

PENAKSIR PRODUK YANG EFISIEN UNTUK RATA-RATA POPULASI PADA SAMPLING ACAK SEDERHANA MENGGUNAKAN KOEFSIEN VARIASI DAN KOEFISIEN KURTOSIS

Isnaini^{1*}, Arisman Adnan², Rustam Efendi²

¹Mahasiswa Program S1 Matematika

²Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru, 28293, Indonesia

*Isnaini_iis52@yahoo.co.id

ABSTRACT

This article reviews three product estimators for the population mean in simple random sampling. They use the coefficient of variation and coefficient of kurtosis of auxiliary variables. This article is the review of Singh's article [Jour. Ind. Soc. Ag. Statistics 56(3): 267-275]. Those three estimators are biased. Then their Mean Square Error (MSE) are determined. Furthermore, MSE of each estimator is compared to obtain the most efficient estimator. This study shows that the modification of the product estimator is the most efficient estimator if the conditions are met.

Keywords: *coefficient of kurtosis, coefficient of variation, mean square error, product estimator, and simple random sampling.*

ABSTRAK

Artikel ini merupakan review tiga penaksir produk untuk rata-rata populasi pada sampling acak sederhana. Penaksir produk ini menggunakan variabel tambahan yaitu koefisien variasi dan koefisien kurtosis. Artikel ini adalah kajian ulang dari artikel Singh [Jour. Ind. Soc. Ag. Statistics 56(3): 267-275]. Ketiga penaksir merupakan penaksir bias. Lalu, *Mean Square Error (MSE)* dari ketiga estimator ini dicari. Selanjutnya *MSE* dari masing-masing penaksir dibandingkan untuk mendapatkan penaksir yang efisien. Studi ini menunjukkan bahwa modifikasi penaksir produk merupakan penaksir yang paling efisien jika syarat-syaratnya terpenuhi.

Kata Kunci: *koefisien kurtosis, koefisien variasi, mean square error, penaksir produk, Sampling acak sederhana.*

1. PENDAHULUAN

Penaksir produk merupakan suatu metode yang digunakan untuk meningkatkan ketelitian suatu penaksir pada populasi Y , dengan memperhatikan keeratan hubungan antara variabel y dan variabel tambahan x . Penaksir produk sederhana untuk rata-rata populasi dinotasikan dengan $\bar{y}_p$ dan dirumuskan sebagai $\bar{y}_p = \bar{y} \left(\frac{\bar{x}}{\bar{X}} \right)$, dengan $\bar{y}$ dan $\bar{x}$ berturut-turut menyatakan rata-rata sampel Y dan X serta $\bar{X}$ menyatakan rata-rata populasi X . Diasumsikan bahwa y dan x berkorelasi negatif. Tujuan digunakan metode produk ini adalah untuk meningkatkan ketelitian penaksir dengan mengambil hubungan antara Y dan X . Pada artikel ini Singh [3] mengusulkan estimator produk baru menggunakan koefisien variasi dan koefisien kurtosis yang masing-masing dinotasikan dengan $\bar{y}_{us1}$ dan $\bar{y}_{us2}$. Serta memodifikasi penaksir produk dengan transformasi yang dinotasikan dengan T_{pi} . Berdasarkan ide dari Singh [3], penulis mendetailkan bias dan MSE dari masing-masing penaksir, kemudian dibandingkan MSE dari ketiga penaksir untuk memperoleh penaksir produk yang paling efisien. Semakin kecil MSE yang diperoleh maka penaksir semakin efisien.

2. SAMPLING ACAK SEDERHANA

Pengambilan sampel acak sederhana merupakan suatu metode untuk mengambil n unit sampel dari N unit populasi, sehingga setiap unit populasi memiliki kesempatan yang sama untuk dipilih sebagai unit sampel. Pengambilan sampel ini dilakukan tanpa pengembalian [2]. Banyaknya sampel yang terbentuk dari penarikan sampel acak sederhana tanpa pengembalian adalah C_n^N sampel yang berbeda dengan memiliki kesempatan yang sama untuk terpilih. Probabilitas terpilihnya anggota n dari N unit populasi sebagai unit sampel pada penarikan pertama yaitu n/N , probabilitas pada penarikan kedua adalah $(n-1)/(N-1)$ sampai probabilitas pada penarikan ke- n yaitu $1/(N-n+1)$ maka probabilitas seluruh n unit tertentu yang terpilih dalam n penarikan adalah $1/C_n^N$ [2].

Untuk menentukan bias dan MSE pada sampling acak sederhana digunakan teorema variansi dan kovariansi.

Teorema 1 [2: h.27] Apabila sampel berukuran n diambil dari populasi berukuran N yang berkarakter Y , dengan sampling acak sederhana tanpa pengembalian maka variansi rata-rata sampel $\bar{y}$ dinotasikan dengan $V(\bar{y})$ yaitu

$$V(\bar{y}) = \frac{S_y^2}{n} \frac{N-n}{N} = \frac{(1-f)}{n} S_y^2.$$

Bukti dari teorema ini dapat dilihat pada [2: h.27].

Teorema 2 [2: h.29] Jika y_i, x_i adalah sebuah pasangan yang bervariasi dalam unit dalam populasi dan $\bar{y}, \bar{x}$ adalah rata-rata dari sampel acak sederhana berukuran n ,

maka kovariansi adalah

$$Cov(\bar{y}, \bar{x}) = \frac{1-f}{n} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{X}).$$

Bukti dari teorema ini dapat dilihat pada [2 :h.29].

3. PENAKSIR PRODUK UNTUK RATA-RATA POPULASI PADA SAMPLING ACAK SEDERHANA

Terdapat tiga penaksir produk untuk rata-rata populasi pada sampling acak sederhana dalam pembahasan ini dengan menggunakan beberapa informasi tambahan yaitu koefisien variasi dan koefisien kurtosis, serta modifikasi penaksir produk dengan transformasi.

Penaksir produk untuk rata-rata populasi pada sampling acak sederhana menggunakan koefisien variasi C_x dan koefisien kurtosis $\beta_2(x)$ dirumuskan sebagai

$$\bar{y}_{us1} = \bar{y} \left[\frac{\beta_2(x)\bar{x} + C_x}{\beta_2(x)\bar{X} + C_x} \right]. \quad (1)$$

$$\bar{y}_{us2} = \bar{y} \left[\frac{C_x\bar{x} + \beta_2(x)}{C_x\bar{X} + \beta_2(x)} \right]. \quad (2)$$

Modifikasi penaksir produk dengan transformasi dirumuskan sebagai berikut

$$\bar{y}_{tpi} = \bar{y} \left[\frac{\alpha_i\bar{x} + \sigma_x}{\alpha_i\bar{X} + \sigma_x} \right]. \quad (3)$$

Bias dan MSE penaksir produk untuk rata-rata populasi menggunakan koefisien variasi dan koefisien kurtosis pada sampling acak sederhana yaitu

Bias dan MSE dari persamaan (1) diperoleh

$$B(\bar{y}_{us1}) \approx \frac{(1-f)}{n} \bar{Y} Q \rho_{yx} C_y C_x,$$

dan

$$MSE(\bar{y}_{us1}) \approx \frac{(1-f)}{n} \bar{Y}^2 [C_y^2 + Q^2 C_x^2 + 2Q \rho_{yx} C_y C_x] \quad (4)$$

dengan

$$Q = \frac{\beta_2(x)\bar{x}}{\beta_2(x)\bar{X} + C_x}.$$

Bias dan MSE dari persamaan (2) diperoleh

$$B(\bar{y}_{us2}) \approx \frac{(1-f)}{n} \bar{Y} R \rho_{yx} C_y C_x,$$

dan

$$MSE(\bar{y}_{us2}) \approx \frac{(1-f)}{n} \bar{Y}^2 [C_y^2 + R^2 C_x^2 + 2R\rho_{yx} C_y C_x] \quad (5)$$

dengan

$$R = \frac{C_x \bar{X}}{C_x \bar{X} + \beta_2(x)}.$$

Bias dan MSE dari persamaan (3) diperoleh

$$B(\bar{y}_{tpi}) \approx \frac{(1-f)}{n} \bar{Y} \varphi_i \rho_{yx} C_y C_x,$$

dan

$$MSE(\bar{y}_{tpi}) \approx \frac{(1-f)}{n} \bar{Y}^2 [C_y^2 + \varphi_i^2 C_x^2 + 2\varphi_i \rho_{yx} C_y C_x] \quad (6)$$

dengan

$$\varphi_1 = \frac{\bar{X}}{\bar{X} + \sigma_x}, \varphi_2 = \frac{\beta_1(x)\bar{X}}{\beta_1(x)\bar{X} + \sigma_x}, \varphi_3 = \frac{\beta_2(x)\bar{X}}{\beta_2(x)\bar{X} + \sigma_x}.$$

4. PENAKSIR PRODUK YANG EFISIEN

Untuk menentukan penaksir yang efisien dari penaksir produk, dapat ditentukan dengan cara membandingkan MSE dari masing-masing penaksir, semakin kecil MSE yang diperoleh maka penaksir tersebut akan semakin efisien.

Untuk melihat penaksir yang efisien dari ketiga penaksir yang diajukan dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Perbandingan antara $MSE(\bar{y}_{tpi})$ pada persamaan (6) dengan $MSE(\bar{y}_{us1})$ pada persamaan (4) diperoleh

$$MSE(\bar{y}_{tpi}) < MSE(\bar{y}_{us1})$$

jika

$$C_x > -\frac{2\rho_{yx} C_y}{\varphi_i + Q}. \quad (7)$$

2. Perbandingan antara $MSE(T_{pi})$ pada persamaan (6) dengan $MSE(\bar{y}_{us2})$ pada persamaan (5) diperoleh

$$MSE(T_{pi}) < MSE(\bar{y}_{us2})$$

jika

$$C_x > -\frac{2\rho_{yx} C_y}{\varphi_i + R}. \quad (8)$$

3. Perbandingan antara $MSE(\bar{y}_{us1})$ pada persamaan (4) dengan $MSE(\bar{y}_{us2})$ pada persamaan (5) diperoleh

$$MSE(\bar{y}_{us1}) < MSE(\bar{y}_{us2})$$

jika

$$C_x > -\frac{2\rho_{yx}C_y}{\phi + R} \quad (9)$$

5. CONTOH

Contoh berikut ini merupakan data jumlah kelahiran dan jumlah pengguna alat kontrasepsi dengan cara sterilisasi wanita yang ada diseluruh provinsi di Indonesia tahun 2012 [1]. Data jumlah kelahiran (Y) merupakan variabel yang akan ditaksir dengan memanfaatkan variabel tambahan yaitu jumlah pengguna alat kontrasepsi dengan cara sterilisasi wanita (X) diberikan pada tabel berikut.

Tabel 1: Jumlah kelahiran dan jumlah pengguna alat kontrasepsi dengan cara Sterilisasi wanita yang ada di indonesia tahun2012

No	Nama Provinsi	Jumlah kelahiran	Jumlah pengguna alat kontrasepsi
1	Aceh	2,8	0,8
2	Sumatera Utara	3,0	6,4
3	Sumatera Barat	2,8	3,0
4	Riau	2,9	3,6
5	Jambi	2,3	0,9
6	Sumatera Selatan	2,8	2,6
7	Bengkulu	2,2	2,6
8	Lampung	2,7	1,0
9	Bangka Belitung	2,6	2,0
10	Kepulauan Riau	2,6	3,1
11	DKI Jakarta	2,3	3,6
12	Jawa Barat	2,5	3,1
13	Jawa Tengah	2,5	4,7
14	DI Yogyakarta	2,1	3,7
15	JawaTimur	2,3	3,5
16	Banten	2,5	2,3
17	Bali	2,3	5,6
18	Nusa Tenggara Barat	2,8	1,4
19	Nusa Tenggara Timur	3,3	4,5
20	Kalimantan Barat	3,1	1,6
21	Kalimantan Tengah	2,8	1,1
22	Kalimantan Selatan	2,5	1,1

No	NamaProvinsi	Jumlah kelahiran	Jumlah pengguna alat kontrasepsi
23	Kalimantan Timur	2,8	2,7
24	Sulawesi Utara	2,6	2,4
25	Sulawesi Tengah	3,2	2,1
26	Sulawesi Selatan	2,6	1,5
27	Sulawesi Tenggara	3,0	1,5
28	Gorontalo	2,6	2,3
29	Sulawesi Barat	3,6	1,3
30	Maluku	3,2	1,8
31	Maluku utara	3,1	1,9
32	Papua Barat	3,7	4,0
33	Papua	3,5	1,8

Sumber [1]

Berdasarkan data pada Tabel 1, akan ditentukan penaksir produk yang efisien untuk menaksir rata-rata jumlah kelahiran diseluruh provinsi yang ada di Indonesia dengan menggunakan syarat penaksir lebih efisien yang diperoleh sebelumnya. Sebagai informasi tambahan untuk menaksir rata-rata jumlah kelahiran diperlukan informasi jumlah pengguna alat kontrasepsi. Untuk menghitung *MSE* dari masing-masing penaksir terlebih dahulu ditentukan nilai yang dibutuhkan. Informasi yang diperoleh dari data jumlah kelahiran dan jumlah pengguna alat kontrasepsi dengan menggunakan Microsoft Excel seperti pada tabel berikut,

Tabel 2: Nilai-nilai yang diperoleh berdasarkan data jumlah Kelahiran dan jumlah pengguna alat kontrasepsi

Nilai	Hasil	Nilai	Hasil
N	33	σ_x	1,3744
n	6	Q	0,7726
$\bar{Y}$	2,7757	R	0,6639
$\bar{X}$	2,5909	$\beta_1(x)$	0,9714
C_y	0,1449	$\beta_2(x)$	0,6958
C_x	0,5305	φ_1	0,6534
ρ_{yx}	-0,1072	φ_2	0,6468
f	0,1818	φ_3	0,5674

Dengan menggunakan informasi dari data diatas, diperoleh bahwa

$$(i) \quad MSE(\bar{y}_{tpi}) < MSE(\bar{y}_{us1}) \text{ jika } C_x > -\frac{2\rho_{yx}C_y}{\varphi_i + Q},$$

Berdasarkan nilai-nilai yang diperoleh maka substitusikan nilai φ_i , dengan $i=1,2,3$,
kepersamaan (7), sehingga

untuk $\varphi_1 = 0,6534$, diperoleh $C_x > -0,0218$,

untuk $\varphi_2 = 0,6468$, diperoleh $C_x > -0,0219$,

untuk $\varphi_3 = 0,5674$, diperoleh $C_x > -0,0232$.

$$(ii) \quad MSE(\bar{y}_{tpi}) < MSE(\bar{y}_{us2}) \text{ jika } C_x > -\frac{2\rho_{yx}C_y}{\varphi_i + R},$$

Berdasarkan nilai-nilai yang diperoleh maka substitusikan nilai φ_i , dengan $i=1,2,3$,
kepersamaan (8), sehingga

untuk $\varphi_1 = 0,6534$, diperoleh $C_x > -0,0236$,

untuk $\varphi_2 = 0,6468$, diperoleh $C_x > -0,0237$,

untuk $\varphi_3 = 0,5674$, diperoleh $C_x > -0,0252$.

$$(iii) \quad MSE(\bar{y}_{us1}) < MSE(\bar{y}_{us2}) \text{ jika } C_x > -\frac{2\rho_{yx}C_y}{Q + R},$$

Berdasarkan nilai-nilai yang diperoleh maka ambil nilai Q dan R , kemudian
substitusikan nilai tersebut kepersamaan (9) sehingga diperoleh $C_x > -0,0216$.

Selanjutnya nilai MSE dari masing-masing penaksir diberikan pada tabel berikut.

Tabel 3 :Nilai MSE untuk masing-masing Penaksir

Penaksir Produk	MSE
$\bar{y}_{us1}$	0,1408
$\bar{y}_{us2}$	0,1851
$\bar{y}_{tp1}$	0,1149
$\bar{y}_{tp2}$	0,1345
$\bar{y}_{tp3}$	0,1074

Berdasarkan Tabel 3 dapat dilihat bahwa $MSE(\bar{y}_{tpi})$ yaitu dengan $i=1, 2, 3$, merupakan MSE yang minimum, sehingga dapat dikatakan bahwa penaksir $\bar{y}_{tpi}$ lebih efisien dari penaksir $\bar{y}_{us1}$ dan penaksir $\bar{y}_{us2}$.

6. KESIMPULAN

Setelah diperoleh nilai MSE dari masing-masing penaksir produk untuk rata-rata populasi yang diajukan pada sampling acak sederhana. Kemudian membandingkan MSE dari masing-masing penaksir, sehingga berdasarkan (i) penaksir $\bar{y}_{tpi}$ lebih efisien dari penaksir $\bar{y}_{us1}$, berdasarkan (ii) penaksir $\bar{y}_{tpi}$ lebih efisien dari penaksir $\bar{y}_{us2}$, berdasarkan (iii) penaksir $\bar{y}_{us1}$ lebih efisien dari penaksir $\bar{y}_{us2}$. Dapat disimpulkan bahwa penaksir $\bar{y}_{tpi}$ merupakan penaksir yang paling efisien dari penaksir lainnya jika syarat efisien terpenuhi.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Badan Kependudukan dan Keluarga Berencana Nasional. Tabel Angka Fertilitas dan Pemakaian Kontrasepsi. Availabe from: <http://www.bkkbn.go.id/litbang/pusdu/Hasi%20Penelitian/SKDI%202012/Laoran%20Pendahuluan%20SKDI%202012.pdf>. Diakses pada 1 September 2013. Pukul 19.10 WIB.
- [2] Cochran, W.G. 1991. *Teknik Penarikan Sampel, Edisi Ketiga*. Terj. Dari *Sampling Techniques*, oleh Rudiansyah & E.R Osman. UI Press, Jakarta.
- [3] Singh. G.N. 2003. On the Improvement of Product Method of Estimation in Sample Survey. *Jour.Ind.Soc.Ag.Statistics* 56(3) : 267 – 275.