MODIFIKASI APROKSIMASI TAYLOR DAN PENERAPANNYA

Irpan Riski M[1*], Musraini M[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*irpanmunte08@gmail.com

ABSTRACT

We discuss a modified Taylor approximation for functions with periodic behaviour, which is a review of article of Martin et. al published on [*Journal of Computational and Applied Mathematics*, 130 (2001), 91–97]. This modification is based on the work of Scheifele in obtaining a solution of a perturbed oscillator.

Keywords: *trigonometric-polynomial approximation, Taylor polynomial.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas aproksimasi fungsi dengan modifikasi aprolsimasi Taylor untuk fungsi-fungsi berperilaku periodik yang merupakan review dari tulisan Martin et. al [*Journal Computational and Applied Mathematics*, 130 (2001), 91–97]. Modifikasi ini didasarkan pada teknis mendapatkan solusi metode perturbed oscillator oleh Scheifele.

Kata kunci: *aproksimasi polinomial trigonometri, polinomial Taylor.*

1. PENDAHULUAN

Dari kalkulus diketahui bahwa teorema Taylor memberikan barisan pendekatan sebuah fungsi yang memiliki turunan pada sebuah titik menggunakan suku banyak atau polinomial. Koefisien polinomial tersebut hanya tergantung pada turunan fungsi pada titik yang bersangkutan. Teorema Taylor juga memberikan estimasi besarnya galat dari pendekatan itu. Teorema Taylor diambil dari nama seorang matematikawan Inggris Brook Taylor pada tahun (1685-1731), meskipun hasilnya sudah ditemukan pertama kali oleh James Gregory tahun 1668 dan matematikawan Swiss Jhon Bernouli di tahun 1690 [8, h. 564]. Bentuk dari teorema Taylor adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots \\ &+ \frac{1}{(n!)}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

Persoalan matematika yang sering digunakan di dalam kehidupan sehari-hari biasanya dinyatakan dalam bentuk fungsi. Nilai suatu fungsi pada titik tertentu terkadang sulit diselesaikan menggunakan perhitungan secara eksak, untuk itu penyelesaian dapat dilakukan menggunakan aproksimasi. Aproksimasi fungsi menggunakan Teorema Taylor sering digunakan di berbagai penelitian dalam bidang metode numerik.

Pada artikel ini didiskusikan modifikasi aproksimasi Taylor dan penerapannya untuk fungsi periodik fungsi f yang diberikan oleh

$$M_n(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x + a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-2}x^{n-2}. \tag{1}$$

Pembahasan dimulai dengan memperkenalkan aproksimasi Scheifele yang disajikan dalam bentuk fungsi G. Kemudian dilanjutkan mengaproksimasi Scheifele untuk solusi *oscillator*. Kemudian dilakukan modifikasi aproksimasi Taylor dengan residunya diturunkan secara analitik dan berbentuk kombinasi linear dari turunan ke $n+1$ dan turunan ke $n-1$ dari f. Pada bagian tiga dilakukan simulasi numerik dari modifikasi aproksimasi Taylor terhadap fungsi Bessel dan didapatkan aproksimasi yang lebih baik dibandingkan aproksimasi Taylor.

2. MODIFIKASI APROKSIMASI TAYLOR DAN PENERAPANNYA

Pandang metode *perturbed oscillator* oleh Scheifele [7] dengan bentuk berikut:

$$y'' + \omega^2 y = \epsilon g(y, y', x), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0', \tag{2}$$

dan misalkan solusi aproksimasi untuk masalah ini diberikan dalam bentuk

$$Y(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k G_k(x),$$

dengan G adalah fungsi yang didefinisikan sebagai solusi masalah nilai awal

$$\begin{aligned}
&G_0'' + \omega^2 G_0 = 1, \quad G_0(0) = 1, \quad G_0'(0) = 0\\
&G_1'' + \omega^2 G_1 = 0, \quad G_1(0) = 0, \quad G_1'(0) = 1\\
&G_k'' + \omega^2 G_k = \frac{x^{k-2}}{(k-2)!}, \quad G_k(0) = 0, \quad G_k'(0) = 0, \quad k \geq 2,
\end{aligned}$$

dan koefisien-koefisien dari $b_0, b_1, \cdots, b_k$ adalah

$$b_0 = y_0, \;\; b_1 = y_0', \;\; b_k = \epsilon\frac{d^{k-2} g(y(x), y'(x), x)}{dx^{k-2}} \quad, k \geq 2. \tag{3}$$

Fungsi G dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi sin dan cos sebagai berikut:

$$G_0(x) = \cos\ \omega x, \quad G_1(x) = \frac{1}{\omega}\sin\ \omega x, \tag{4}$$

$$G_{2k}(x) = \frac{(-1)^k}{\omega^{2k}}\left(\cos\ \omega x - \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\frac{(\omega x)^{2j}}{(2j)!}\right), \quad k \geq 1, \tag{5}$$

$$G_{2k+1}(x) = \frac{(-1)^k}{\omega^{2k+1}}\left(\sin\ \omega x - \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\frac{(\omega x)^{2j+1}}{(2j+1)!}\right), \quad k \geq 1. \tag{6}$$

Teorema 1 (Sifat-Sifat Fungsi G) [7] Fungsi G yang dinyatakan oleh persamaan (4)–(6) mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:

$$(a)\ G_k'(x) = G_{k-1}(x), \tag{7}$$

$$(b)\ G_k(x) = \frac{x^k}{k!} + O(x^{k+2}), \tag{8}$$

$$(c)\ G_k(x) + \omega^2 G_{k+2}(x) = \frac{x^k}{k!}. \tag{9}$$

Bukti.
(a) Dari bentuk $G(x)$ pada persamaan (4) ditunjukkan $\frac{d}{dx}G_1(x) = G_0(x)$, yaitu

$$\begin{aligned} G_1'(x) &= \cos\ (\omega x) \\ G_1'(x) &= G_0(x). \end{aligned} \tag{10}$$

Berikutnya dari persamaan (5) ditunjukkan $\frac{d}{dx}G_{2k}(x) = G_{2k-1}(x)$, yaitu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}G_{2k}(x) &= \frac{(-1)^k}{\omega^{2k}}\left(\frac{d}{dx}\cos\ (\omega x) - \frac{d}{dx}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\frac{(\omega x)^{2j}}{(2j)!}\right) \\ \frac{d}{dx}G_{2k}(x) &= G_{2k-1}(x). \end{aligned} \tag{11}$$

Selanjutnya dari persamaan (6) ditunjukkan $\frac{d}{dx}G_{2k+1}(x) = G_{2k}(x)$, yaitu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}G_{2k+1}(x) &= \frac{(-1)^k}{\omega^{2k+1}}\left(\cos\ \omega x - 2j+1\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\frac{(\omega x)^{2j+1}}{(2j+1)!}\right) \\ \frac{d}{dx}G_{2k+1}(x) &= G_{2k}(x). \end{aligned} \tag{12}$$

Dari persamaan (10)–(12) terbukti fungsi G pada bagian (a).
(b) Dari bentuk $G(x)$ pada persamaan (4) didapat

$$\begin{aligned} G_0(x) &= \frac{x^0}{0!} + O(x^{0+2}) \\ G_0(x) &= O(x^2), \end{aligned} \tag{13}$$

dan

$$
\begin{aligned}
G_1(x) &= \frac{x}{1!} + O(x^{k+2})\\
G_1(x) &= x + O(x^{k+2}). \qquad (14)
\end{aligned}
$$

Dari bentuk $G(x)$ pada persamaan (5) didapat

$$
\begin{aligned}
G_{2k}(x) &= \frac{(-1)^k}{\omega^{2k}}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(\omega x)^{2j}}{(2j)!} - \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\frac{(\omega x)^{2j}}{(2j)!}\right)\\
G_{2k}(x) &= \frac{(x)^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2k+2}). \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Kemudian dari persamaan (6) diperoleh

$$
\begin{aligned}
G_{2k+1}(x) &= \frac{(-1)^k}{\omega^{2k+1}}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(\omega x)^{2j+1}}{(2j+1)!} - \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\frac{(\omega x)^{2j+1}}{(2j+1)!}\right)\\
G_{2k+1}(x) &= \frac{(x)^{2k+1}}{(2k+1)!} + O(x^{2k+3}). \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Dari persamaan (13)–(16) terbukti fungsi G pada bagian (b).

(c) Dari bentuk $G(x)$ pada persamaan (6) untuk $G_k(x) + \omega^2 G_{k+2}(x) = \dfrac{x^k}{k!}$. Untuk $k = 0$ adalah

$$
\begin{aligned}
G_0(x) + \omega^2 + \omega^2 G_{0+2}(x) &= \frac{x^0}{0!} + (x^{2.0+2})\\
G_0(x) + \omega^2 G_2(x) &= 1 + (x^2)\\
G_0(x) + \omega^2 G_2(x) &= x^2. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

Selanjutnya nilai dari $G_1(x)$ Untuk $k = 1$ adalah

$$
\begin{aligned}
G_1(x) + \omega^2 + \omega^2 G_{1+2}(x) &= \frac{x^1}{1!} + (x^{2.1+2})\\
G_1(x) + \omega^2 G_3(x) &= x + (x^{2+2})\\
G_1(x) + \omega^2 G_3(x) &= x + (x^4), \qquad (18)
\end{aligned}
$$

untuk nilai $k \geq 1$ genap diperoleh

$$
\begin{aligned}
G_{2k+2}(x) &= \frac{(-1)^k}{\omega^{2k+2}}\left(\cos\ \omega x - \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\frac{(\omega x)^{2j+2}}{(2j+2)!}\right)\\
&= \frac{(-1)^k}{\omega^{2k+2}}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(\omega x)^{2j+2}}{(2j+2)!} - \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\frac{(\omega x)^{2j+2}}{(2j+2)!}\right)\\
G_{2k+2}(x) &= \frac{(x)^{2k+2}}{(2k+2)!} + O(x^{2k+4}). \qquad (19)
\end{aligned}
$$

Selanjutnya dengan mensubsitusikan persamaan (15) dan (19) ke dalam persamaan (9) diperoleh

$$\begin{aligned} G_{2k}(x) + \omega^2 G_{2k+2}(x) &= \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \\ \frac{(x)^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2k+2}) + \omega^2 \frac{(x)^{2k+2}}{(2k+2)!} + O(x^{2k+4}) &= \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}. \end{aligned} \tag{20}$$

Berikutnya perhatikan bahwa untuk nilai $k \geq 1$ ganjil, didapat

$$\begin{aligned} G_{2k+3}(x) &= \frac{(-1)^k}{\omega^{2k+3}} \left(\sin\ \omega x - \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \frac{(\omega x)^{2j+3}}{(2j+3)!} \right) \\ G_{2k+3}(x) &= \frac{(x)^{2k+3}}{(2k+3)!} + O(x^{2k+5}). \end{aligned} \tag{21}$$

Selanjutnya dengan mensubsitusikan persamaan (16) dan (21) ke persamaan (9), diperoleh

$$\begin{aligned} G_{2k+1}(x) + \omega^2 G_{2k+3}(x) &= \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!} \\ \frac{(x)^{2k+1}}{(2k+1)!} + O(x^{2k+3}) + \omega^2 \frac{(x)^{2k+3}}{(2k+3)!} + O(x^{2k+5}) &= \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}. \end{aligned} \tag{22}$$

Dari persamaan (17)–(22) terbukti fungsi G pada bagian (c). ■

Pada bagian ini digunakan aproksimasi dalam bentuk (1) untuk sebarang f. Untuk itu digunakan aproksimasi Scheifele untuk solusi suatu *oscillator*. Pandang f sebagai solusi masalah nilai awal sebagai berikut:

$$y'' + \omega^2 y = f'' + \omega^2 f, \quad y(0) = f(0), \quad y'(0) = f'(0).$$

Kemudian aproksimasi f dengan menggunakan aproksimasi Scheifele. Dari persamaan (2), persamaan (3) dan persamaan (9) maka bentuk aproksimasi Scheifele adalah

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} b_k G_k(x) \\ f(x) &= b_0 G_0(x) + b_1 G_1(x) + \sum_{k=2}^{n} b_k G_k(x), \end{aligned}$$

menggunakan syarat awal dari persamaan (3) didapatkan

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) G_0(x) + f'(0) G_1(x) + \sum_{k=2}^{n} (f^{(k)}(0) + \omega^2 f^{(k-2)}(0)) G_k(x) \\ f(x) &= \sum_{k=0}^{n-2} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + f^{(n-1)}(0) G_{n-1}(x) + f^{(n)}(0) G_n(x). \end{aligned} \tag{23}$$

Perhatikan bahwa persamaan (23) hanya berbeda dengan polinomial Taylor dari f pada dua suku terakhir, dalam hal ini monomial di polinomial Taylor diganti dengan fungsi G.

Selanjutnya persamaan (23) memenuhi sifat sebagaimana pada polinomial Taylor, seperti teorema 2.

Teorema 2 (Modifikasi Aproksimasi Taylor) [6] Didefinisikan

$$M_n(x) = \sum_{k=0}^{n-2} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + f^{(n-1)}(0)G_{n-1}(x) + f^{(n)}(0)G_n(x), \tag{24}$$

maka $M_n(x)$ adalah suatu fungsi yang hanya berbentuk

$$M_n(x) = A\cos\,\omega x + B\sin\,\omega x + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-2}x^{n-2}, \tag{25}$$

yang memenuhi

$$M_n(0) = f(0),\ \ M_n^{'}(0) = f'(0), \ldots, M_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0). \tag{26}$$

Bukti.
Bentuk (5) dan (6) memiliki $G_{n-1}(x)$ dan $G_n(x)$ dapat diekspresikan berturut-turut sebagai selisih antara fungsi trigonometri dan polinomial berderajat $n-3$ dan $n-2$. Jadi terlihat bahwa $M_n(x)$ merupakan kombinasi linear dari fungsi trigonometri $\cos\omega x$ dan $\sin\omega x$ dan polinomial berderajat $n-3$ dan $n-2$. Hal ini membuktikan bahwa $M_n(x)$ memiliki ekspresi bentuk persamaan (24).

Dari persamaan (8) didapatkan

$$G_{n-1}(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + O(x^{n+1}), \tag{27}$$

$$G_n(x) = \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+2}). \tag{28}$$

Berikutnya dengan mensubsitusikan persamaan (27) dan (28) ke (24) diperoleh

$$M_n(x) = \sum_{k=0}^{n-2} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + O(x^{n+1}) + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + O(x^{n+2})$$

$$M_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1}). \tag{29}$$

Dari persamaan (26) ditunjukkan $M_n(0) = f(0)$, yaitu

$$M_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}, \tag{30}$$

$$M_n(0) = f^{(0)}(0) + f^{'}(0)\frac{0^1}{1!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{0^n}{n!},$$

$$M_n(0) = f^{(0)}(0) = f(0).$$

Berikutnya ditunjukkan $M_n^{'}(0) = f^{'}(0)$, dari persamaan (30) didapatkan

$$
\begin{aligned}
M_n^{'}(x) &= f^{'}(0) + 2.f^{''}(0)\frac{x}{(2.1)!} + \cdots + n.f^{(n)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!},\\
M_n^{'}(0) &= f^{'}(0) + 2.f^{''}(0)\frac{0}{2} + \cdots + n.f^{(n)}(0)\frac{0^{n-1}}{(n-1)!},\\
M_n^{'}(0) &= f^{'}(0), \qquad (31)
\end{aligned}
$$

dan untuk $M_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$, diperoleh

$$
\begin{aligned}
M_n^{(n)}(x) &= f^{(n)}(0) + 2.f^{''}(n)\frac{x}{(2.1)!} + \cdots + n.f^{(n)}(n)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\\
M_n^{(n)}(0) &= f^{(n)}(0) + f^{''}(n)\frac{0}{2} + \cdots + n.f^{(n)}(0)\frac{0^{n-1}}{(n-1)!}\\
M_n^{(n)}(0) &= f^{(n)}(0). \qquad (32)
\end{aligned}
$$

Dari persamaan (29)–(32) terbukti (26).

Untuk melihat ketunggalan fungsi M_n, misalkan ada fungsi lain $N(x)$ dengan bentuk (24) dan memenuhi (25). Jika $N(x)$ berbentuk (24), maka $N(x)$ dapat dinyatakan seperti persamaan (24) yaitu

$$
\begin{aligned}
N(x) &= \sum_{k=0}^{n-2} b_k\frac{x^k}{k!} + b_{n-1}G_{n-1}(x) + b_nG_n(x)\\
&= \sum_{k=0}^{n-2} b_k\frac{x^k}{k!} + b_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + O(x^{n+1}) + b_n\frac{x^n}{n!} + O(x^{n+2})\\
N(x) &= \sum_{k=0}^{n} b_k\frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1}),
\end{aligned}
$$

karena N memenuhi persamaan (26) maka

$$f^{(k)}(0) = N^{(k)}(0) = b_k, \quad 0 \leq k \leq n,$$

jadi terbukti $M_n = N$. ■

Hasil lain yang menyerupai teorema Taylor dari persamaan (23) adalah adanya sisa sebagaimana diberikan Teorema 3.

Teorema 3 (Fungsi Modifikasi Taylor) [6] Misalkan $f^{(n+1)}$ ada dengan $n > 2$ untuk setiap x pada interval terbuka I yang memuat 0. Maka, untuk setiap $x \neq 0$ di dalam I terdapat bilangan $\xi_x \in (0, x)$ sedemikian hingga

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-2} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + f^{(n-1)}(0)G_{n-1}(x) + f^{(n)}(0)G_n(x) + \widetilde{r}_n(x), \qquad (33)$$

dengan

$$\widetilde{r}_n(x) = (f^{(n+1)}(\xi_x) + \omega^2 f^{(n-1)}(\xi_x))G_{n+1}(x).$$

Bukti.
Diperkenalkan fungsi tambahan φ. Untuk sebarang $x \neq 0$ di I dan sebarang t di I, misalkan

$$\varphi(t) = f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n-2} f^{(k)}(t) \frac{(x-t)^k}{k!} + f^{(n-1)}(t) G_{n-1}(x-t) + f^{(n)}(t) G_n(x-t) \right). \tag{34}$$

Selanjutnya subsitusikan persamaan(33) ke (34), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\varphi(t) =& \sum_{k=0}^{n-2} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + f^{(n-1)}(0) G_{n-1}(x) + f^{(n)}(0) G_n(x) + (f^{(n+1)}(\xi_x) \\
& + \omega^2 f^{(n-1)}(\xi_x)) G_{n+1}(x) - \left(\sum_{k=0}^{n-2} f^{(k)}(t) \frac{(x-t)^k}{k!} \right. \\
& \left. + f^{(n-1)}(t) G_{n-1}(x-t) + f^{(n)}(t) G_n(x-t) \right) \\
\varphi(t) =& \sum_{k=0}^{n-2} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + f^{(n-1)}(0) G_{n-1}(x) + f^{(n)}(0) G_n(x) + (f^{(n+1)}(\xi_x) \\
& + \omega^2 f^{(n-1)}(\xi_x)) G_{n+1}(x) - \left(f^{(0)}(t) \frac{(x-t)^0}{0!} \right. \\
& + f^{'}(t) \frac{(x-t)^1}{1!} + f^{''}(t) \frac{(x-t)^2}{2!} \cdots + f^{(n-2)}(t) \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} \\
& + f^{(n-1)}(t) G_{n-1}(x-t) \\
& \left. + f^{(n)}(t) G_n(x-t) \right).
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh fungsi $\varphi(t)$ kontinu di $[0, x]$ dan mempunyai turunan di $(0, x)$. Turunkan fungsi φ terhadap t diperoleh

$$\begin{aligned}
\varphi^{'}(t) =& - \left(f^{'}(t) + f^{'}(t)(-1) + (x-t) f^{''}(t) \right. \\
& + \left(f^{''}(t)(-1)(x-t) + \frac{(x-t)^2}{2!} f^{'''}(t) \right) \\
& + \cdots + \left(f^{(n-2)}(t)(-1) \frac{(x-t)^{n-3}}{(n-3)!} + f^{(n-1)}(t) \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} \right) \\
& + (f^{(n-1)}(t)(-1)(G_{n-1})^{'}(x-t) + f^{(n)}(t)(G_{n-2})^{'}(x-t)) \\
& \left. + (f^{(n)}(t)(-1)(G_n)^{'}(x-t) + f^{(n+1)}(t)(G_{n+1})^{'}(x-t)) \right).
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan (9), setelah penyederhanaan didapat

$$\varphi^{'}(t) = \left(G_{n-2}(x-t) - \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} \right) f^{(n-1)}(t) - G_n(x-t) f^{(n+1)}(t). \tag{35}$$

Selanjutnya menggunakan persamaan (8) sehingga persamaan (35) menjadi

$$\varphi^{'}(t) = -G_n(x-t)(f^{(n+1)}(t) + \omega^2 f^{(n-1)}(t)).$$

Perhatikan fungsi tambahan lain, ψ yang didefinisikan

$$\psi(t) = G_{n+1}(x-t),$$

sehingga

$$\psi^{'}(t) = -G_n(x-t).$$

Berdasarkan teorema nilai rata-rata Cauchy [4, h. 474] untuk fungsi φ dan ψ di dalam selang $[0, x]$ dan terdapat bilangan ξ_x, diantara 0 dan x sedemikian hingga

$$\psi^{'}(\xi_x)(\varphi(x) - \varphi(0)) = \varphi^{'}(\xi_x)(\psi(x) - \varphi(0)).$$

Hal ini berarti bahwa

$$G_n(x-\xi_x)\widetilde{r}_n(x) = G_n(x-\xi_x)(f^{(n+1)}(\xi_x) + \omega^2 f^{(n-1)}(\xi_x))G_{n+1}(x). \tag{36}$$

Dari persamaan (7) bisa disimpulkan bahwa

$$G_k(x) = \int_0^x G_{k-1}(\tau)d\tau, \quad k \geq 1.$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} G_2(x) &= \int_0^x G_1(\tau)d\tau \\ &= \int_0^x \frac{\sin \omega x}{\omega}(\tau)d\tau \\ G_2(x) &= \frac{(1-\cos \omega x)}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Jadi $G_2(x) \geq 0$, maka $G_k(x) \neq 0$ untuk $x \neq 0$ atau $k > 2$, sehingga persamaan (36) bisa disederhanakan menjadi

$$\widetilde{r}_n(x) = (f^{(n+1)}(\xi x) + \omega^2 f^{(n-1)}(\xi x))G_{n+1}(x).$$

■

Perhatikan bahwa jika fungsi f berkelakuan periodik seperti $A\cos\ \omega x + B \sin\ \omega x$, maka sisa aproksimasi yang diperoleh akan lebih kecil dari sisa polinomial Taylor yaitu

$$r_n(x) = f^{(n+1)}(\xi_x)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

3. PERBANDINGAN NUMERIK

Diberikan fungsi berbentuk periodik dalam fungsi Bessel sebagai berikut:

$$f(x) = \sqrt{x+1}J_0(10(x+1)). \tag{37}$$

Dengan menggunakan formula [5, h. 93]

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x) - J_{n-1}(x),$$

$J_{n+1}(x)$ dapat diperoleh secara rekursif menggunakan $J_n(x)$ dan $J_{n-1}(x)$. Dari sini diperoleh

$$J_2(10) = \frac{1}{5}J_1(10) - J_0(10), \tag{38}$$

$$J_3(10) = \frac{-23}{25}J_1(10) - \frac{2}{5}J_0(10), \tag{39}$$

$$J_4(10) = \frac{-94}{125}J_1(10) + \frac{19}{25}J_0(10), \tag{40}$$

$$J_5(10) = \frac{199}{625}J_1(10) + \frac{126}{125}J_0(10), \tag{41}$$

$$J_6(10) = \frac{669}{625}J_1(10) + \frac{31}{125}J_0(10). \tag{42}$$

Disini J_0 adalah bentuk pertama dari fungsi Bessel berorde 0.

Polinomial Taylor derajat 6 disekitar $x = 0$, untuk fungsi f di persamaan (37) adalah

$$\begin{aligned}
P_6(x) = &J_0(10) + \left(\frac{1}{2}J_0(10) - 10J_1(10)\right)x \\
&- \left(25J_2(10) - \frac{201}{8}J_0(10) - 5J_1(10)\right)x^2 \\
&+ \left(\frac{25}{2}J_2(10) - \frac{199}{6}J_0(10) - \frac{125}{3}J_3(10) + \frac{505}{4}J_1(10)\right)x^3 \\
&+ \left(\frac{495}{8}J_1(10) - \frac{125}{6}J_3(10) + \frac{625}{12}J_4(10) - \frac{5075}{24}J_2(10) + \frac{20395}{128}J_0(10)\right)x^4 \\
&+ \Bigg(- \frac{102925}{192}J_1(10) - \frac{4925}{48}J_2(10) + \frac{19607}{256}J_0(10) \\
&\quad + \frac{625}{24}J_4(10) + \frac{2125}{8}J_3(10) - \frac{625}{12}J_5(10)\Bigg)x^5 \\
&+ \Bigg(- \frac{4171189}{9216}J_0(10) - \frac{6125}{48}J_3(10) - \frac{97105}{384}J_1(10) \\
&\quad - \frac{25625}{96}J_4(10) + \frac{259625}{384}J_2(10) + \frac{3125}{72}J_6(10) - \frac{625}{24}J_5(10)\Bigg)x^6.
\end{aligned} \tag{43}$$

Selanjutnya (38)–(42) disubsitusikan ke persamaan (43) diperoleh

$$
\begin{aligned}
P_6(x) =& J_0(10) + (\frac{1}{2}J_0(10) - 10J_1(10))x - \frac{401}{4}J_0(10)\frac{x^2}{2!} \\
&+ \left(-\frac{397}{8}J_0(10) + \frac{2005}{2}J_1(10)\right)\frac{x^3}{3!} + \left(\frac{160785}{16}J_0(10) - 10J_1(10)\right)\frac{x^4}{4!} \\
&+ \left(\frac{154505}{32}J_0(10) - \frac{803645}{8}J_1(10)\right)\frac{x^5}{5!} \\
&+ \left(\frac{64424545}{64}J_0(10) - \frac{5535}{2}J_1(10)\right)\frac{x^6}{6!}.
\end{aligned}
$$

Menggunakan persamaan (5)–(6) bisa dituliskan aproksimasi suku-suku polinomial dan fungsi trigonometri yaitu

$$
\begin{aligned}
M_6(x) =& -\frac{84909}{12800000}J_0(10) + \frac{1107}{400000}J_1(10) \\
&+ \left(\frac{1099}{64000}J_0(10) + \frac{729}{16000}J_1(10)\right)x + \left(\frac{52909}{256000}J_0(10) - \frac{1107}{8000}J_1(10)\right)x^2 \\
&+ \left(-\frac{859}{3840}J_0(10) - \frac{329}{960}J_1(10)\right)x^3 + \left(-\frac{22109}{30720}J_0(10) + \frac{707}{960}J_1(10)\right)x^4 \\
&+ \left(\frac{30901}{640000}J_0(10) - \frac{160279}{160000}J_1(10)\right)\sin 10x \\
&+ \left(\frac{12884909}{12800000}J_0(10) - \frac{1107}{400000}J_1(10)\right)\cos 10x.
\end{aligned}
$$

Sehingga bisa ditunjukkan bahwa modifikasi aproksimasi Taylor fungsi Bessel dengan menggunakan $M_n(x)$ dan fungsi G memiliki aproksimasi yang lebih baik jika dibandingkan aproksimasi Taylor fungsi Bessel sebelum dilakukan modifikasi aproksimasi Taylor.

Ucapan Terimakasih Penulis mengucapkan terimakasih kepada Dr. Imran M., M.Sc. yang telah memberikan arahan dan bimbingan dalam penulisan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Ayres, F. JR. 1952. *Theory and Problems of Differential Equations*. McGrew-Hill, Inc., New York.

[2] Bartle, R. G. & Shebert. R. D. 1999. *Introduction to Real Analysis, 4th Ed.* John Wiley & Sons, Inc, New York.

[3] Burden, R. L. & J. D. Faires. 2001. *Numerical Analysis. 9th Ed.* Brooks Cole, New York .

[4] Edwin, J. P. 1987. *Kalkulus 5^{th} Ed:Jilid 1*. Terj. dari *Calculus, 5^{th} Ed*, oleh Drs. I Nyoman Susila, M.Sc., Bana Kartasasmita, Ph.D., & Drs. Rawuh. Penerbit Erlangga, Jakarta.

[5] Frank, B . 1958. *Introduction to Bessel Function*. Dover Publications, Inc, New York.

[6] Khuri, S. A. & Sayfy. A. 2006. Application of the modified Taylor approximation *International Journal of Computer Mathematics*. 83:,785–796.

[7] Martin, P., Garcia. A. & Lopez, D. 2001. Modified Taylor approximation of functions with periodic behaviour. *Journal Computational and Applied Mathematics.*, 130, 91–97.

[8] Stewart, J. 2011. *Kalkulus 5^{th} Ed:Jilid 2*. Terj. dari *Calculus, 5^{th} Ed*, oleh Sungkono. C. Penerbit Salemba Teknika, Jakarta.