METODE BERTIPE NEWTON UNTUK AKAR GANDA DENGAN KONVERGENSI KUBIK

Risvi Ayu Imtihana[1*], Asmara Karma[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*risviayu@gmail.com

ABSTRACT

This article discusses a Newton-type method for multiple roots, which is derived using a linear combination of Newton's method for multiple roots and an iterative method derived based on a quadrature Gauss-type. Analytic studies show that this iterative method has a third order of convergence and for each iteration, it requires function evaluations three times, so that the efficiency index of the method is 1.44225. Furthermore, computational tests show that the method is superior to other mentioned methods, in terms of the number of iterations required to obtain the roots.

Keywords: *Newton method, multiple roots, order of convergence, Taylor theorem.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas metode bertipe Newton untuk akar ganda, yang diturunkan menggunakan kombinasi linear dari metode Newton untuk akar ganda dan metode iterasi yang diturunkan berdasarkan kuardratur bertipe Gauss. Kajian analitik menunjukkan bahwa metode iterasi yang dihasilkan mempunyai orde kekonvergenan tiga dan untuk setiap iterasinya memerlukan tiga kali evaluasi fungsi, sehingga indek efisiensinya adalah 1.44225. Selanjutnya dari uji komputasi terlihat bahwa metode yang didiskusikan lebih unggul dari metode pembanding, dari segi jumlah iterasi yang diperlukan untuk mendapatkan akar.

Kata kunci: *metode Newton, akar ganda, orde konvergensi, teorema Taylor.*

1. PENDAHULUAN

Persoalan menentukan solusi persamaan nonlinear $f(x) = 0$, akhir-akhir ini menjadi objek kajian yang menarik di bidang analisis numerik. Berbagai metode baru diusulkan untuk menyelesaikan berbagai jenis persamaan nonlinear yang ada. Kebanyakan metode berangkat dari metode numerik yang sudah senior, yaitu metode

Newton yang memiliki orde konvergensi kuadratik apabila tebakan awal x_0 cukup dekat dengan akar [1, h. 71-72].

Akar-akar dari persamaan nonlinear tidak selalu berbentuk akar sederhana, ada juga yang merupakan akar ganda dengan multiplisitas m dengan $m > 1$. Metode numerik untuk mencari akar sederhana akan sangat lambat memperoleh akar jika digunakan pada persamaan nonlinear yang berakar ganda sehingga diperlukan modifikasi untuk mengatasi hal ini. Modifikasi metode Newton untuk akar ganda diberikan oleh

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{1}$$

Metode pada persamaan (1) konvergen secara kuadratik [6, h. 354].

Pada artikel ini dibahas metode bertipe Newton untuk kasus akar ganda yang dikemukakan oleh Homeier [3] dalam artikelnya yang berjudul "*On Newton-Type Methods for Multiple Roots with Cubic Convergence*".

Pembahasan dimulai dengan mendiskusikan bagaimana memperoleh bentuk iterasi metode bertipe Newton untuk akar ganda, kemudian dilanjutkan dengan menunjukkan orde kekonvergenan dari metode yang dibahas. Pada bagian tiga dilakukan perbandingan numerik persamaan nonlinear terhadap beberapa fungsi uji. Untuk kekonsistenan digunakan tanda titik dalam menyatakan tanda desimal.

2. METODE BERTIPE NEWTON UNTUK AKAR GANDA DENGAN KONVERGENSI KUBIK

Perhatikan kuadratur bertipe Gauss

$$\int_{x_*}^{x} (t - x_*)^{m-1} h(t)dt = w_m h\frac{(x_* + mx)}{1+m}, \tag{2}$$

dengan

$$w_m = \frac{(x - x_*)^m}{m},$$

dengan $m > 0$ bilangan bulat. Integral persamaan (2) adalah eksak untuk fungsi linear $h(x) = c_0 + (x - x_*)c_1$.

Untuk $f'(t) = (t - x_*)^{m-1}h(t)$, ruas kiri dari persamaan (2) sama dengan $f(x)$, karena $f(x_*) = 0$. Ruas kanan dapat ditaksir dengan aturan bertipe Gauss dalam suku f'. Jika ini dilakukan hasil penyederhanaannya diperoleh

$$f(x) = \frac{x - x_*}{m\left(\dfrac{m}{m+1}\right)^{m-1}} f'\left(\frac{x_* + mx}{1+m}\right). \tag{3}$$

Dengan menyusun ulang persamaan (3) diperoleh

$$x_* = x - m\left(\frac{m}{m+1}\right)^{m-1} \frac{f(x)}{f'\left(\dfrac{x_* + mx}{1+m}\right)}. \tag{4}$$

Persamaan (4) berbentuk implisit, untuk mengubah menjadi eksplisit taksir x_* diruas kanan dengan metode Newton untuk akar ganda yang dinyatakan dengan

$$x_*^{(0)} = x - m\frac{f(x)}{f'(x)}, \tag{5}$$

dan menyatakan ruas kiri dari persamaan (4) dengan $x_*^{(1)}$ sehingga

$$x_*^{(1)} = x - m\left(\frac{m}{m+1}\right)^{m-1} \frac{f(x)}{f'\left(x - \dfrac{m}{m+1}\dfrac{f(x)}{f'(x)}\right)}. \tag{6}$$

Bila dibentuk kombinasi linear dari persamaan (5) dan (6) dengan bentuk

$$\Xi(x) = mx_*^{(1)} - (m-1)x_*^{(0)},$$

diperoleh fungsi iterasi dengan bentuk

$$\Xi(x) = x - m^2\left(\frac{m}{m+1}\right)^{(m-1)} \frac{f(x)}{f'\left(x - \dfrac{m}{m+1}\dfrac{f(x)}{f'(x)}\right)} + m(m-1)\frac{f(x)}{f'(x)}. \tag{7}$$

Selanjutnya dengan menggunakan fungsi iterasi persamaan (7) dapat dibentuk metode iterasi bertipe Newton

$$x_{n+1} = x_n - m^2\left(\frac{m}{m+1}\right)^{(m-1)} \frac{f(x_n)}{f'\left(x_n - \dfrac{m}{m+1}\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)} + m(m-1)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{8}$$

Selanjutnya dilakukan kajian analisis tentang orde kekonvergenan dari metode (8), sebagaimana diberikan Teorema 1.

Teorema 1 Misalkan f adalah fungsi real atau kompleks yang mempunyai akar ganda dengan multiplisitas m. Asumsikan f terdiferensialkan secukupnya dan x_0 adalah tebakan awal yang cukup dekat ke akar x_*. Maka metode iterasi yang diberikan persamaan (8) konvergen secara kubik ke x_* dan memenuhi persamaan *error*

$$e_{n+1} = \left(\frac{(m^4 - 4m^3 - 6m^2 + 2)(g'(0))^2 - m^4 g''(0)}{2m^3(m+1)^2}\right)e_n^3,$$

dengan $e_n = x_n - x_*$.

Bukti: Dalam pembuktian ini untuk menghindari operasi aljabar yang rumit, persamaan (8) ditulis dalam bentuk

$$x_{n+1} = x_n - N_4,$$

dengan

$$N_1 = f'\left(x_n - \frac{m}{m+1}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) \tag{9}$$

$$N_2 = \frac{f(x_n)}{N_1} \tag{10}$$

$$N_3 = m(m-1)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{11}$$

$$N_4 = m^2\left(\frac{m}{m+1}\right)^{(m-1)} N_2 + N_3. \tag{12}$$

Misalkan

$$f(x_n) = (x_n - x_*)^m e^{g(x_n - x_*)}, \tag{13}$$

maka turunan pertama dari persamaan (13) adalah

$$f'(x_n) = \frac{(x_n - x_*)^m m e^{g(x_n - x_*)}}{(x_n - x_*)} + (x_n - x_*)^m g'(0)(x_n - x_*)e^{g(x_n - x_*)}. \tag{14}$$

Bila persamaan (13) dan (14) di ekspansikan dengan deret Taylor [2, h. 189] disekitar $x_n = x_*$ secara berturut-turut diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_n) = {} & e^{g(0)}e_n^m + g'(0)e^{g(0)}e_n^{m+1} + \frac{1}{2}e^{g(0)}\left(g''(0) + (g'(0))^2\right)e_n^{m+2} \\ & + \frac{1}{6}e^{g(0)}\left(3g''(0)g'(0) + (g'(0))^3 + g'''(0)\right)e_n^{m+3}, \end{aligned} \tag{15}$$

dan

$$\begin{aligned} f'(x_n) = {} & me^{g(0)}e_n^{m-1} + (m+1)g'(0)e^{g(0)}e_n^m \\ & + \frac{1}{2}(m+2)e^{g(0)}\left(g''(0) + (g'(0))^2\right)e_n^{m+1} \\ & + (m+3)e^{g(0)}\left(\frac{1}{2}g''(0)g'(0) + \frac{1}{6}(g'(0))^3 + \frac{1}{6}g'''(0)\right)e_n^{m+2}. \end{aligned}$$

Untuk menghindari pembagian dua polinomial ketika menghitung $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ digunakan deret Geometri [5, h. 500], sehingga diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{1}{m}e_n - \frac{g'(0)}{m^2}e_n^2 + \left(\frac{(g'(0))^2}{m^3} - \frac{g''(0)}{m^2}\right)e_n^3. \tag{16}$$

Selanjutnya substitusi persamaan (16) ke persamaan (9), didapat

$$
\begin{aligned}
N_1 =& f'\left(x_n - \frac{m}{m+1}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)\\
=& f'\left(x_n - D\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)\\
=& f'\left(-D\Big(-\frac{g''(0)}{m^2}+\frac{(g'(0))^2}{m^3}\Big)e_n^3 + \Big(\frac{Dg'(0)}{m^2}\Big)e_n^2 + \Big(1-\frac{D}{m}\Big)e_n\right)\\
=& f'\Big((B_1e_n^3 + B_2e_n^2) + B_3e_n\Big)\\
N_1 =& f'(B_A + B_B), \qquad (17)
\end{aligned}
$$

dengan

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{m}{m+1}\\
B_1 &= -D\Big(-\frac{g''(0)}{m^2}+\frac{(g'(0))^2}{m^3}\Big)\\
B_2 &= \frac{Dg'(0)}{m^2}\\
B_3 &= 1-\frac{D}{m}\\
B_A &= B_1e_n^3 + B_2e_n^2\\
B_B &= B_3e_n.
\end{aligned}
$$

Untuk menyederhanakan (17) digunakan ekspansi Taylor sehingga diperoleh

$$
N_1 = G_0 + G_1e_n + G_2e_n^2 + G_3e_n^3, \qquad (18)
$$

dengan

$$
\begin{aligned}
G_0 =& \frac{me^{g(0)}B_3^me_n^m}{B_3e_n} + \frac{m^2e^{g(0)}B_3^me_n^mB_2 - me^{g(0)}B_3^me_n^mB_2}{B_3^2}\\
&+ g'(0)e^{g(0)}mB_3^me_n^m + g'(0)e^{g(0)}B_3^me_n^m\\
G_1 =& g''(0)e^{g(0)}B_3^mB_3e_n^m + \frac{1}{2}m(g'(0))^2e^{g(0)}B_3^mB_3e_n^m - \frac{me^{g(0)}B_3^me_n^mB_1}{B_3^2}\\
&+ (g'(0))^2e^{g(0)}B_3^mB_3e_n^m + \frac{1}{2}mg''(0)e^{g(0)}B_3^mB_3e_n^m\\
&+ \frac{g'(0)e^{g(0)}m^2B_3^me_n^mB_2 + g'(0)e^{g(0)}mB_3^me_n^mB_2}{B_3} + \frac{m^2e^{g(0)}B_3^me_n^mB_1}{B_3^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_2 =&\frac{1}{2}g'''(0)e^{g(0)}B_3^mB_3^2e_n^m + \frac{3}{2}m(g'(0))^2e^{g(0)}B_3^me_n^mB_2\\
&+ \frac{1}{2}g'''(0)e^{g(0)}B_3^mB_3^2e_n^m + \frac{1}{6}mg'''(0)e^{g(0)}B_3^mB_3^2e_n^m\\
&+ \frac{g'(0)e^{g(0)}m^2B_3^me_n^mB_1}{B_3} + g''(0)e^{g(0)}B_3^me_n^mB_2 + \frac{3}{2}g''(0)g'(0)e^{g(0)}B_3^mB_3^2e_n^m\\
&+ \frac{1}{2}m^2g''(0)e^{g(0)}B_3^me_n^mB_2 + \frac{3}{2}mg''(0)e^{g(0)}B_3^me_n^mB_2\\
&+ \frac{1}{6}m(g'(0))^3e^{g(0)}B_3^mB_3^2e_n^m + \frac{g'(0)e^{g(0)}mB_3^me_n^mB_1}{B_3} + (g'(0))^2e^{g(0)}B_3^me_n^mB_2\\
&+ \frac{1}{2}m^2(g'(0))^2e^{g(0)}B_3^me_n^mB_2 + \frac{1}{2}mg''(0)g'(0)e^{g(0)}B_3^mB_3^2e_n^m\\
G_3 =&\frac{1}{2}m^2(g'(0))^2e^{g(0)}B_3^me_n^mB_1 + (g'(0))^3e^{g(0)}B_3^mB_3e_n^mB_2\\
&+ \frac{5}{6}m(g'(0))^3e^{g(0)}B_3^mB_3e_n^mB_2 + 3g''(0)g'(0)e^{g(0)}B_3^mB_3e_n^mB_2\\
&+ g'''(0)e^{g(0)}B_3^mB_3e_n^mB_2 + \frac{3}{2}mg''(0)e^{g(0)}B_3^me_n^mB_1 + g''(0)e^{g(0)}B_3^me_n^mB_1\\
&+ (g'(0))^2e^{g(0)}B_3^me_n^mB_1 + \frac{3}{2}m(g'(0))^2e^{g(0)}B_3^me_n^mB_1\\
&+ \frac{1}{2}m^2g''(0)e^{g(0)}B_3^me_n^mB_1 + \frac{1}{2}m^2g''(0)g'(0)e^{g(0)}B_3^mB_3e_n^mB_2\\
&+ \frac{5}{2}mg''(0)g'(0)e^{g(0)}B_3^mB_3e_n^mB_2 + \frac{1}{6}m^2g'''(0)e^{g(0)}B_3^mB_3e_n^mB_2\\
&+ \frac{5}{6}mg'''(0)e^{g(0)}B_3^mB_3e_n^mB_2 + \frac{1}{6}m^2(g'(0))^3e^{g(0)}B_3^mB_3e_n^mB_2.
\end{aligned}
$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (15) dan (18) ke persamaan (10), dan dengan bantuan deret Geometri setelah penyederhanaan diperoleh

$$
\begin{aligned}
N_2 =&\Big(\frac{B_3}{B_3^mm}\Big)e_n + \Big(- \frac{B_2}{B_3^m} - \frac{B_3^2g'(0)}{B_3^mm^2} + \frac{B_2}{B_3^mm} - \frac{B_3^2g'(0)}{B_3^mm}\\
&+ \frac{B_3g'(0)}{B_3^mm}\Big)e_n^2 + \Big(\frac{B_2^2}{B_3^mB_3m} + \frac{B_3(g'(0))^2}{2B_3^mm} + \frac{mB_2^2}{B_3^mB_3}\\
&+ \frac{B_3g''(0)}{2B_3^mm} - \frac{B_3^2(g'(0))^2}{B_3^mm} - \frac{B_3g'(0)B_2}{B_3^mm} - \frac{2B_3g'(0)B_2}{B_3^mm^2}\\
&+ \frac{B_3^3(g'(0))^2}{B_3^mm^3} - \frac{2B_2^2}{B_3^mB_3} + \frac{B_3g'(0)B_2}{B_3^m} + \frac{B_3^3(g'(0))^2}{B_3^mm^2}\\
&- \frac{g'(0)B_2}{B_3^m} + \frac{g'(0)B_2}{B_3^mm} - \frac{B_3^3g''(0)}{2B_3^mm} - \frac{B_3^2(g'(0))^2}{B_3^mm^2}\\
&+ \frac{B_3^3(g'(0))^2}{2B_3^mm} + \frac{B_1}{B_3^mm} - \frac{B_1}{B_3^m} - \frac{B_3^3g''(0)}{B_3^mm^2}\Big)e_n^3. \qquad (19)
\end{aligned}
$$

Kemudian substitusi persamaan (16) ke persamaan (11) menghasilkan

$$
\begin{aligned}
N_3 =&(m-1)e_n - \frac{(m-1)g'(0)}{m}e_n^2 \\
&+ \frac{(m-1)(-mg''(0)+(g'(0))^2)}{m^2}e_n^3. \qquad (20)
\end{aligned}
$$

Langkah selanjutnya adalah mensubstitusikan persamaan (19) dan (20) ke persamaan (12) dan setelah penyederhanaan diperoleh

$$
\begin{aligned}
N_4 =& \left(\frac{2m^6+2m^4+4m^5}{2m^3(m+1)^2}\right)e_n \\
&+ \left(\frac{-2g'(0)m^4+2g'(0)m^2-2g'(0)m^5+2g'(0)m^3}{2m^3(m+1)^2}\right)e_n^2 \\
&+ \Big(3(g'(0))^2m^4 - m^4g''(0) + 2m^3g''(0) - 2g''(0)m^5 \\
&- 8m^2(g'(0))^2 - 2m^3(g'(0))^2 + 2m^2g''(0) - 2m(g'(0))^2 \\
&+ 2(g'(0))^2/2m^3(m+1)^2\Big)e_n^3. \qquad (21)
\end{aligned}
$$

Kemudian substitusi persamaan (21) ke persamaan (8) menghasilkan

$$
x_{n+1} = x_* - \left(\frac{2(g'(0))^2 - 4m^3(g'(0))^2 + (g'(0))^2m^4 + m^4g''(0) - 6m^2(g'(0))^2}{2m^3(m+1)^2}\right)e_n^3.
$$

Sehingga diperoleh nilai *error* yang menyatakan bahwa iterasi x_{n+1} konvergen secara kubik

$$
e_{n+1} = \left(\frac{(m^4-4m^3-6m^2+2)(g'(0))^2 - m^4g''(0)}{2m^3(m+1)^2}\right)e_n^3.
$$

3. PERBANDINGAN NUMERIK

Pada bagian ini dilakukan perbandingan numerik antara metode bertipe Newton untuk akar ganda terhadap beberapa metode pembanding, untuk melihat jumlah iterasi yang diperlukan setiap metode untuk mencapai akar pendekatan.

Berikut ini ditunjukkan uji komputasi untuk membandingkan kecepatan dalam menemukan akar antara metode-metode yang dibahas pada artikel ini, diantaranya adalah metode Newton (MN), metode Halley (MH) [4], metode Chebyshev (MC) [7, h. 130], dan metode bertipe Newton untuk akar ganda (MBN). Adapun fungsi-fungsi yang akan digunakan dalam melakukan perbandingan dari metode yang didiskusikan adalah jika nilai mutlak fungsi lebih kecil dari toleransi 10^{-200} dan jika selisih nilai mutlak antara dua iterasi yang berdekatan bernilai lebih kecil dari toleransi yang diberikan.

Adapun fungsi-fungsi yang akan digunakan dalam melakukan perbandingan dari metode yang didiskusikan adalah

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= (x-1)^3(1+0.85x+x^2+x^4) && \text{dengan} \ \ m=3\ , \\
f_2(x) &= (1-x)^5\exp(-0.4x) && \text{dengan} \ \ m=5\ , \\
f_3(x) &= (x^3+4x^2-10)^3 && \text{dengan} \ \ m=3\ , \\
f_4(x) &= ((x-1)^3-1)^6 && \text{dengan} \ \ m=6\ , \\
f_5(x) &= (x^5-x^3+x+1)^2 && \text{dengan} \ \ m=2\ .
\end{aligned}
$$

Dalam menentukan solusi numerik dari contoh-contoh fungsi nonlinear di atas, digunakan program Maple 13 dengan toleransi 10^{-200}. Untuk hasil uji komputasi dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1: Perbandingan komputasi untuk MBN, MC, MH, dan MN

f_i	x_0	Metode	n	COC	x_n	$\lvert f(x_n)\rvert$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
f_1	-1.5	MBN	7	3.00	1.0000000000000000	$1.75e-455$	$3.57e-51$
		MN	10	2.00	1.0000000000000000	$1.24e-327$	$3.40e-55$
		MC	8	3.00	1.0000000000000000	$1.34e-414$	$1.16e-46$
		MH	8	3.00	1.0000000000000000	$1.06e-389$	$1.13e-43$
	1.2	MBN	4	3.00	1.0000000000000000	$1.61e-225$	$1.27e-25$
		MN	7	2.00	1.0000000000000000	$2.70e-362$	$5.68e-61$
		MC	4	3.00	1.0000000000000000	$2.45e-214$	$2.07e-24$
		MH	4	3.00	1.0000000000000000	$2.96e-276$	$4.55e-31$
	3.0	MBN	6	3.00	1.0000000000000000	$1.97e-391$	$4.68e-44$
		MN	9	2.00	1.0000000000000000	$2.46e-299$	$1.77e-50$
		MC	6	3.00	1.0000000000000000	$5.94e-341$	$1.77e-38$
		MH	6	3.00	1.0000000000000000	$1.96e-549$	$2.02e-61$
f_2	-1.5	MBN	4	3.00	1.0000000000000000	$2.86e-280$	$1.18e-18$
		MN	6	2.00	1.0000000000000000	$6.51e-233$	$2.22e-23$
		MC	4	3.00	1.0000000000000000	$2.28e-268$	$6.94e-18$
		MH	4	3.00	1.0000000000000000	$1.99e-350$	$3.39e-23$
	2.0	MBN	4	3.00	1.0000000000000000	$1.48e-409$	$2.84e-27$
		MN	6	2.00	1.0000000000000000	$7.11e-341$	$3.56e-34$
		MC	4	3.00	1.0000000000000000	$5.97e-393$	$3.43e-26$
		MH	4	3.00	1.0000000000000000	$3.52e-495$	$7.58e-33$
	3.0	MBN	4	3.00	1.0000000000000000	$5.17e-277$	$1.95e-18$
		MN	6	2.00	1.0000000000000000	$4.85e-239$	$5.43e-24$
		MC	4	3.00	1.0000000000000000	$4.74e-258$	$3.38e-17$
		MH	4	3.00	1.0000000000000000	$1.43e-368$	$2.09e-24$

f_i	x_0	Metode	n	COC	x_n	$\|f(x_n)\|$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
f_3	0.1	MBN	22	3.00	1.3652300134140968	$6.30e-443$	$4.26e-50$
		MN	12	2.00	1.3652300134140968	$2.98e-230$	$1.96e-39$
		MC	47	3.00	1.3652300134140968	$1.91e-318$	$2.62e-36$
		MH	7	3.00	1.3652300134140968	$1.36e-354$	$3.34e-40$
	0.9	MBN	5	3.00	1.3652300134140968	$9.41e-345$	$3.45e-39$
		MN	7	2.00	1.3652300134140968	$1.11e-212$	$1.66e-36$
		MC	5	3.00	1.3652300134140968	$1.55e-266$	$1.53e-30$
		MH	5	3.00	1.3652300134140968	$4.71e-459$	$8.26e-52$
	2.5	MBN	5	3.00	1.3652300134140968	$7.27e-273$	$3.35e-31$
		MN	8	2.00	1.3652300134140968	$5.75e-313$	$3.21e-53$
		MC	5	3.00	1.3652300134140968	$3.95e-245$	$3.66e-28$
		MH	5	3.00	1.3652300134140968	$1.37e-330$	$1.55e-37$
f_4	0.2	MBN	4	3.00	2.0000000000000000	$4.26e-319$	$1.27e-18$
		MN	27	2.00	2.0000000000000000	$9.41e-314$	$4.74e-27$
		MC	6	3.00	2.0000000000000000	$2.68e-558$	$6.18e-32$
		MH	10	3.00	2.0000000000000000	$1.82e-201$	$5.59e-12$
	1.5	MBN	26	3.00	2.0000000000000000	$1.27e-484$	$8.08e-28$
		MN	8	2.00	2.0000000000000000	$3.91e-267$	$3.64e-23$
		MC	53	3.00	2.0000000000000000	$3.34e-493$	$2.55e-28$
		MH	5	3.00	2.0000000000000000	$5.23e-425$	$2.13e-24$
	2.5	MBN	5	3.00	2.0000000000000000	$3.03e-564$	$3.05e-32$
		MN	7	2.00	2.0000000000000000	$1.62e-332$	$1.29e-28$
		MC	5	3.00	2.0000000000000000	$6.94e-533$	$1.59e-30$
		MH	4	3.00	2.0000000000000000	$6.36e-239$	$4.64e-14$
f_5	-1.5	MBN	6	3.00	-1.0000000000000000	$3.63e-248$	$2.24e-42$
		MN	10	2.00	-1.0000000000000000	$6.53e-355$	$1.07e-89$
		MC	6	3.00	-1.0000000000000000	$5.20e-207$	$1.45e-35$
		MH	6	3.00	-1.0000000000000000	$1.60e-358$	$1.20e-60$
	-0.9	MBN	5	3.00	-1.0000000000000000	$1.42e-282$	$4.13e-48$
		MN	8	2.00	-1.0000000000000000	$8.59e-304$	$6.47e-77$
		MC	5	3.00	-1.0000000000000000	$4.69e-236$	$2.09e-40$
		MH	5	3.00	-1.0000000000000000	$4.68e-395$	$9.77e-67$
	0.2	MBN	7	3.00	-1.0000000000000000	$1.14e-306$	$3.99e-52$
		MN	9	2.00	-1.0000000000000000	$1.71e-280$	$4.32e-71$
		MC	8	3.00	-1.0000000000000000	$5.90e-452$	$2.17e-76$
		MH	8	3.00	-1.0000000000000000	$8.47e-333$	$2.32e-56$

Keterangan untuk Tabel 1 adalah, f_i menyatakan persamaan nonlinear, x_0 menyatakan tebakan awal, COC menyatakan orde konvergensi dari metode secara komputasi, x_n menyatakan akar dari fungsi, dan $|f(x_n)|$ menyatakan nilai dari fungsi untuk pendekatan akar ke n.

Berdasarkan Tabel 1 terlihat bahwa dengan memberi tebakan awal yang berbeda pada setiap masing-masing fungsi dapat disimpulkan bahwa tebakan awal yang diberikan berpengaruh terhadap jumlah iterasi yang diperlukan untuk mendapatkan akar. Untuk menyelesaikan persamaan nonlinear berakar ganda, jumlah iterasi yang diperlukan oleh metode Newton lebih banyak jika dibandingkan dengan MBN, MC, dan MH yang memiliki kekonvergenan orde tiga untuk akar ganda.

Terlihat juga bahwa dari Tabel 1 semua metode yang dibandingkan berhasil menemukan akar yang diharapkan dari semua contoh fungsi yang diberikan. Selanjutnya jika membandingkan nilai kesalahan $|x_n - x_{n-1}|$ dan nilai fungsi $|f(x_n)|$ dari iterasi MBN, MC dan MH yang sama-sama memiliki kekonvergenan orde tiga. Pada contoh f_1 terlihat bahwa MBN lebih unggul dari MH dan MC, tetapi MC lebih unggul dari MH. Pada f_2 MC lebih unggul dari MH dan MBN, tetapi MBN lebih unggul dari MH. Untuk contoh f_3, MBN lebih unggul dari MH dan MC, tetapi MH lebih unggul dari MC. Selanjutnya pada contoh f_4 bahwa MH lebih unggul dari MBN dan MC, tetapi MBN lebih unggul dari MC. Kemudian untuk contoh f_5 terlihat bahwa MBN lebih unggul dari MH dan MC, tetapi MC lebih unggul dari MH. Maka secara umum MBN unggul dibandingkan dengan metode pembanding lainnya.

Ucapan Terimakasih Penulis mengucapkan terimakasih kepada Dr. Imran M., M.Sc. yang telah memberikan arahan dan bimbingan dalam penulisan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Atkinson, K. E. 1993. *Elementary Numerical Analysis, 2nd Ed.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

[2] Bartle, R.G. & D.R. Sherbert. 2010. *Introduction to Real Analysis, 4th Edition.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

[3] Homeier, H.H.H. 2009. On Newton-Type Methods for Multiple Roots with Cubic Convergence, *J. Comput. Appl. Math.* **231**: 249–254.

[4] Osada, N. 2008. Chebyshev–Halley Methods for Analytic Functions, *J. Comput. Appl. Math.* **216**: 585–599.

[5] Stewart, J. 2011. *Kalkulus 5th Edition: jilid 2.* Terj. dari *Calculus, 5th Edition*, oleh Sungkono. C. Penerbit Salemba Teknika, Jakarta.

[6] Ralston, A. & P. Rabinowitz. 1978. *A First Course in Numerical Analysis, 2nd Edition*, McGraw-Hill Book Company.

[7] Traub, J.F. 1964. *Iterative Methods for the Solution of Equations*, Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.