

# MODEL TINGKAT PRODUKSI EKONOMIS DENGAN PROSES PENGERJAAN ULANG DAN PADA TINGKAT PELAYANAN TERJADI KEKURANGAN PERSEDIAAN

Reza Budiman<sup>1\*</sup>, Tumpal P. Nababan<sup>2</sup>, Endang Lily<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Mahasiswa Program Studi S1 Matematika FMIPA Universitas Riau

<sup>2</sup>Dosen Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau  
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

\*rezabudiman8@gmail.com

## ABSTRACT

This article studies the economic production quantity (EPQ). During the production process, the failures occur and reworking is conducted to minimize the total production cost. This study is a review of Chiu et. al [Mathematical and Computational Applications, 11(2006): 75-84]. A numerical example is given to explain the problem discussed.

Keywords: *model Economic Production Quantity, imperfect quality item, reworking, shortage, backlogging.*

## ABSTRAK

Artikel ini membahas model tingkat produksi ekonomis dengan kendala pada proses produksi dan persediaan. Saat produksi terjadi kegagalan yang menghasilkan barang cacat produksi dan untuk meminimumkan biaya produksi dilakukan pengerjaan ulang. Artikel ini tinjauan dari Chiu et. al [Mathematical and Computational Applications, 11(2006): 75-84]. Sebuah contoh numerik diberikan pada akhir pembahasan.

Kata kunci: *model Economic Production Quantity, barang cacat, pengerjaan ulang, kekurangan persediaan, produksi kembali.*

## 1. PENDAHULUAN

Dalam bidang usaha yang memproduksi barang secara mandiri memiliki dua proses, yaitu proses produksi dan proses permintaan. Pada kedua proses tersebut dapat digunakan model *Economic Production Quantity* (EPQ) untuk mengoptimalkan produksi dengan biaya produksi minimum.

Saat proses produksi dan permintaan tidak selamanya lancar, pada produksi terjadi kegagalan produksi yang menghasilkan barang yang tidak sempurna dan harus dikerjakan ulang. Pada permintaan terjadi kekurangan persediaan yang mengakibatkan harus ditingkatkan pelayanan sehingga tidak terjadi kehilangan konsumen. Seperti menurut Hillier dan Lieberman [4, h.258] jika tingkat pelayanan optimal maka permintaan pelanggan tidak akan hilang, tetapi akan dipenuhi jika stok berikutnya sudah diproduksi.

Model EPQ memiliki komponen biaya-biaya yang harus diperhatikan yaitu biaya produksi, biaya pengadaan, biaya penyimpanan dan biaya kekurangan [6, h.17]. Selain dari biaya-biaya tersebut terdapat biaya yang dikeluarkan karena terjadinya kegagalan produksi yang menghasilkan cacatnya produk, sehingga harus dikerjakan ulang dan dikenakan biaya perbaikan. Biaya yang dikenakan disebut dengan biaya pengerjaan ulang (*rework cost*) [1, h.11]. Pada proses produksi terjadi kegagalan yang menghasilkan barang cacat dengan jumlah barang cacat tidak diketahui, sehingga dapat digunakan fungsi densitas probabilitas dengan fungsi densitas probabilitas berdistribusi uniform yang nilai ekspektasinya sama dengan 1 [5, h.172].

Dalam artikel ini dibahas model EPQ dengan proses pengerjaan ulang dan pada tingkat pelayanan terjadi *shortage*. Model ini mempertimbangkan biaya yang dikeluarkan dan waktu yang dibutuhkan untuk mengerjakan ulang barang yang gagal produksi. Kajian ini merupakan kajian ulang yang mendetailkan kertas kerja Chiu et. al [2]. Sesuai pada pembahasan.

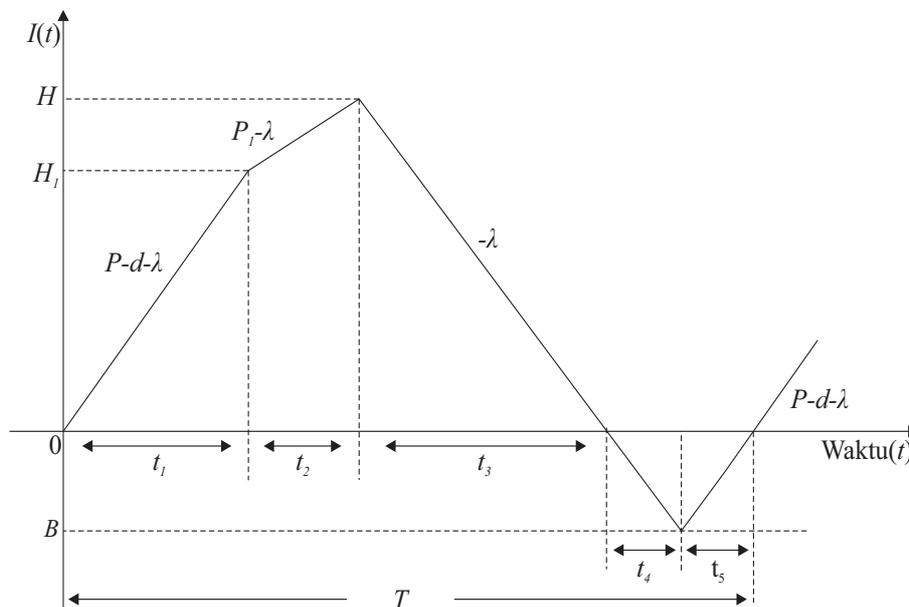
## **2. MODEL EPQ DENGAN PROSES Pengerjaan Ulang dan pada tingkat Pelayanan Terjadi *SHORTAGE***

Model ini digunakan untuk penyelesaian dua masalah pada saat produksi dan permintaan. Pada produksi terjadi kerusakan produksi yang mengakibatkan pengerjaan ulang dan pada permintaan terjadinya kekurangan persediaan yang mengakibatkan tingkat pelayanan harus ditingkatkan. Sebelum menguraikan model ini diberikan notasi sebagai berikut:

- $c$  := biaya produksi unit per satuan waktu,
- $cR$  := biaya perbaikan unit per satuan waktu,
- $K$  := biaya pengadaan,
- $h$  := biaya penyimpanan per unit,
- $h_1$  := biaya penyimpanan setelah pengerjaan ulang per unit,
- $P$  := tingkat produksi barang yang sempurna unit per satuan waktu,
- $P_1$  := tingkat produksi barang yang dikerjakan ulang unit per satuan waktu,
- $H$  := tingkat persediaan maksimum barang yang bagus,
- $H_1$  := tingkat persediaan barang bagus dan barang yang dikerjakan ulang,

$\lambda$	:=	laju permintaan dalam unit per satuan waktu,
$x$	:=	persentase barang yang cacat,
$B^*$	:=	jumlah kekurangan stok optimal,
$Q_b^*$	:=	produksi optimal,
$t_1$	:=	waktu produksi barang,
$t_2$	:=	waktu pengerjaan ulang barang yang cacat,
$t_3$	:=	waktu proses permintaan,
$T$	:=	waktu satu kali produksi,
$E[TCU(Q_b, B)]$	:=	ekspektasi dari biaya persediaan total dengan kekurangan maksimal,
$E[TCU(Q_b^*, B^*)]^*$	:=	ekspektasi dari biaya persediaan optimal dan kekurangan optimal,
$TCU^*(Q_b^*, B^*)$	:=	Total biaya apabila tidak ada barang yang cacat dan tetap terjadi kekurangan persediaan.

Bentuk grafik model EPQ dengan pengerjaan ulang dan pada tingkat pelayanan terjadi kekurangan dalam satu periode dapat diilustrasikan pada Gambar 1 [2].



Gambar 1: Model EPQ dengan pengerjaan ulang dan *shortage* terjadi.

Pada Gambar 1 menyatakan pada waktu  $t_1$  terjadi produksi dengan rata-rata  $P$ , terjadi kegagalan produksi dengan rata-rata  $d$  dan terjadi pelayanan dengan rata-rata  $\lambda$ , pada waktu  $t_1$  tingkat persediaannya sebesar  $H_1$ . Pada waktu  $t_2$  pengerjaan ulang dilaksanakan dengan rata-rata produksi  $P_1$  dan terjadi permintaan dengan rata-rata  $\lambda$ , pada waktu  $t_2$  tingkat persediaannya sebesar  $H$ . Persentase barang

yang cacat adalah  $x$ . Sehingga besaran barang yang cacat adalah tingkat produksi dikali dengan persentase barang cacat sebagai berikut  $d = Px$ .

Setelah pengerjaan ulang selesai kemudian proses permintaan terjadi dengan waktu  $t_3$ . Pada proses permintaan terjadi kekurangan produksi yang mengakibatkan perusahaan harus meningkatkan pelayanan sehingga perusahaan tidak kehilangan konsumen dengan batas kekurangan sebesar  $B$  dengan waktu selama  $t_4$ . Karena terjadi kekurangan perusahaan harus memproduksi kembali dengan lamanya waktu  $t_5$ .

Secara umum pada model EPQ, waktu yang diperlukan untuk memproduksi tiap putaran adalah  $t_1 = \frac{Q}{P}$ . Waktu yang diperlukan untuk memproduksi barang sebesar  $Q$  unit adalah

$$t_1 = \frac{H_1}{P - D - \lambda}.$$

Waktu yang diperlukan untuk perbaikan barang yang cacat adalah

$$t_2 = \frac{H - H_1}{P_1 - \lambda}. \quad (1)$$

Waktu permintaan adalah

$$t_3 = \frac{H}{\lambda}.$$

Waktu terjadinya kekurangan persediaan, permintaan tetap bejalan

$$t_4 = \frac{B}{\lambda}.$$

Waktu produksi kembali

$$t_5 = \frac{H}{P - D - \lambda}.$$

Total waktu yang diperlukan untuk produksi seluruh barang  $Q_b$  adalah

$$t_1 + t_5 = \frac{Q_b}{P},$$

tingkat persediaan optimal adalah

$$H_1 = \frac{Q_b}{P}(P - D - \lambda) - B. \quad (2)$$

Produksi barang yang cacat terjadi pada waktu  $t_1$  dan dikerjakan kembali pada waktu  $t_2$ . Memproduksi kembali dimulai pada waktu  $t_5$  sehingga dapat diperoleh waktu pengerjaan sebagai berikut:

$$t_2 = \frac{d(t_1 + t_5)}{P_1} = \frac{Q_b x}{P_1}(1 - \theta). \quad (3)$$

Dari persamaan (1) dapat ditentukan nilai  $H$  dengan mensubstitusikan persamaan (2) dan (3) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} H &= H_1 + (P_1 - \lambda)t_2 \\ &= \frac{Q_b}{P}(P - d - \lambda) + xQ_b(1 - \theta) - \lambda \frac{(xQ_b(1 - \theta))}{P_1} - B. \end{aligned}$$

Waktu yang diperlukan dari produksi sebesar  $Q_b$  hingga habis barang pada tingkat  $\lambda$  adalah  $T$ . Satu periode jumlah dari waktu awal produksi  $t_1$  hingga habisnya permintaan  $t_4$ , tetapi karena terjadi kekurangan persediaan maka waktu ditambah untuk memproduksi kekurangan tersebut pada waktu  $t_5$ , sehingga total waktu satu periode adalah [3]

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = \sum_{i=1}^5 t_i$$

$$= \frac{H_1}{P-d-\lambda} + \frac{xQ_b(1-\theta)}{P_1} + \frac{H}{\lambda} + \frac{B}{\lambda} + \frac{H}{P-d-\lambda} = \frac{Q_b(1-x\theta)}{\lambda}.$$

Pada saat sebelum pengerjaan ulang barang yang rusak terdapat proses penyaringan dengan besaran  $\theta$ . Pada saat penyaringan waktu yang dibutuhkan hampir tidak ada, sehingga waktu yang dibutuhkan untuk satu periode menjadi

$$T = \frac{Q_b}{\lambda}. \quad (4)$$

Biaya-biaya yang sesuai pada model diatas adalah Biaya produksi untuk semua barang  $cQ_b$ . Biaya pengerjaan ulang barang yang cacat  $c_R Q_b x$ . Biaya *set-up*  $K$ . Biaya penyimpanan adalah biaya yang dikeluarkan dari awal produksi hingga semua barang terpenuhi. Biaya penyimpanan menyangkup dari seluruh biaya produksi, cacat, dan tidak cacat yang dikalikan dengan  $h$  dan untuk semua barang yang dikerjakan ulang biaya penyimpanan dikalikan dengan  $h_1$ .

Tingkat rata-rata persediaan untuk semua barang yang sempurna satu periode produksi adalah

$$H_1 \frac{t_1}{2} + (H_1 + H) \frac{t_2}{2} + H \frac{t_3}{2}. \quad (5)$$

Tingkat rata-rata persediaan untuk barang yang cacat dalam satu periode produksi terjadi pada waktu  $t_1$  dan  $t_5$  sehingga diperoleh

$$d(t_1 + t_5) \times \frac{(t_1 + t_5)}{2} = d \frac{(t_1 + t_5)^2}{2}. \quad (6)$$

Tingkat rata-rata persediaan barang yang cacat dikerjakan ulang adalah

$$P_1 t_2 \times \frac{t_2}{2} = P_1 \frac{t_2^2}{2}. \quad (7)$$

Biaya penyimpanan adalah jumlah dari persamaan (5), (6), dan (7) sebagai berikut:

$$h \left[ H_1 \frac{t_1}{2} + (H_1 + H) \frac{t_2}{2} + H \frac{t_3}{2} \right] + h \left( d \frac{(t_1 + t_5)^2}{2} \right) + h_1 \left( \frac{t_2^2}{2} \right).$$

Biaya kekurangan adalah biaya yang dikarenakan menunggunya konsumen untuk mendapatkan barang sehingga tidak terjadinya kekurangan. Proses

kekurangan terjadi pada  $t_4$  dan dikerjakan kembali pada  $t_5$ , seperti pada Gambar 1 sehingga diperoleh  $b\frac{B}{2}(t_4 + t_5)$ .

Biaya keseluruhan meliputi jumlah dari biaya produksi, biaya pengerjaan ulang, biaya *set-up*, biaya penyimpanan dan biaya kekurangan. Biaya keseluruhannya adalah

$$\begin{aligned} TC &= cQ_b + c_R Q_b X + h \left[ H_1 \frac{t_1}{2} + (H_1 + H) \frac{t_2}{2} + H \frac{t_3}{2} \right] \\ &\quad + h \left( d \frac{(t_1 + t_5)^2}{2} \right) + h_1 \left( \frac{t_2^2}{2} \right) + b \frac{B}{2} (t_4 + t_5) \\ &= cQ_b + c_R Q_b x + K + h \left[ \frac{P(1-x)}{2\lambda(P(1-x) - \lambda)} B^2 - \frac{BQ_b}{\lambda} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{P} - \frac{x^2}{P_1} \right) \frac{Q_b^2}{2} \right] + h_1 \frac{x^2 Q_b^2}{2P_1} + b \frac{(P(1-x))B^2}{2\lambda(P(1-x) - \lambda)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Kalikan persamaan (8) dengan persamaan (4), sehingga total biaya dalam satu periode adalah

$$\begin{aligned} TCU(Q_b, B) &= \frac{TC(Q_b, B)}{T} = \lambda(c + c_R x) + \frac{K\lambda}{Q_b} + \frac{h}{2} \left[ \left( 1 - \frac{\lambda}{P} \right) Q_b - 2B \right] \\ &\quad + (h_1 - h) \frac{x^2 Q_b \lambda}{2P_1} + (b + h) \left( \frac{P(1-x)B^2}{2Q_b(P(1-x) - \lambda)} \right). \end{aligned}$$

Untuk mencari total biaya dengan kendala kerusakan pada produksi dan kekurangan persediaan yang dikerjakan ulang. Tingkatan produksi barang yang cacat adalah variabel acak, sehingga diberikan nilai ekspektasi sebagai berikut:

$$E(TCU(y)) = \int_0^{1-\frac{\beta}{\alpha}} E(TCU(y)/x) f(x) dx.$$

Ekspektasi dari total biaya satu periode adalah

$$\begin{aligned} E(TCU(Q_b, B)) &= \lambda(c + c_R E(x)) + \frac{K\lambda}{Q_b} + \frac{h}{2} \left[ \left( 1 - \frac{\lambda}{P} \right) Q_b - 2B \right] \\ &\quad + (h_1 - h) \frac{Q_b \lambda}{2P_1} E(x^2) + (b + h) \frac{B^2}{2Q_b} E \left( \frac{1-x}{1-x-\frac{\lambda}{P}} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

dengan

$$E \left( \frac{1-x}{1-x-\frac{\lambda}{P}} \right) = \int_0^{1-\frac{\beta}{\alpha}} \frac{1-x}{1-x-\frac{\lambda}{P}} f(x) dx.$$

Untuk memperoleh produksi optimal dan kekurangan optimal, turunkan persamaan (9) sama dengan 0. Diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(TCU(Q_b, B))}{\partial Q_b} &= -\frac{K\lambda}{Q_b^2} + \frac{h}{2} - \frac{h\lambda}{2P} + (h_1 - h) \frac{\lambda}{2P_1} E(x^2) \\ &\quad - (b + h) \frac{B^2}{2Q_b^2} E \left( \frac{1-x}{1-x-\frac{\lambda}{P}} \right) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial E(TCU(Q_b, B))}{\partial B} = -h + (b+h) \frac{B}{Q_b} E\left(\frac{1-x}{1-x-\frac{\lambda}{P}}\right) = 0. \quad (11)$$

Pada persamaan (11) dapat diperoleh

$$B = \frac{hQ_b}{(b+h)E\left(\frac{1-x}{1-x-\frac{\lambda}{P}}\right)}. \quad (12)$$

Substitusikan persamaan (12) ke persamaan (10) sehingga diperoleh persediaan optimal sebagai berikut:

$$Q_b^* = \sqrt{\frac{2K\lambda}{h - \frac{h\lambda}{P} + (h_1 - h) \frac{\lambda}{P_1} E(x^2) - \frac{h^2}{(b+h)E\left(\frac{1-x}{1-x-\frac{\lambda}{P}}\right)}}}. \quad (13)$$

Substitusikan persamaan (13) ke persamaan (12) sehingga diperoleh kekurangan optimal sebagai berikut:

$$B^* = \frac{h}{(b+h)E\left(\frac{1-x}{1-x-\frac{\lambda}{P}}\right)} \sqrt{\frac{2K\lambda}{h - \frac{h\lambda}{P} + (h_1 - h) \frac{\lambda}{P_1} E(x^2) - \frac{h^2}{(b+h)E\left(\frac{1-x}{1-x-\frac{\lambda}{P}}\right)}}}. \quad (14)$$

Mencari total biaya keseluruhan untuk produksi optimal dan kekurangan optimal adalah substitusikan persamaan (13) dan (14) ke persamaan (9) sehingga diperoleh

$$E(TCU(Q_b^*, B^*)) = \lambda(c + c_R E(x)) + \frac{K\lambda}{Q_b^*} + \frac{h}{2} \left[ \left(1 - \frac{\lambda}{P}\right) Q_b^* - 2B \right] + (h_1 - h) \frac{Q_b^* \lambda}{2P_1} E(x^2) + (b+h) \frac{B^{*2}}{2Q_b^*} E\left(\frac{1-x}{1-x-\frac{\lambda}{P}}\right).$$

Untuk menentukan kekonvekkannya dapat ditentukan  $H > 0$  sebagai berikut:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E(TCU(Q_b, B))}{\partial Q_b^2} & \frac{\partial^2 E(TCU(Q_b, B))}{\partial Q_b \partial B} \\ \frac{\partial^2 E(TCU(Q_b, B))}{\partial B \partial Q_b} & \frac{\partial^2 E(TCU(Q_b, B))}{\partial B^2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} Q_b & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_b \\ B \end{bmatrix} = \frac{2K\lambda}{Q_b} > 0,$$

untuk semua  $Q_b \neq 0$  dan  $B \neq 0$ . Terbukti  $H > 0$  sehingga konveksnya berbentuk konveks kuat dengan minor-nya  $> 0$ .

Apabila tidak terjadi kerusakan pada produksi, maka  $x = 0$  dan  $d = 0$  sehingga produksi optimal adalah sebagai berikut [2]:

$$Q_b^* = \sqrt{\frac{2K\lambda(b+h)}{bh\left(1-\frac{\lambda}{P}\right)}}$$

Kekurangan optimal untuk  $x = 0$  dan  $d = 0$  adalah

$$B^* = \frac{h}{b+h} \left(1 - \frac{\lambda}{P}\right) Q_b^*,$$

dan rata-rata total biaya dengan produksi optimal dan kekurangan optimal menjadi

$$TCU^*(Q_b^*, B^*) = c\lambda + \frac{K\lambda}{Q_b} + \frac{bB^2 + h\left[B - Q_b\left(1 - \frac{\lambda}{P}\right)\right]^2}{2Q_b\left(1 - \frac{\lambda}{P}\right)}.$$

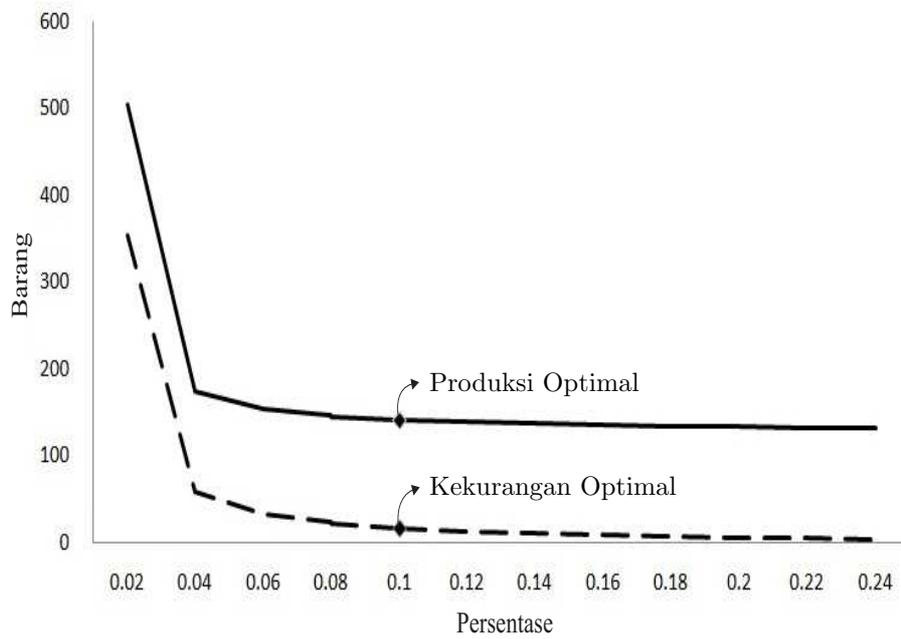
### 3. CONTOH KOMPUTASI

Suatu perusahaan elektronik dapat memenuhi permintaan konsumen dengan kecepatan permintaan 250 unit per tahun. Perusahaan dapat memproduksi barang dengan kecepatan 1000 unit pertahun. Perusahaan mengeluarkan biaya pengadaan tetap satu periode sebesar Rp100.000,00. Perusahaan memerlukan biaya produksi sebesar Rp50.000,00 dengan biaya penyimpanan sebesar Rp4.000,00. Karena terjadi kegagalan produksi sehingga perusahaan mengalami kerusakan pada hasil produksi yang mengakibatkan terdapatnya 600 barang yang gagal dalam produksi. Perusahaan harus mengeluarkan biaya tambahan untuk produksi ulang sebesar Rp30.000,00 dan biaya penyimpanan sebesar Rp4.500,00. Karena meningkatnya permintaan sehingga mengakibatkan perusahaan mengalami kekurangan persediaan, perusahaan harus mengeluarkan biaya produksi kembali sebesar Rp3.000,00 apabila kekurangan terjadi. Diketahui biaya-biaya yang dikeluarkan perusahaan adalah

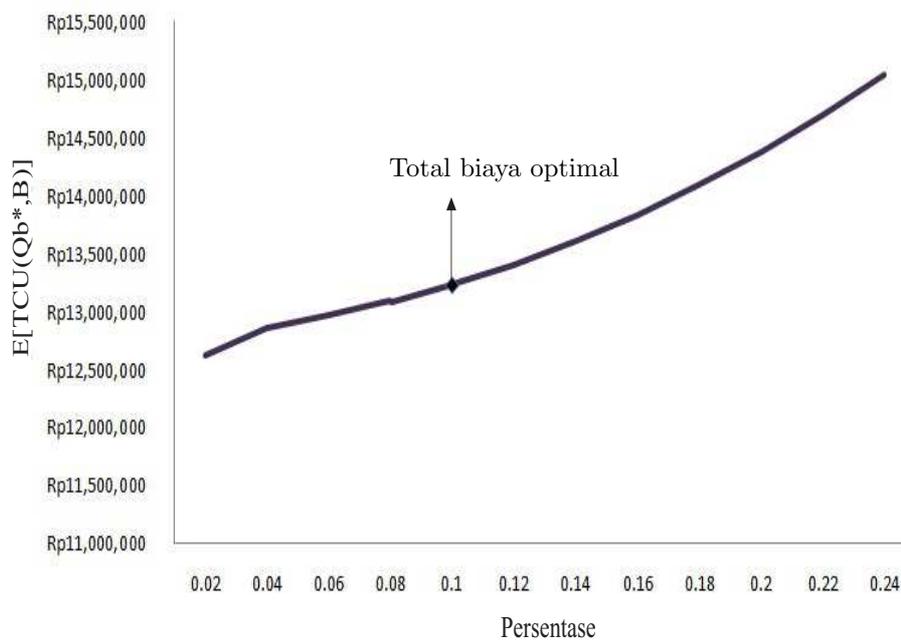
$$\begin{array}{llll} P & = & 1000 & \text{unit}; & h & = & \text{Rp}4.000,00; & K & = & \text{Rp}100.000,00; \\ P_1 & = & 600 & \text{unit}; & h_1 & = & \text{Rp}4.500,00; & c & = & \text{Rp}50.000,00; \\ \lambda & = & 250 & \text{unit}; & c_R & = & \text{Rp}30.000,00; & b & = & \text{Rp}3.000,00. \end{array}$$

Nilai  $x$  berupa interval  $[0, 0.1]$  sehingga fungsi densitas probabilitas uniform adalah

$$f(x) = \begin{cases} 10 & \text{untuk } 0 \leq x < 0.1, \\ 0 & \text{untuk yang lainnya.} \end{cases}$$



Gambar 2: Grafik produksi optimal dan kekurangan optimal



Gambar 3: Grafik total biaya

Sehingga nilai ekspektasi adalah

$$E[x] = \int_a^b xf(x)dx = \int_0^{0.1} 10xdx = 0.05$$

$$E[x] = \int_a^b x^2f(x)dx = \int_0^{0.1} 10x^2dx = 0.0033$$

$$E\left(\frac{1-x}{1-x-\frac{\lambda}{P}}\right) = \int_0^{0.1} \frac{1-x}{1-x-\frac{\lambda}{P}}f(x)dx = \int_a^b \frac{1-x}{0.25-x}10dx = 4.8312.$$

Dari Gambar 2 dan Gambar 3 dapat dilihat bahwa persediaan optimal dan kekurangan optimal terletak pada  $x = 0, 1$ . Sehingga produksi optimal adalah  $Q_b^* = 141$  dan kekurangan optimal adalah  $B^* = 17$ . Sehingga perusahaan harus mengeluarkan biaya optimal dalam satu periode sebesar Rp13.230.498,00.

#### 4. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa model EPQ di atas memiliki dua kendala pada produksi dan pada pelayanan. Pada produksi terjadi kegagalan yang menghasilkan barang cacat dan pada pelayanan terjadinya kekurangan persediaan. Oleh karena itu, untuk mendapatkan hasil yang maksimal diperlukan persediaan optimal dan kekurangan optimal sehingga mendapatkan total biaya yang optimal.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1] Ariani, W. D. 2004. *Pengendalian Kualitas Statistik: Jilid I*. Penerbit Andi, Yogyakarta.
- [2] Chiu, Y. S. P., S. W. Chiu & H. D. Lin. 2006. Solving EPQ model with rework and service level constraint. *Association for Scientific Reserch*, 11: 75-68.
- [3] Hayek, P. A & M. K. Salameh. 2001. Production Lot Sizing with the Reworking of Imperfect Quality Items Produced. *Production Planning and Control: The Management of Operations*, 12: 584-590.
- [4] Hillier, F. S & G. J. Lieberman. 1995. *Pengantar Riset Operasi edisi kelima:jilid 1*. Terj. dari *Introduction to Operation Research, fifth Edition*, oleh Gunawan, E & A. W. Mulia. Penerbit Erlangga, Jakarta.
- [5] Hines, W. W & G. C. Montgomery. 1990. *Probabilita dan Statistik dalam Ilmu Rekayasa dan Managemen: Edisi Kedua*. Terj. dari *Probability and Statistics in Engineering and Management Science*, oleh Rudiansyah. UI-PRESS, Jakarta.
- [6] Siagian, P. 1987. *Penelitian Operasional: Teori dan Praktek*. UI-PRESS, Jakarta.