

PENAKSIR RASIO REGRESI MENGGUNAKAN KOEFISIEN KURTOSIS DAN KOEFISIEN VARIASI UNTUK RATA-RATA POPULASI

Endah Dwi Jayanti^{1*}, Arisman Adnan², Sigit Sugiarto²

¹ Mahasiswa Program Studi S1 Matematika

² Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*endahdwijayanti73@yahoo.com

ABSTRACT

This paper studies three regression ratio estimators for population mean \bar{Y} of the variable Y using information on two auxiliary variables X dan Z under simple random sampling without replacements. This discussion is a review from the article of Singh et al. [*Statistics in Transition* 10(1): 85-100]. All estimators are biased. The efficient estimator is the one with the minimum Mean Square Error (MSE), determined by comparing each type of the estimators.

Keywords: *regression ratio estimator, simple random sampling, biased estimator and mean square error*

ABSTRAK

Artikel ini membahas tiga penaksir rasio regresi untuk rata-rata populasi \bar{Y} dari variabel Y menggunakan dua variabel tambahan X dan Z pada sampling acak sederhana tanpa pengembalian. Pembahasan ini merupakan *review* dari artikel Singh et al. [*Statistics in Transition* 10(1): 85-100]. Ketiga penaksir merupakan penaksir bias. Penaksir yang efisien merupakan penaksir yang memiliki *Mean Square Error (MSE)* minimum yang diperoleh dengan membandingkan *MSE* dari masing-masing tipe penaksir tersebut.

Kata kunci: *penaksir rasio regresi, sampling acak sederhana, penaksir bias dan mean square error*

1. PENDAHULUAN

Metode sampling adalah metode pengambilan sampel untuk memperoleh sampel yang representatif dari suatu populasi dengan hasil berupa data perkiraan. Pengambilan sampel yang representatif bertujuan untuk mendapatkan penaksir dengan tingkat presisi tinggi. Sampling ada dua macam yaitu sampling acak dan sampling tidak acak. Sampling acak adalah suatu cara pengambilan sampel dari setiap anggota populasi didasarkan atas probabilitas sehingga setiap anggota populasi memiliki kesempatan yang sama untuk terambil sebagai anggota sampel. Ada beberapa metode sampling acak diantaranya acak sederhana, sistematis, berlapis dan kluster. Di sini metode yang digunakan adalah sampling acak sederhana.

Pengambilan sampel acak sederhana merupakan suatu metode untuk mengambil n unit sampel dari N unit populasi, sehingga setiap elemen ${}_N C_n$ sampel yang berbeda mempunyai kesempatan yang sama untuk diambil sebagai unit sampel. Pengambilan sampel ini adalah pengambilan sampel acak sederhana tanpa pengembalian agar karakteristik unit-unit lebih akurat. Untuk meningkatkan ketelitian suatu penaksir dapat digunakan metode rasio.

Penaksir rasio merupakan salah satu metode yang digunakan untuk meningkatkan ketelitian penaksir dengan memanfaatkan hubungan antara dua variabel, yaitu y_i dan x_i dimana y_i adalah unit dari populasi Y dan x_i adalah unit dari populasi X yang diketahui. Metode rasio telah banyak digunakan saat terdapat korelasi yang tinggi antara variabel pengamatan y dan variabel tambahan x . Pada penaksir rasio terdapat bias yang dapat mempengaruhi kesalahan taksiran. Apabila ekspektasi dari suatu penaksir sama dengan parameter yang ditaksir, maka penaksir tersebut disebut penaksir tak bias, dan apabila ekspektasi dari suatu penaksir tidak sama dengan parameter yang ditaksir, maka penaksir tersebut disebut penaksir bias.

Bentuk umum penaksir rasio sederhana untuk rata-rata populasi \bar{Y} dari variabel yang diteliti Y adalah $\bar{Y}_R = \hat{R}\bar{X}$, dengan $\hat{R} = \bar{y}/\bar{x}$ merupakan penaksir untuk rasio $R = \bar{Y}/\bar{X}$ [2: h. 173]. Asumsi bahwa rata-rata populasi \bar{X} dari variabel tambahan X diketahui, \bar{y} adalah rata-rata sampel dari variabel yang diteliti dan \bar{x} adalah rata-rata sampel dari variabel tambahan. Seperti penaksir rasio, penaksir regresi juga dapat digunakan untuk menaksir suatu parameter. Penaksir yang dibahas adalah kombinasi antara penaksir rasio dan penaksir regresi sehingga menjadi penaksir rasio regresi.

2. PENAKSIR RASIO REGRESI UNTUK RATA-RATA POPULASI

Penaksir rasio regresi yang akan dibandingkan merupakan penaksir rasio regresi menggunakan dua variabel tambahan yaitu X dan Z , koefisien kurtosis dan koefisien variasi. Penaksir rasio regresi $\bar{y}_{RR}^{(1)}$, $\bar{y}_{RR}^{(2)}$, $\bar{y}_{RR}^{(3)}$ merupakan penaksir untuk parameter \bar{Y} yang dirumuskan sebagai berikut:

$$\bar{y}_{RR}^{(1)} = \bar{y} + B_{yx} (\bar{X} - \bar{x}) \left[\frac{\bar{Z}C_z + \beta_2(z)}{\bar{Z}C_z + \beta_2(z)} \right],$$

$$\bar{y}_{RR}^{(1)} = \bar{y}_{lr} + c_1 u + c_2 \bar{z} \quad (1)$$

$$\bar{y}_{RR}^{(2)} = \bar{y} + B_{yx} (\bar{X} - \bar{x}) \left[\frac{\bar{Z}\beta_2(z) + C_z}{\bar{Z}\beta_2(z) + C_z} \right],$$

$$\bar{y}_{RR}^{(2)} = \bar{y}_{lr} + c_1 u + c_2 \bar{z} \quad (2)$$

$$\bar{y}_{RR}^{(3)} = \bar{y} + B_{yx} (\bar{X} - \bar{x}) \left[\frac{\bar{Z}C_z + \beta_2(z)}{\bar{Z}C_z + \beta_2(z)} \right],$$

$$\bar{y}_{RR}^{(3)} = \bar{y}_{lr} + c_1 u + c_2 \bar{z} \quad (3)$$

dengan

$$c_1 = \frac{\bar{Z}C_z}{\bar{Z}C_z + \beta_2(z)}, c = \frac{\bar{Z}\beta_2(z)}{\bar{Z}\beta_2(z) + C_z}, u = \frac{\bar{z}}{\bar{Z}}, \bar{y}_{lr} = \bar{y} + B_{yx}(\bar{x} - \bar{x}),$$

dan B_{yx} merupakan koefisien regresi antara variabel Y dan X , $\beta_2(z)$ dan C_z merupakan koefisien kurtosis dan koefisien variasi dari variabel tambahan Z .

Selanjutnya akan ditentukan besar bias dari penaksir $\bar{y}_{RR}^{(1)}$, $\bar{y}_{RR}^{(2)}$, dan $\bar{y}_{RR}^{(3)}$. Jika besar bias dari penaksir $\bar{y}_{RR}^{(1)}$, $\bar{y}_{RR}^{(2)}$, dan $\bar{y}_{RR}^{(3)}$ sama dengan nol, maka akan dibandingkan variansi dari ketiga penaksir, akan tetapi jika besar bias dari penaksir $\bar{y}_{RR}^{(1)}$, $\bar{y}_{RR}^{(2)}$, dan $\bar{y}_{RR}^{(3)}$ tidak sama dengan nol, maka akan dibandingkan *Mean Square Error (MSE)* dari masing-masing penaksir.

3. BIAS DAN MSE PENAKSIR RASIO REGRESI UNTUK RATA-RATA POPULASI

Besar bias dari suatu penaksir dapat diperoleh dengan menentukan nilai ekspektasi dari penaksir tersebut. Pada ketiga penaksir rasio regresi $\bar{y}_{RR}^{(1)}$, $\bar{y}_{RR}^{(2)}$, dan $\bar{y}_{RR}^{(3)}$ diperoleh nilai ekspektasi yang tidak sama dengan parameter \bar{Y} , dan dengan menggunakan pendekatan deret Taylor [4: h. 47] tiga variabel, besar bias dari masing-masing penaksir yang terdapat pada persamaan (1), (2), dan (3) diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} B_{RR}^{(1)} &\approx \frac{1-f}{n} \frac{C_z}{\bar{Z}C_z + \beta_2(z)} \left(\frac{\bar{Y}C_z}{\bar{Z}C_z + \beta_2(z)} S_z^2 - S_{yz} + B_{yx}S_{xz} \right), \\ B_{RR}^{(2)} &\approx \frac{1-f}{n} \frac{\beta_2(z)}{\bar{Z}\beta_2(z) + C_z} (S_{yz} - B_{yx}S_{xz}), \\ B_{RR}^{(3)} &\approx \frac{1-f}{n} \frac{C_z}{\bar{Z}C_z + \beta_2(z)} (S_{yz} - B_{yx}S_{xz}), \end{aligned}$$

dengan $C_z = S_z / \bar{Z}$, dan $B_{yx} = S_{yx} / S_x^2$.

Dapat dilihat bahwa besar bias dari penaksir $\bar{y}_{RR}^{(1)}$, $\bar{y}_{RR}^{(2)}$, dan $\bar{y}_{RR}^{(3)}$ tidak sama dengan nol, sehingga ketiga penaksir tersebut disebut penaksir bias. Ketelitian dari penaksir yang bersifat bias ditinjau berdasarkan *MSE* dari penaksir tersebut. Nilai *MSE* dapat diperoleh dengan menggunakan definisi berikut:

Definisi 1 [1: h. 309] Jika $\hat{\theta}$ adalah penaksir untuk θ , maka *MSE* untuk $\hat{\theta}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$MSE(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2].$$

Berdasarkan Definisi 1, dan menggunakan pendekatan deret Taylor [4: h. 47] tiga variabel, diperoleh *MSE* dari masing-masing penaksir yang terdapat pada persamaan (1), (2), dan persamaan (3), yaitu sebagai berikut:

$$MSE(\bar{y}_{RR}^{(1)}) \approx \frac{1-f}{n} \bar{Y}^2 (C_y^2 - B_{yx}^2 C_y^2 + C_z^2 c_1^2) + 2C_z c_1 C_y (B_{yx} \rho_{xz} - \rho_{yz}),$$

$$MSE(\bar{y}_{RR}^{(2)}) \approx \frac{1-f}{n} \bar{Y}^2 (C_y^2 - \rho_{yx} C_y c_z + C_z c_z) + 2C_y C_z c_z (\rho_{yz} - \rho_{yx} \rho_{xz}),$$

$$MSE(\bar{y}_{RR}^{(3)}) \approx \frac{1-f}{n} \bar{Y}^2 (C_y^2 - \rho_{yx} C_y c_1 + C_z c_1) + 2C_z c_1 C_y (\rho_{yz} - \rho_{yx} \rho_{xz}),$$

dengan

$$C_y = \frac{S_y}{\bar{Y}}, \rho_{yx} = \frac{S_{yx}}{S_y S_x}, \rho_{yz} = \frac{S_{yz}}{S_y S_z}, \text{ dan } \rho_{xz} = \frac{S_{xz}}{S_x S_z}.$$

Setelah bias dan *MSE* dari masing-masing penaksir diketahui, selanjutnya akan ditentukan penaksir rasio regresi yang efisien diantara penaksir $\bar{y}_{RR}^{(1)}$, $\bar{y}_{RR}^{(2)}$, dan $\bar{y}_{RR}^{(3)}$.

4. PENAKSIR RASIO REGRESI YANG EFISIEN UNTUK RATA-RATA POPULASI

Untuk menentukan penaksir yang efisien dari penaksir yang bias, dapat ditentukan dengan cara membandingkan *MSE* dari masing-masing penaksir, dan untuk membandingkan *MSE* tersebut dapat digunakan definisi efisiensi relatif berikut:

Definisi 2 [3: h. 272] Misalkan $\hat{\theta}_1$ dan $\hat{\theta}_2$ adalah penaksir bias untuk θ , selanjutnya misalkan $MSE(\hat{\theta}_1)$ dan $MSE(\hat{\theta}_2)$ adalah *MSE* dari $\hat{\theta}_1$ dan $\hat{\theta}_2$, maka efisiensi relatif $\hat{\theta}_1$ terhadap $\hat{\theta}_2$ dinotasikan dengan $RE(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ dan didefinisikan dengan

$$RE(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{MSE(\hat{\theta}_1)}{MSE(\hat{\theta}_2)}.$$

Berdasarkan Definisi 2, perbandingan *MSE* dari masing-masing penaksir diperoleh sebagai berikut:

- a. Perbandingan *MSE* dari penaksir $\bar{y}_{RR}^{(1)}$ dengan penaksir $\bar{y}_{RR}^{(2)}$

Apabila $\rho_{yx} \rho_{xz} + \frac{C_z (1 - c_z)}{2C_y} > 0$, penaksir $\bar{y}_{RR}^{(1)}$ lebih efisien dari penaksir $\bar{y}_{RR}^{(2)}$ jika

$$\rho_{yz} > \rho_{yx} \rho_{xz} + \frac{C_z (1 - c_z)}{2C_y}. \quad (4)$$

Apabila $\rho_{yx} \rho_{xz} + \frac{C_z (1 - c_z)}{2C_y} < 0$, penaksir $\bar{y}_{RR}^{(1)}$ lebih efisien dari penaksir $\bar{y}_{RR}^{(2)}$ jika

$$\rho_{yz} < \rho_{yx} \rho_{xz} + \frac{C_z (1 - c_z)}{2C_y}.$$

- b. Perbandingan *MSE* dari penaksir $\bar{y}_{RR}^{(1)}$ dengan penaksir $\bar{y}_{RR}^{(3)}$

Penaksir $\bar{y}_{RR}^{(1)}$ lebih efisien dari penaksir $\bar{y}_{RR}^{(3)}$ jika

$$\rho_{yz} > \rho_{yx} \rho_{xz}. \quad (5)$$

c. Perbandingan MSE dari penaksir $\bar{y}_{RR}^{(2)}$ dengan penaksir $\bar{y}_{RR}^{(3)}$

Apabila $\rho_{yx}\rho_{xz} - \frac{C_z(c_1 + c_2)}{2C_y} > 0$, penaksir $\bar{y}_{RR}^{(2)}$ lebih efisien dari penaksir $\bar{y}_{RR}^{(3)}$ jika

$$\rho_{yz} < \rho_{yx}\rho_{xz} - \frac{C_z(c_1 + c_2)}{2C_y}. \quad (6)$$

Apabila $\rho_{yx}\rho_{xz} - \frac{C_z(c_1 + c_2)}{2C_y} < 0$, penaksir $\bar{y}_{RR}^{(2)}$ lebih efisien dari penaksir $\bar{y}_{RR}^{(3)}$ jika

$$\rho_{yz} > \rho_{yx}\rho_{xz} - \frac{C_z(c_1 + c_2)}{2C_y}.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan penaksir yang memenuhi syarat efisiensi dengan menggunakan contoh.

Contoh Diberikan data pada Tabel 1 mengenai faktor-faktor yang mempengaruhi pendapatan produksi industri teralis di kota Pekanbaru. Data tersebut digunakan untuk menaksir rata-rata pendapatan (Y) produksi industri teralis. Untuk meningkatkan ketelitian suatu penaksir digunakan informasi tambahan berupa modal (X) dan unit mesin (Z).

Tabel 1: Faktor-faktor yang Mempengaruhi Pendapatan Produksi Industri Teralis di Kota Pekanbaru pada Tahun 2013

NO	Pendapatan (Y)	Modal (X)	Unit mesin (Z)
1	8.000.000	40.000.000	6
2	5.000.000	16.000.000	6
3	6.000.000	18.000.000	10
4	5.000.000	20.000.000	8
5	6.000.000	30.000.000	5
6	4.000.000	30.000.000	5
7	3.000.000	5.000.000	3
8	4.000.000	10.000.000	5
9	4.500.000	10.000.000	5
10	6.000.000	45.000.000	8
11	5.000.000	34.500.000	6
12	8.000.000	20.000.000	8
13	5.000.000	11.000.000	6
14	10.000.000	40.000.000	8
15	7.000.000	15.000.000	8
16	8.000.000	35.000.000	8
17	5.000.000	30.000.000	6
18	4.000.000	23.000.000	6
19	5.000.000	10.000.000	7

20	5.000.000	15.000.000	6
21	8.000.000	45.000.000	8
22	6.000.000	33.000.000	8
23	3.000.000	15.000.000	5
24	4.000.000	20.000.000	6
25	20000000	40.000.000	10
26	5.000.000	20.000.000	8
27	4.000.000	15.000.000	6
28	4.000.000	18.000.000	6
29	8.000.000	33.000.000	10
30	4.000.000	15.000.000	6
31	6.000.000	30.000.000	10
32	5.500.000	23.000.000	8
33	4.500.000	14.000.000	7
34	4.500.000	28.000.000	8
35	20.000.000	60.000.000	12
36	6.000.000	24.000.000	8
37	5.500.000	20.000.000	7
38	4.000.000	18.000.000	7
39	6.000.000	23.000.000	7
40	5.500.000	19.000.000	7
41	6.500.000	30.850.000	8
42	6.000.000	32.000.000	8
43	8.000.000	40.000.000	10
44	3.500.000	15.000.000	6
45	5.000.000	15.000.000	7
46	8.000.000	21.000.000	8
47	5.000.000	23.000.000	7
48	3.000.000	11.000.000	8
49	3.000.000	13.000.000	6
50	3.000.000	5.000.000	5
51	4.000.000	14.000.000	7
52	6.000.000	30.000.000	8
53	4.500.000	15.000.000	8
54	15.000.000	55.000.000	13
55	5.000.000	30.000.000	8
56	5.000.000	20.000.000	10
57	7.000.000	22.000.000	12
58	8.000.000	35.000.000	12
59	4.000.000	14.000.000	8
60	6.000.000	35.000.000	12

61	20.000.000	40.000.000	15
62	4.500.000	18.000.000	8
63	20.000.000	50.000.000	13
64	7.500.000	25.000.000	6
65	4.000.000	15.000.000	6
66	3.500.000	14.000.000	6
67	4.000.000	16.000.000	8
68	10.000.000	55.000.000	12
69	3.000.000	13.000.000	5
70	5.000.000	23.000.000	8
71	5.000.000	25.000.000	7
72	6.000.000	33.000.000	8
73	7.000.000	30.000.000	8
74	12.000.000	73.000.000	12
75	4.000.000	12.000.000	3
76	6.000.000	21.000.000	6
77	4.500.000	16.000.000	4
78	4.000.000	14.000.000	4
79	5.000.000	25.000.000	6
80	7.000.000	32.000.000	10

Sumber: Sumario (2013)

Data yang diperoleh peneliti Sumario [6: h. 70] merupakan tulisan dan laporan dari berbagai sumber data antara lain kantor Badan Pusat Statistik (BPS) kota Pekanbaru, kantor Dinas Perindustrian dan Perdagangan (DISPERINDAG) kota Pekanbaru dan instansi yang terkait. Besarnya populasi penelitian adalah 80 unit usaha industri teralis yang ada di kota Pekanbaru. Untuk mengambil sampel, teknik pengambilan sampel yang digunakan adalah sampling acak sederhana tanpa pengembalian, dan diambil sampel sebesar 40. Dengan menggunakan data pada Tabel 1 serta bantuan Microsoft Excel diperoleh nilai-nilai pada Tabel 2.

Tabel 2: Nilai-nilai yang diperlukan untuk membandingkan *MSE* dari penaksir

N	80	S_{yx}	$3,576 \times 10^{13}$
n	40	S_{yz}	6.382.120,253
\bar{Y}	6.306.250	S_{xz}	20.805.458,9
\bar{X}	24.954.375	ρ_{yx}	0,733543197
\bar{Z}	7,64556962	ρ_{yz}	0,720582844
S_x	12.971.880,97	ρ_{xz}	0,680553974
S_y	3.758.108	C_y	0,59593

S_z	2,35674	C_z	0,30825
c	0,948044246	C_x	0,51982
c_1	0,762103016	$\beta_2(z)$	0,73567674

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai yang terdapat pada Tabel 2 ke pertidaksamaan (4), (5), dan (6) diperoleh:

1. $MSE_{RR}^{(1)} < MSE_{RR}^{(2)}$ jika $\rho_{yz} > 0,45113$
2. $MSE_{RR}^{(1)} < MSE_{RR}^{(3)}$ jika $\rho_{yz} > 0,49922$
3. $MSE_{RR}^{(3)} < MSE_{RR}^{(2)}$ jika $\rho_{yz} > 0,05693$

Selanjutnya untuk menentukan penaksir yang efisien dapat dilihat dari nilai MSE masing-masing penaksir pada Tabel 3.

Tabel 3: Nilai *Mean Square Error* penaksir

Penaksir	MSE
$\bar{y}_{RR}^{(1)}$	$7,817 \times 10^{10}$
$\bar{y}_{RR}^{(2)}$	$1,6233 \times 10^{11}$
$\bar{y}_{RR}^{(3)}$	$1,39792 \times 10^{11}$

Dari Tabel 3 dapat dilihat bahwa penaksir $\bar{y}_{RR}^{(1)}$ mempunyai MSE yang minimum, dengan demikian penaksir $\bar{y}_{RR}^{(1)}$ merupakan penaksir yang paling efisien dibandingkan penaksir $\bar{y}_{RR}^{(2)}$ dan $\bar{y}_{RR}^{(3)}$, dan diperoleh nilai taksiran untuk rata-rata pendapatan produksi industri teralis di kota Pekanbaru adalah Rp.6.566.705,- per bulan.

5. KESIMPULAN

Setelah diperoleh nilai MSE dari penaksir rasio regresi yang menggunakan koefisien kurtosis dan koefisien variasi untuk rata-rata populasi pada sampling acak sederhana, kemudian membandingkan MSE dari masing-masing penaksir, sehingga dapat disimpulkan bahwa berdasarkan contoh yang diberikan penaksir rasio regresi $\bar{y}_{RR}^{(1)}$ paling efisien dibandingkan dengan penaksir $\bar{y}_{RR}^{(2)}$ dan penaksir $\bar{y}_{RR}^{(3)}$ jika syarat-syarat efisiensi terpenuhi.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bain, L.J. & M. Engelhardt. 1991. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics, Second Edition*. Duxbury Press, California.
- [2] Cochran, W.G. 1977. *Sampling Techniques, Third Edition*. John Wiley & Sons, New York.
- [3] Montgomery, D.C. & G.C. Runger. 1999. *Applied Statistic and Probability for Engineers, Second Edition*. John Wiley & Sons, New York.

- [4] Phillips, G. M. & P. J. Taylor. 1972. *Theory and Application of Numerical Analysis, Second Edition*. Academic Press, New York.
- [5] Singh, H.P., Upadhyaya, L. N. & Premchandra. 2009. An Improved Version of Regression Ratio Estimator With Two Auxiliary Variables in Sample Surveys, *Statistics in Transition*, **10**(1): 85-100.
- [6] Sumario, A.S. 2013. *Analisis Faktor-faktor yang Mempengaruhi Produksi Industri Teralis di Kota Pekanbaru*. Skripsi S1, Jurusan Ilmu Ekonomi, Fakultas Ekonomi, Universitas Riau.