dengan $r = -(\bar{S}_1 e_n + \bar{S}_2 e_n^2 + \bar{S}_3 e_n^3 + O(e_n^4))$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} = \frac{e_n}{m-1}\Big(&1 + (\bar{D}_1 - \bar{S}_1)e_n + (\bar{D}_2 - \bar{S}_2 - \bar{D}_1\bar{S}_1 + \bar{S}_1^2)e_n^2 \\ &+ (\bar{D}_3 - \bar{S}_3 - \bar{D}_1\bar{S}_1^2 - \bar{D}_1\bar{S}_2 - \bar{D}_2\bar{S}_1 + 2\bar{S}_1\bar{S}_2 - \bar{S}_1^3)e_n^3 \\ &+ O(e_n^4)\Big). \end{aligned} \tag{15}$$

Selanjutnya persamaan (10) dibagi dengan persamaan (11), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{(f(x_n))^2 f''(x_n)}{(f'(x_n))^3} = \frac{m-1}{m^2} e_n\Big(&1 + (2\bar{C}_1 + \bar{S}_1 - 3\bar{D}_1)e_n + (\bar{C}_1^2 + 2\bar{C}_2 + 2\bar{C}_1\bar{S}_1 + \bar{S}_2 \\ &+ 6\bar{D}_1^2 - 3\bar{D}_2 - 6\bar{C}_1\bar{D}_1 - 3\bar{D}_1\bar{S}_1)e_n^2 + (2\bar{C}_3 - 3\bar{D}_3 \\ &+ \bar{S}_3 + 2\bar{C}_1\bar{C}_2 - 6\bar{C}_1\bar{D}_2 + 2\bar{C}_1\bar{S}_2 + 12\bar{C}_1\bar{D}_1^2 \\ &- 6\bar{C}_2\bar{D}_1 + 2\bar{C}_2\bar{S}_1 - 3\bar{C}_1^2\bar{D}_1 + \bar{C}_1^2\bar{S}_1 + 12\bar{D}_1\bar{D}_2 \\ &- 3\bar{D}_1\bar{S}_2 - 3\bar{D}_2\bar{S}_1 + 6\bar{S}_1\bar{D}_1^2 - 6\bar{C}_1\bar{S}_1\bar{D}_1 - 10\bar{D}_1^3)e_n^3 \\ &+ O(e_n^4)\Big). \end{aligned} \tag{16}$$

Substitusikan $x_n = e_n + x^*$, persamaan (13), (15) dan (16) ke dalam persamaan (5), dan kemudian disederhanakan sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
e_{n+1} =& \left(1 - \frac{(2\theta-1)\,m + 3 - 2\theta}{2} + \frac{\theta\,(m-1)}{2} - \frac{(1-\theta)\,(m-1)}{2}\right) e_n \\
& - \left(\frac{(2\theta-1)\,m + 3 - 2\theta}{2}(\bar{C}_1 - \bar{D}_1) - \frac{\theta\,(m-1)}{2}(\bar{D}_1 - \bar{S}_1)\right. \\
& \left. + \frac{(1-\theta)\,(m-1)}{2}(2\bar{C}_1 + \bar{S}_1 - 3\bar{D}_1)\right) e_n^2 - \left(\frac{(2\theta-1)\,m + 3 - 2\theta}{2}(\bar{C}_2\right. \\
& - \bar{D}_2 - \bar{C}_1\bar{D}_1 + \bar{D}_1^2) - \frac{\theta\,(m-1)}{2}(\bar{D}_2 - \bar{S}_2 - \bar{D}_1\bar{S}_1 + \bar{S}_1^2) \\
& + \frac{(1-\theta)\,(m-1)}{2}(\bar{C}_1^2 + 2\bar{C}_2 + 2\bar{C}_1\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + 6\bar{D}_1^2 - 3\bar{D}_2 - 6\bar{C}_1\bar{D}_1 \\
& \left. - 3\bar{D}_1\bar{S}_1)\right) e_n^3 + O(e_n^4). \qquad (17)
\end{aligned}
$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan $\bar{C}_j = \frac{m!}{(m+j)!}\frac{f^{(m+j)}(x^*)}{f^{(m)}(x^*)}$, $\bar{D}_j = \frac{(m-1)!}{(m+j-1)!}\frac{f^{(m+j)}(x^*)}{f^{(m)}(x^*)}$ dan $\bar{S}_j = \frac{(m-2)!}{(m+j-2)!}\frac{f^{(m+j)}(x^*)}{f^{(m)}(x^*)}$ ke dalam persamaan (17), diperoleh

$$e_{n+1} = K_3 e_n^3 + O(e_n^4),$$

dengan

$$K_3 = \gamma\frac{(f^{(m+1)}(x^*))^2}{(f^{(m)}(x^*))^2} - \frac{1}{(m+2)(m+1)m}\frac{f^{(m+2)}(x^*)}{f^{(m)}(x^*)}$$

dan

$$\gamma = \frac{m^3 + 4m^2 + (1+4\theta)m + 8\theta - 6}{2(m+2)(m+1)^2 m^2 (m-1)}.$$

Oleh karena itu, metode pada persamaan (5) memiliki konvergensi berorde tiga, dan Teorema 1 terbukti. □

## 3. BEBERAPA KASUS KHUSUS

Pada bagian ini dibahas kasus khusus dari parameter yang terdapat pada metode iterasi berorde tiga pada persamaan (5).

**Kasus 1.** Jika dipilih parameter $\theta = 1$ dan kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan (5), maka diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}m(m+1)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{1}{2}(m-1)^2\frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}, \qquad (18)$$

yang merupakan metode Osada untuk akar ganda pada persamaan (2) yang memiliki konvergensi berorde tiga.

**Kasus 2.** Jika dipilih parameter $\theta = 0$ dan kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan (5), maka diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}m(3-m)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}m^2\frac{(f(x_n))^2 f''(x_n)}{(f'(x_n))^3}, \qquad (19)$$

yang merupakan metode Euler-Chebyshev untuk akar ganda pada persamaan (3) yang memiliki konvergensi berorde tiga.

**Kasus 3.** Jika dipilih parameter $\theta = \frac{1}{2}$ dan kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan (5), maka diperoleh

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{m\left(\left(2(\frac{1}{2}) - 1\right)m + 3 - 2(\frac{1}{2})\right)}{2}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{(\frac{1}{2})(m-1)^2}{2}\frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} \\ &\quad - \frac{(1-\frac{1}{2})m^2}{2}\frac{(f(x_n))^2 f''(x_n)}{(f'(x_n))^3} \\ x_{n+1} &= x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{1}{4}(m-1)^2\frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} - \frac{1}{4}m^2\frac{(f(x_n))^2 f''(x_n)}{(f'(x_n))^3}. \qquad (20) \end{aligned}$$

Persamaan (20) merupakan bentuk umum dari metode iterasi baru untuk akar ganda dengan $\theta = \frac{1}{2}$ yang disebut MC1. Karena metode ini merupakan kasus khusus dari metode pada persamaan (5), maka metode MC1 memiliki konvergensi berorde tiga.

**Kasus 4.** Jika dipilih parameter $\theta = -1$ dan kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan (5), maka diperoleh

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{m\left((2(-1) - 1)m + 3 - 2(-1)\right)}{2}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{(-1)(m-1)^2}{2}\frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} \\ &\quad - \frac{(1-(-1))m^2}{2}\frac{(f(x_n))^2 f''(x_n)}{(f'(x_n))^3} \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{1}{2}m(5-3m)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}(m-1)^2\frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} - m^2\frac{(f(x_n))^2 f''(x_n)}{(f'(x_n))^3}. \qquad (21) \end{aligned}$$

Persamaan (21) merupakan bentuk umum dari metode iterasi baru untuk akar ganda dengan $\theta = -1$ yang disebut MC2. Karena metode ini merupakan kasus khusus dari metode pada persamaan (5), maka metode MC2 memiliki konvergensi berorde tiga.

## 4. PERBANDINGAN NUMERIK

Pada bagian ini dilakukan perbandingan numerik untuk membandingkan kecepatan dalam menemukan akar hampiran dari persamaan nonlinear antara metode iterasi baru berorde tiga pada persamaan (20) (MC1) dan (21) (MC2) dengan metode Newton untuk akar ganda pada persamaan (1) (MN), metode Osada untuk akar ganda pada persamaan (2) (MO) dan metode Euler-Chebyshev untuk akar ganda pada persamaan (3) (MEC) untuk menyelesaikan persamaan nonlinear berorde tiga untuk akar ganda.

Berikut ini diberikan beberapa fungsi yang juga telah digunakan pada [2] untuk membandingkan metode-metode tersebut.

1. $f_1(x) = (\sin^2 x - x^2 + 1)^2$
2. $f_2(x) = (x^3 - 10)^8$
3. $f_3(x) = (e^{x^2+7x-30} - 1)^4$

4. $f_4(x) = (\sqrt{x} - \frac{1}{x} - 3)^3$

5. $f_5(x) = (e^x - x + 20)^2$

6. $f_6(x) = (\ln x + \sqrt{x} - 5)^4$

Untuk melakukan uji komputasi dari keenam contoh di atas digunakan program Maple13 dengan toleransi = $1.0 \times 10^{-32}$. Untuk menemukan akar hampiran persamaan nonlinear akar ganda juga ditentukan kriteria pemberhentian jalannya program komputasi yang sama untuk setiap metode yang dibandingkan, yaitu $|x_n - x_{n-1}| <$ toleransi atau $|f(x_n)| <$ toleransi. Perbandingan hasil komputasi dapat dilihat pada Tabel 1.

Berdasarkan Tabel 1, tampak bahwa tidak ada perubahan yang berarti pada jumlah iterasi dari setiap metode yang dibandingkan. Secara keseluruhan dapat disimpulkan bahwa kedua metode iterasi baru berorde tiga untuk akar ganda, yaitu MC1 dan MC2, sebanding dengan metode iterasi berorde tiga untuk akar ganda lainnya atau dapat dijadikan metode alternatif untuk menyelesaikan persamaan nonlinear berorde tiga untuk akar ganda.

Tabel 1: Perbandingan hasil komputasi dari beberapa metode iterasi

| Metode | $n$ | NFE | $x_n$ | $\lvert f(x_n)\rvert$ | $\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)$ | | | | | |
| $x_0 = 7.0$ | | | | | |
| MN | 7 | 14 | 1.4044916482153412 | $1.359571e-43$ | $1.376794e-11$ |
| MO | 6 | 18 | 1.4044916482153412 | $1.325813e-86$ | $2.695523e-15$ |
| MEC | 5 | 15 | 1.4044916482153412 | $4.372252e-42$ | $9.039656e-08$ |
| MC1 | 5 | 15 | 1.4044916482153412 | $2.354797e-34$ | $1.521714e-06$ |
| MC2 | 5 | 15 | 1.4044916482153412 | $5.787869e-80$ | $1.033914e-13$ |
| $x_0 = 2.0$ | | | | | |
| MN | 6 | 12 | 1.4044916482153412 | $5.118022e-64$ | $1.078435e-16$ |
| MO | 4 | 12 | 1.4044916482153412 | $3.539503e-51$ | $2.162983e-09$ |
| MEC | 4 | 12 | 1.4044916482153412 | $1.531383e-63$ | $2.400021e-11$ |
| MC1 | 4 | 12 | 1.4044916482153412 | $1.446518e-56$ | $3.022693e-10$ |
| MC2 | 4 | 12 | 1.4044916482153412 | $2.444725e-98$ | $8.955772e-17$ |
| $f_2(x)$ | | | | | |
| $x_0 = 9.0$ | | | | | |
| MN | 7 | 14 | 2.1544346954162667 | $9.985986e-58$ | $1.077029e-04$ |
| MO | 5 | 15 | 2.1544346901156625 | $3.430651e-72$ | $5.841749e-04$ |
| MEC | 5 | 15 | 2.1544346900364435 | $2.641630e-82$ | $2.333288e-04$ |
| MC1 | 5 | 15 | 2.1544346900523757 | $4.395090e-77$ | $3.746639e-04$ |
| MC2 | 5 | 15 | 2.1544346900320463 | $6.891048e-94$ | $8.175402e-05$ |

| Metode | $n$ | NFE | $x_n$ | $\|f(x_n)\|$ | $\|x_n - x_{n-1}\|$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_2(x)$ | | | | | |
| $x_0 = 3.0$ | | | | | |
| MN | 4 | 8 | 2.1544347029594388 | $1.102642e-54$ | $1.668836e-04$ |
| MO | 3 | 9 | 2.1544346900410017 | $6.752984e-80$ | $2.788664e-04$ |
| MEC | 3 | 9 | 2.1544346900342882 | $1.579243e-84$ | $1.885023e-04$ |
| MC1 | 3 | 9 | 2.1544346900366607 | $3.832970e-82$ | $2.305692e-04$ |
| MC2 | 3 | 9 | 2.1544346900324112 | $8.472109e-90$ | $1.210376e-04$ |
| $f_3(x)$ | | | | | |
| $x_0 = 3.5$ | | | | | |
| MN | 11 | 22 | 3.0000000000002531 | $1.171460e-46$ | $1.961587e-07$ |
| MO | 8 | 24 | 3.0000000000000000 | $1.631057e-61$ | $8.277899e-07$ |
| MEC | 7 | 21 | 3.0000000001300504 | $8.169974e-36$ | $1.314381e-04$ |
| MC1 | 8 | 24 | 3.0000000000000000 | $7.399317e-82$ | $1.774801e-08$ |
| MC2 | 7 | 21 | 3.0000000000000001 | $2.768725e-61$ | $1.250892e-06$ |
| $x_0 = 8.2$ | | | | | |
| MN | 99 | 198 | 3.0000000000034845 | $4.210443e-42$ | $7.278745e-07$ |
| MO | 72 | 216 | 3.0000000000000020 | $4.347380e-55$ | $2.840561e-06$ |
| MEC | 66 | 198 | 3.0000000000001233 | $6.603490e-48$ | $1.290781e-05$ |
| MC1 | 69 | 207 | 3.0000000000000002 | $8.341947e-59$ | $1.479649e-06$ |
| MC2 | 61 | 183 | 3.0000000000000727 | $7.960734e-49$ | $1.365947e-05$ |
| $f_4(x)$ | | | | | |
| $x_0 = 20.0$ | | | | | |
| MN | 5 | 10 | 9.6335955628326952 | $3.334241e-54$ | $1.679073e-08$ |
| MO | 3 | 9 | 9.6335955628326953 | $1.504068e-50$ | $5.396676e-05$ |
| MEC | 2 | 6 | 9.6335955629218881 | $3.602261e-33$ | $1.342849e-02$ |
| MC1 | 3 | 9 | 9.6335955628326952 | $8.318052e-63$ | $2.995727e-06$ |
| MC2 | 3 | 9 | 9.6335955628326947 | $5.855042e-49$ | $7.899686e-05$ |
| $x_0 = 7.0$ | | | | | |
| MN | 4 | 8 | 9.6335955628326946 | $1.007479e-48$ | $1.375444e-07$ |
| MO | 3 | 9 | 9.6335955628326952 | $1.069308e-82$ | $1.445796e-08$ |
| MEC | 2 | 6 | 9.6335955628326866 | $3.181795e-45$ | $6.149803e-04$ |
| MC1 | 3 | 9 | 9.6335955628326952 | $5.984477e-95$ | $8.036340e-10$ |
| MC2 | 3 | 9 | 9.6335955628326952 | $9.290136e-82$ | $1.791507e-08$ |
| $f_5(x)$ | | | | | |
| $x_0 = 3.5$ | | | | | |
| MN | 5 | 10 | 2.8424389537844471 | $6.676157e-33$ | $3.086163e-09$ |
| MO | 4 | 12 | 2.8424389537844471 | $1.185797e-58$ | $9.342755e-11$ |
| MEC | 4 | 12 | 2.8424389537844471 | $2.440644e-80$ | $3.099474e-14$ |
| MC1 | 4 | 12 | 2.8424389537844471 | $1.338016e-67$ | $3.400826e-12$ |
| MC2 | 3 | 9 | 2.8424389537844471 | $4.202499e-36$ | $8.949851e-07$ |
| $x_0 = 11.0$ | | | | | |
| MN | 13 | 26 | 2.8424389537844471 | $2.685307e-36$ | $4.370546e-10$ |
| MO | 10 | 30 | 2.8424389537844471 | $8.677583e-43$ | $4.116610e-08$ |
| MEC | 9 | 27 | 2.8424389537844471 | $3.671724e-61$ | $4.869850e-11$ |
| MC1 | 10 | 30 | 2.8424389537844471 | $3.245957e-93$ | $1.829776e-16$ |
| MC2 | 8 | 24 | 2.8424389537844471 | $1.219068e-68$ | $3.379895e-12$ |

| Metode | $n$ | NFE | $x_n$ | $\lvert f(x_n)\rvert$ | $\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_6(x)$ | | | | | |
| $x_0 = 6.0$ | | | | | |
| MN | 4 | 8 | 8.3094326942315658 | $9.911055e-60$ | $3.773591e-07$ |
| MO | 3 | 9 | 8.3094326942315718 | $4.826147e-102$ | $4.500582e-08$ |
| MEC | 2 | 6 | 8.3094326936405776 | $9.089399e-40$ | $1.023116e-02$ |
| MC1 | 2 | 6 | 8.3094326852010506 | $4.955112e-35$ | $1.985642e-02$ |
| MC2 | 2 | 6 | 8.3094326937562836 | $3.802159e-40$ | $9.019372e-03$ |
| $x_0 = 18.0$ | | | | | |
| MN | 5 | 10 | 8.3094326942315196 | $5.539096e-56$ | $1.109608e-06$ |
| MO | 3 | 9 | 8.3094326942317382 | $5.713934e-54$ | $4.564446e-04$ |
| MEC | 3 | 9 | 8.3094326942315718 | $2.468163e-83$ | $2.396878e-06$ |
| MC1 | 3 | 9 | 8.3094326942315723 | $4.365217e-64$ | $7.533993e-05$ |
| MC2 | 3 | 9 | 8.3094326942315718 | $2.887614e-71$ | $2.300411e-05$ |

**Ucapan Terimakasih** Penulis mengucapkan terima kasih kepada Dr. Imran M., M.Sc. dan Supriadi Putra, M.Si yang telah memberikan arahan dan bimbingan penulisan skripsi penulis yang menjadi acuan artikel ini.

## DAFTAR PUSTAKA

[1] Bartle, R.G. & Shebert, D.R. 1999. *Introduction to Real Analysis, 4$^{th}$ Ed.* John Wiley & Sons, Inc, New York.

[2] Chun, C., Bae, H. J. & Neta, B. 2009. New Families of Nonlinear Third-Order Solvers for Finding Multiple Roots. *Computers and Mathematics with Application,* **57**:1574-1582.

[3] Mathews, J.H. 1992. *Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering, 2$^{nd}$ Ed.* Prentice Hall. Englewood Cliffs, New Jersey.

[4] Osada, N. 1994. An Optimal Multiple Root-Finding Method of Order Three. *Journal of Computational and Applied Mathematics,* **51**:131-133.

[5] Stewart, J. 2003. *Kalkulus Edisi Kelima: Jilid 2.* Terj. dari *Calculus, Fifth Edition*, oleh Sungkono, C. Penerbit Salemba Teknika, Jakarta.

[6] Traub, J.F. 1964. *Iterative Methods for the Solution of Equations.* Chelsea Publishing Company. New York.