FAMILI METODE ITERASI BERORDE TIGA UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NONLINEAR

Dewi Kusuma[1*], **Zulkarnain**[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*dewimath10@gmail.com

ABSTRACT

We discuss a family of iterative methods derived by giving a weight function recursively to the corrector of Newton's method, which is a review of article of Herceg and Herceg publised on [*Applied Mathematics and Computation*, 87 (2010), 2533–2541]. Weighting with a specific index produces Super-Halley's method. Analytically it is shown that the order of the convergence of the method is three. Furthermore, this iteration method requires four function evaluations per iteration, so its efficiency index is 1.316. Then, computational tests show that the discussed method is better than Newton's method, and does not have significant differences with Super Halley's method in terms of error produced.

Keywords: *nonlinear equation, Newton's method, Super Halley's method, third order method, order of convergence.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas famili metode iterasi yang diturunkan dengan memberi bobot dalam bentuk fungsi yang diberikan secara rekursif pada perbaikan metode Newton yang merupakan review dari tulisan Herceg dan Herceg [*Applied Mathematics and Computation*, 87 (2010), 2533–2541]. Pembobotan pada indeks tertentu menghasilkan metode iterasi yang sama metode metode Super-Halley. Secara analitik ditunjukkan bahwa metode iterasi ini memiliki kekonvergenan orde tiga. Disamping itu metode iterasi ini memerlukan empat evaluasi fungsi pada setiap iterasinya, maka indeks efisiensinya adalah 1.316. Selanjutnya dari uji komputasi, jika dilihat dari kesalahan metode dalam mendapatkan akar pendekatan, terlihat bahwa metode yang didiskusikan lebih baik dari pada metode Newton, dan tidak mempunyai perbedaan yang signifikan dengan metode Super Halley.

Kata kunci: *persamaan nonlinear, metode Newton, metode super-Halley, metode berorde tiga, orde konvergensi.*

1. PENDAHULUAN

Pendekatan matematika dalam berbagai bidang ilmu yang sering muncul adalah bagaimana menemukan solusi dari persamaan nonlinear

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Metode analitik tidak dapat menyelesaikan semua kasus dari persamaan (1), maka metode numerik menjadi alternatif. Metode numerik yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan (1) adalah metode Newton dengan bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, f'(x_n) \neq 0, n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{2}$$

yang memiliki kekonvergenan orde dua [3, h. 68-69]. Selain metode Newton, ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear, diantaranya metode Halley yang memiliki kekonvergenan orde tiga [8, h. 89] dan metode Abbasbandy [1] yang memiliki kekonvergenan super kubik.

Pada artikel ini direview dan dikoreksi sebagian dari tulisan Herceg dan Herceg [7] yang berjudul "*On a Third Order Family of Methods for Solving Nonlinear Equation*". Pembahasan dimulai di bagian dua dengan menurunkan famili metode iterasi dengan memberi bobot dalam bentuk fungsi yang diberikan secara rekursif pada perbaikan metode Newton. Kemudian dilanjutkan di bagian tiga membuktikan analisa kekonvergenan dan di bagian empat melakukan uji komputasi.

2. FAMILI METODE ITERASI BERORDE TIGA UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NONLINEAR

Pandang metode iterasi

$$x_{n+1} = F_k(x_n), \tag{3}$$

dimana fungsi iterasi F berbentuk

$$F_k(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\phi_k(t(x_n)), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

dengan $t(x_n) = \dfrac{f(x_n)f''(x_n)}{(f'(x_n))^2}$, dan

$$\phi_0(s) = 1, \quad \phi_k(s) = \frac{2}{2 - s\ \phi_{k-1}(s)}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Perhatikan bahwa $\phi_k(s)$ tergantung kepada $\phi_{k-1}(s)$ dan disini hanya dibahas untuk $k = 1, 2, \ldots, 4$.

Ketika $k = 2$ maka dari (5) diperoleh ϕ_2, kemudian disubstitusikan ke (4) yang selanjutnya diperoleh dari (3)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\frac{2 - t(x_n)}{2(1 - t(x_n))}, \tag{6}$$

dengan $t(x_n) = \dfrac{f(x_n)f''(x_n)}{(f'(x_n))^2}$.

Persamaan (6) adalah metode super Halley, yang dapat diturunkan dengan via Adomian [4]dan via ekspansi Taylor [6]. Metode iterasi pada persamaan (6) memiliki kekonvergenan orde tiga [4, 6] dan memerlukan empat kali evaluasi fungsi pada setiap iterasinya. Jadi indeks efisiensinya adalah 1.316

3. ANALISA KEKONVERGENAN

Perhatikan metode iterasi

$$x_{n+1} = F(x_n), \tag{7}$$

dengan fungsi iterasi F berbentuk

$$F(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}G(x_n). \tag{8}$$

Asumsikan α adalah akar sederhana dari persamaan (1) maka $f(\alpha) = 0$. Selanjutnya metode iterasi (7) dikatakan berorde dua jika

$$F'(\alpha) = 0,\ F''(\alpha) \neq 0.$$

Misalkan

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}, \tag{9}$$

maka didapat

$$u'(x) = 1 - t(x), \tag{10}$$

dengan $t(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$. Jadi

$$u(\alpha) = 0,\ u'(\alpha) = 1. \tag{11}$$

Dengan menurunkan persamaan (8), diperoleh

$$F'(x) = 1 - \left(1 - \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right)G(x) - \frac{f(x)}{f'(x)}G'(x), \tag{12}$$

sehingga didapat

$$F'(\alpha) = 1 - G(\alpha). \tag{13}$$

Lema 1 [5] Metode iterasi yang diberikan persamaan (7) dengan F yang didefinisikan oleh persamaan (8) adalah berorde dua, jika dan hanya jika $G(\alpha) = 1$.

Bukti: Untuk kasus khusus $G(x) = 1$, diperoleh dari persamaan (8) metode Newton.

Persamaan (7) berorde tiga jika

$$F'(\alpha) = F''(\alpha) = 0, F'''(\alpha) \neq 0. \tag{14}$$

Dengan menurunkan kedua ruas persamaan (10) terhadap x diperoleh

$$u''(x) = -\frac{f''(x)}{f'(x)} + f(x)\left(\frac{(2f''(x))^2}{(f'(x))^3} - \frac{f'''(x)}{(f'(x))^2}\right), \tag{15}$$

sehingga didapat

$$u''(\alpha) = -t'(\alpha) = -\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}, \tag{16}$$

Selanjutnya dari persamaan (12) didapat

$$F''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}G(\alpha) - 2G'(\alpha). \tag{17}$$

Andaikan persamaan (8) berorde tiga, maka $F''(\alpha) = 0$. Dari persamaan (17) diperoleh

$$G(\alpha) = \frac{2G'(\alpha)f'(\alpha)}{f''(\alpha)}, \tag{18}$$

Karena $f(x)$ sebarang, maka $G(\alpha)$ belum tentu sama dengan 1. Jadi haruslah persamaan (8) berorde dua. ■

Lema 2 [5] Metode iterasi yang diberikan persamaan (7) dengan F didefinisikan oleh persamaan (8) adalah berorde tiga jika dan hanya jika $G(\alpha) = 1$ dan

$$G'(\alpha) = \frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Bukti: Dari Lema 1 dan persamaan (17) didapat

$$G(\alpha) = 1, \quad G'(\alpha) = \frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}. \tag{19}$$

Selanjutnya jika diketahui persamaan (19), maka persamaan (17) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} F''(\alpha) &= \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}1 - 2\frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \\ F''(\alpha) &= 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Jadi terbukti untuk $G(\alpha) = 1$ dan $G'(\alpha) = \frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$ didapat $F'(\alpha) = 0$, $F''(\alpha) = 0$ yang berarti bahwa metode iterasi (7) dengan F yang didefinisikan oleh persamaan

(8) adalah berorde tiga. $\blacksquare$

Perhatikan bahwa Lema 2 tidak dapat digunakan langsung untuk memilih fungsi G, dikarenakan akar α harus diketahui terlebih dahulu. Untuk itu jika dinyatakan $G(x) = H(t(x))$ untuk suatu fungsi H tertentu didapat

$$G(\alpha) = H(0), \quad G'(\alpha) = H'(0)t'(\alpha).$$

Oleh karena itu asumsi pada Lema 2 dapat disederhanakan menjadi $H(0) = 1$ dan $H'(0) = \frac{1}{2}$, yang lengkapnya disajikan pada Teorema 3.

Teorema 3 [5] Misalkan α adalah akar sederhana dari persamaan (1) dan H adalah fungsi yang memenuhi $H(0) = 1, H'(0) = \frac{1}{2}$ dan $|H''(0)| < \infty$. Fungsi iterasi $x_{n+1} = F(x_n)$ yang didefinisikan sebagai

$$F_k(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} H(t(x_n)),$$

dimana

$$t(x_n) = \frac{f(x_n)f''(x_n)}{(f'(x_n))^2},$$

adalah berorde tiga.

Bukti: Pembuktian teorema ini telah ditunjukkan pada Lema 2. $\blacksquare$

Teorema 4 [7] Asumsikan bahwa $f \in C^3[a,b]$, dengan $f(a) > 0 > f(b)$ dan $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0, f'''(x) \geq 0$, untuk $x \in [a,b]$. Kemudian untuk sebarang $x_0 \in [a,b]$ sedemikian hingga $f(x_0) > 0$ maka persamaan (3) konvergen secara monoton ke akar yang tunggal α dari persamaan (1). Jika disyaratkan

$$f'(\alpha) \geq 2f'(b), \tag{21}$$

maka ketaksamaan untuk menghentikan komputasi

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq |x_{n+1} - x_n|, \tag{22}$$

berlaku untuk setiap $n = 0, 1, 2, \ldots,$ dan $k = 1, 2, \ldots.$

Bukti: Syarat-syarat yang diberikan mengimplikasikan bahwa f memiliki tepat satu akar α pada (a,b) dan $x_0 \in [a,\alpha)$. Pertama-tama akan dibuktikan bahwa dengan asumsi yang ada pada teorema ini $F_k'(x) \geq 0$ untuk $a \leq x \leq \alpha$ dan untuk $k = 1, 2, \ldots$. Bila persamaan (4) diturunkan terhadap x

$$F_k'(x) = 1 - (1-t)\phi_k(t) - (t - 2t^2)\phi_k'(t) - \frac{(f(x))^2 f'''(x)}{(f'(x))^3}\phi_k'(t), \tag{23}$$

dengan $t(x_n) = \frac{f(x_n)f''(x_n)}{(f'(x_n))^2}$, dan untuk penyederhanaan ditulis $t(x) = t$.

Untuk membuktikan $F_k^{'}(x) \geq 0$ pada $a \leq x \leq \alpha$, diperlukan hasil tambahan yang dikemukan Altman [2]

$$0 \leq t = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \leq \frac{1}{2}, \quad a \leq x \leq \alpha, \tag{24}$$

dan untuk $0 \leq s \leq \dfrac{1}{2}$ dan $k = 1, 2, \ldots$

$$1 \leq \phi_k(s) < 2, \tag{25}$$

$$0 < \phi'_k(s), \tag{26}$$

$$0 \leq 2(1 - \phi_k(s)) + s\phi_k^2(s). \tag{27}$$

Selanjutnya untuk ϕ_1, terlihat bahwa $1 \leq \phi_1(s) = \dfrac{2}{2-s} \leq \dfrac{4}{3} < 2$ untuk $0 \leq s \leq \dfrac{1}{2}$. Perhatikan $\phi_{k+1}(s)$ dari persamaan (5), jika dimisalkan $1 \leq \phi_k(s) < 2$, diberikan

$$1 \leq \phi_{k+1}(s) = \frac{2}{2 - s\phi_k(s)} < \frac{2}{2-1} \leq 2, \tag{28}$$

yang berarti, bahwa persamaan (25) adalah benar.

Untuk $\phi_1^{'}$, jelas bahwa $\phi_1^{'}(s) = \dfrac{2}{(2-s)^2} > 0$ untuk $0 \leq s \leq \dfrac{1}{2}$. Karena persamaan (25) berlaku dan

$$\phi_{k+1}^{'}(s) = \frac{2(\phi_k(s) + s\phi_k^{'}(s))}{(2 - s\phi_k(s))^2}, \tag{29}$$

jika dimisalkan $0 < \phi_k^{'}(s)$ maka $0 < \phi_{k+1}^{'}(s)$, yaitu persamaan (26) adalah benar, dari sini jelas bahwa

$$2(1 - \phi_1(s)) + s\phi_1^2(s) = \frac{-2s}{2-s} + \frac{4s}{(2-s)^2} = \frac{2s^2}{(2-s)^2} \geq 0, \tag{30}$$

Selanjutnya, jika dimisalkan lagi persamaan (27) adalah benar untuk k, diperoleh

$$\begin{aligned} 2(1 - \phi_{k+1}(s)) + s\phi_{k+1}^2(s) &= 2\left(1 - \frac{2}{2 - s\phi_k(s)}\right) + \frac{4s}{(2 - s\phi_k(s))^2} \\ &= \frac{2s(2 - \phi_k(s) + s\phi_k(s)^2)}{(2 - s\phi_k(s))^2} \\ 2(1 - \phi_{k+1}(s)) + s\phi_{k+1}^2(s) \geq 0. & \end{aligned} \tag{31}$$

Jadi, persamaan (27) adalah benar.

Untuk kasus selanjutnya, tinjau kembali persamaan (23) dan dengan melihat kembali persamaan (24), diperoleh $0 < \phi_k^{'}(t)$ dan

$$-\frac{(f(x))^2 f'''(x)}{(f'(x))^3}\phi_k^{'}(t) \geq 0. \tag{32}$$

Oleh karena itu, untuk membuktikan $F_k^{'}(x) \geq 0$ pada $a \leq x \leq \alpha$, maka cukup dengan membuktikan

$$1-(1-t)\phi_k(t)-(t-2t^2)\phi_k^{'}(t) \geq 0. \tag{33}$$

Untuk ϕ_1, jelas bahwa

$$1-(1-t)\frac{2}{2-t}-(t-2t^2)\frac{2}{(2-t)^2}=\frac{3t^2}{(2-t)^2} \geq 0. \tag{34}$$

Jika dimisalkan bahwa persamaan (33) adalah benar untuk k, dan dengan mensubstitusikan persamaan (28) dan (29) ke persamaan (33), diperoleh

$$\begin{aligned}
1-&(1-t)\phi_{k+1}(t)-(t-2t^2)\phi_{k+1}^{'}(t)\\
&=1-\frac{2(1-t)}{2-t\phi_k(t)}-(t-2t^2)\frac{2(\phi_k(t)+t\phi_k^{'}(t))}{(2-t\phi_k(t))^2}\\
&=\frac{t(2(1-(1-t)\phi_k(t)-(t-2t^2)\phi_k^{'}(t))+2(1-\phi_k(t))+t\phi_k(t)^2)}{(2-t\phi_k(t))^2}.
\end{aligned}$$

Selanjutnya, dari persamaan (27) dan asumsi persamaan (33) adalah benar untuk k, maka dapat disimpulkan

$$1-(1-t)\phi_{k+1}(t)-(t-2t^2)\phi_{k+1}^{'}(t) \geq 0,$$

yaitu persamaan (33) adalah benar untuk $k=1,2,\ldots$. Sehingga diperoleh $F_k^{'} \geq 0$ untuk $a \leq x \leq \alpha$.

Maka dapat disimpulkan bahwa untuk $x_0 \in [a,\alpha)$

$$x_1=F_k(x_0)=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\phi_k(t(x_0)).$$

Karena $f(x_0)>0,\ f'(x_0)<0$ dan dengan mengingat kembali persamaan (24) dan (25), maka

$$x_0 \leq x_1.$$

Dari $F_k^{'}(x) \geq 0$ untuk $a \leq x \leq \alpha$ dan $\phi_k((\alpha))=\phi_k(0)=1$, jelas bahwa

$$x_1=F_k(x_0) \leq F_k(\alpha)=\alpha, \tag{35}$$

yakni $x_1 \in [a,\alpha]$, maka didapat bahwa

$$a \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \alpha,$$

untuk setiap $n=1,2,\ldots$, atau untuk $n=1,2,\ldots,m$ dengan m adalah bilangan asli tertentu dan $x_{m+i}=\alpha$ untuk $i=1,2,\ldots$. Dengan demikian $x_n \in [a,\alpha]$ dan didapat bahwa limit dari barisan iterasi ini ada dan limit ini merupakan solusi dari persamaan (1). Karena α adalah solusi tunggal dari persamaan (1), maka didapat bahwa $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

Selanjutnya dibuktikan untuk ketaksamaan pemberhentian yang diberikan persamaan (22). Dari persamaan (3) diperoleh untuk $n = 1, 2, \ldots$

$$x_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha - \frac{f(x_n) - f(\alpha)}{f'(x_n)}\phi_k(t_n)$$
$$x_{n+1} - \alpha = (x_n - \alpha)\left(1 - \frac{f'(\tau_n)}{f'(x_n)}\phi_k(t_n)\right),$$

dimana $\tau_n \in (x_n, \alpha)$ dan t_n menyatakan $t(x_n) = \dfrac{f(x_n)f''(x_n)}{(f'(x_n))^2}$.
Karena

$$x_{n+1} - x_n = -(x_n - \alpha)\left(\frac{f'(\tau_n)}{f'(x_n)}\phi_k(t_n)\right),$$

didapat

$$x_{n+1} - \alpha = (x_{n+1} - x_n)\left(1 - \frac{f'(x_n)}{f'(\tau_n)\phi_k(t_n)}\right),$$

dan ketaksamaan untuk pemberhentian komputasi berlaku, jika

$$\left|1 - \frac{f'(x_n)}{f'(\tau_n)\phi_k(t_n)}\right| \leq 1, \tag{36}$$

yakni

$$0 \leq \frac{f'(x_n)}{f'(\tau_n)\phi_k(t_n)} \leq 2. \tag{37}$$

Kemudian dari asumsi $x_0 \in [a, \alpha)$ maka $x_n \in [a, \alpha]$, diperoleh $0 \leq t_n \leq \frac{1}{2}$ dan $\phi_k(t_n) \geq 1$. Maka dapat disimpulkan

$$0 \leq \frac{f'(x_n)}{f'(\tau_n)\phi_k(t_n)} \leq \frac{f'(x_n)}{f'(\tau_n)} < \frac{f'(a)}{f'(b)} \leq 2. \tag{38}$$

Jadi terbukti untuk teorema ini. ■

4. UJI KOMPUTASI

Pada bagian ini dilakukan perbandingan numerik antara metode Newton dan famili metode-metode iterasi berorde tiga, untuk melihat jumlah iterasi yang diperlukan setiap metode untuk mencapai akar pendekatan.

Adapun fungsi yang digunakan untuk membandingkan metode-metode tersebut adalah $f(x) = \dfrac{1}{2} - \sin(x)$ yang mempunyai akar $\alpha = 0.5235987755982989$. Untuk melakukan uji komputasi dari contoh fungsi tersebut digunakan program Maple13 dengan toleransi $\epsilon = 1.0 \times 10^{-100}$ atau $\epsilon = 1.0 \times 10^{-200}$. Dalam membandingkan setiap metode untuk menemukan akar persamaan nonlinear, ditentukan kriteria pemberhentian jalannya program komputasi yang berbeda untuk setiap tabel, yaitu

1. $|x_{n+1} - \alpha|$ dan $|f(x_{n+1})| < \epsilon$

2. $|x_{n+1} - \alpha| < \epsilon$

Hasil perbandingan komputasi dapat dilihat pada Tabel 1 - 3 sebagai berikut.

Tabel 1: Perbandingan hasil komputasi famili metode-metode iterasi untuk ϕ_0 sampai ϕ_4 dengan kriteria pemberhentian 1

	x_0	Metode	n	COC	x_n	$\|f(x_n)\|$	$\|x_n - \alpha\|$
$f(x)$	0.05	ϕ_0 (MN)	7	2.00	0.5235987755982989	$3.6e-140$	$4.1e-140$
		ϕ_1	5	3.00	0.5235987755982989	$1.1e-166$	$1.3e-166$
		ϕ_2	5	3.00	0.5235987755982989	$1.8e-173$	$2.0e-173$
		ϕ_3	5	3.00	0.5235987755982989	$1.6e-173$	$1.9e-173$
		ϕ_4	5	3.00	0.5235987755982989	$1.6e-173$	$1.9e-173$
	0.3	ϕ_0 (MN)	6	2.00	0.5235987755982989	$2.9e-164$	$3.3e-164$
		ϕ_1	4	3.00	0.5235987755982989	$1.1e-239$	$1.3e-239$
		ϕ_2	4	3.00	0.5235987755982989	$4.9e-251$	$5.7e-251$
		ϕ_3	4	3.00	0.5235987755982989	$3.4e-251$	$3.9e-251$
		ϕ_4	4	3.00	0.5235987755982989	$3.3e-251$	$3.8e-251$
	0.5	ϕ_0 (MN)	6	2.00	0.5235987755982989	$1.7e-139$	$2.0e-139$
		ϕ_1	4	3.00	0.5235987755982989	$5.5e-157$	$6.4e-157$
		ϕ_2	4	3.00	0.5235987755982989	$1.5e-163$	$1.7e-163$
		ϕ_3	4	3.00	0.5235987755982989	$1.3e-163$	$1.6e-163$
		ϕ_4	4	3.00	0.5235987755982989	$1.3e-163$	$1.6e-163$

Tabel 2: Perbandingan hasil komputasi famili metode-metode iterasi untuk ϕ_0 sampai ϕ_4 dengan kriteria pemberhentian 2

	x_0	Metode	n	COC	x_n	$\|f(x_n)\|$	$\|x_n - \alpha\|$
$f(x)$	0.05	ϕ_0 (MN)	8	2.00	0.5235987755982989	$4.3e-280$	$4.9e-280$
		ϕ_1	6	3.00	0.5235987755982989	$4.8e-499$	$5.5e-499$
		ϕ_2	6	3.00	0.5235987755982989	$1.2e-519$	$1.4e-519$
		ϕ_3	6	3.00	0.5235987755982989	$9.9e-520$	$1.1e-519$
		ϕ_4	6	3.00	0.5235987755982989	$9.9e-520$	$1.1e-519$
	0.3	ϕ_0 (MN)	7	2.00	0.5235987755982989	$2.8e-328$	$3.2e-328$
		ϕ_1	5	3.00	0.5235987755982989	$4.7e-718$	$5.5e-718$
		ϕ_2	6	3.00	0.5235987755982989	$2.7e-752$	$3.1e-752$
		ϕ_3	6	3.00	0.5235987755982989	$8.4e-753$	$9.7e-753$
		ϕ_4	6	3.00	0.5235987755982989	$8.1e-753$	$9.3e-753$
	0.5	ϕ_0 (MN)	7	2.00	0.5235987755982989	$9.9e-279$	$1.1e-278$
		ϕ_1	5	3.00	0.5235987755982989	$5.7e-470$	$6.6e-470$
		ϕ_2	5	3.00	0.5235987755982989	$6.9e-490$	$7.9e-490$
		ϕ_3	5	3.00	0.5235987755982989	$5.4e-490$	$6.3e-490$
		ϕ_4	5	3.00	0.5235987755982989	$5.4e-490$	$6.3e-490$

Tabel 3: Perbandingan hasil komputasi famili metode-metode iterasi berorde konvergensi tiga

	x_0	Metode	n	COC	x_n	$\|x_n - \alpha\|$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
$f(x)$	0.05	ϕ_1	1		0.5235987755982989	$1.8e-002$	$4.6e-001$
			2	2.89	0.5235987755982989	$1.4e-006$	$1.8e-002$
			3	3.00	0.5235987755982989	$6.9e-019$	$1.4e-006$
			4	3.00	0.5235987755982989	$8.0e-056$	$6.9e-019$
			5	3.00	0.5235987755982989	$1.3e-166$	$8.0e-056$
		ϕ_2	1		0.5235987755982989	$1.8e-002$	$4.6e-001$
			2	2.99	0.5235987755982989	$9.5e-007$	$1.8e-002$
			3	3.00	0.5235987755982989	$1.4e-019$	$9.5e-007$
			4	3.00	0.5235987755982989	$5.0e-058$	$1.4e-019$
			5	3.00	0.5235987755982989	$2.0e-173$	$5.0e-058$
		ϕ_3	1		0.5235987755982989	$1.8e-002$	$4.6e-001$
			2	3.00	0.5235987755982989	$9.5e-007$	$1.8e-002$
			3	3.00	0.5235987755982989	$1.4e-019$	$9.5e-007$
			4	3.00	0.5235987755982989	$4.8e-058$	$1.4e-019$
			5	3.00	0.5235987755982989	$1.9e-173$	$4.8e-058$
		ϕ_4	1		0.5235987755982989	$1.6e-002$	$4.6e-001$
			2	3.00	0.5235987755982989	$8.2e-007$	$1.8e-002$
			3	3.00	0.5235987755982989	$1.2e-019$	$9.5e-007$
			4	3.00	0.5235987755982989	$4.2e-058$	$1.4e-019$
			5	3.00	0.5235987755982989	$1.6e-173$	$4.8e-058$

Pada Tabel 1, Tabel 2, dan Tabel 3, n menyatakan jumlah iterasi, x_0 menyatakan tebakan awal, COC menyatakan orde konvergensi dari metode secara komputasi, x_n menyatakan akar dari fungsi, $|f(x_n)|$ menyatakan nilai fungsi untuk pendekatan akar ke n dan $|x_n - \alpha|$ menyatakan kesalahan.

Secara umum berdasarkan Tabel 1, Tabel 2 dan Tabel 3 semua metode yang dibandingkan berhasil menemukan akar yang diharapkan dari semua metode dari contoh fungsi yang diberikan. Kemudian dengan memberikan tiga nilai tebakan awal x_0 yang berbeda pada Tabel 1 dan Tabel 2 dapat dilihat bahwa famili dari metode-metode iterasi berorde tiga lebih unggul jika dibandingkan dengan metode Newton. Sedangkan pada Tabel 3 dapat dilihat bahwa tidak ada perbedaan yang signifikan antara famili metode-metode iterasi berorde tiga ini, jika dilihat dari nilai kesalahan yang diperoleh.

Secara keseluruhan berdasarkan Tabel 1-3, famili metode-metode iterasi berorde tiga yaitu metode Halley, metode Abbasbandy dan metode super Halley lebih unggul dibandingkan dengan metode Newton, jika dilihat dari nilai kesalahan dan nilai fungsi yang dihasilkan oleh famili metode-metode iterasi berorde tiga pada iterasi terakhirnya. Kemudian dapat dilihat juga bahwa tidak ada perbedaan yang signifikan antara famili metode-metode iterasi berorde tiga ini.

Ucapan Terimakasih Penulis mengucapkan terimakasih kepada Dr. Imran M., M.Sc. yang telah memberikan arahan dan bimbingan dalam penulisan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Abbasbandy, S. 2003. Improving Newton−Raphson method for nonlinear equations by modified Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, **145**: 887-893.

[2] Altman, M. 1961. Concerning the Method of Tangent Hyperbolas for Operator Equations. *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys*, **9**: 633-637.

[3] Atkinson, K. E. 1993. *Elementary Numerical Analysis, 2^{nd} Ed.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

[4] Basto, M., Semiao, V. & Calheiros, F. L. 2006. A new iterative method to compute nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, **173**: 468-483.

[5] Gander, W. 1982. On Halley Iteration Method. *Applied Mathematics and Computation*, **95**: 131-134.

[6] Gutierrez , J. M. & Hernandez, M. A. 2001. An acceleration of Newton's method: super-Halley method. *Applied Mathematics and Computation*, **117**: 223-239.

[7] Herceg , D. & Dragoslav, H. 2010. On a third order family of methods for solving nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, **87**: 2533-2541.

[8] Wait, R. 1979. *The Numerical Solution of Algebraic Equation*. John Wiley & Sons, Inc., Chicester.