MATRIKS REFLEKSIF TERGENERALISASI

Hendra Maryulis[1*], Sri Gemawati[2], Asli Sirait[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

[*] hendramaryulis08@gmail.com

ABSTRACT

In this article we discusses a generalized reflexive matrix A that has a relation

$$A = PAQ \text{ and } A = -PAQ, \qquad A \in C^{n\times m},$$

where $P \in C^{n\times n}$, and $Q \in C^{m\times m}$ are two generalized reflection matrices. The discussion was continued by discussing the properties of generalized reflexive matrix, namely orthogonal-L, orthogonal-R and the linear least squares problems whose coefficient matrix is of the form a generalized reflexive matrix.

Keywords: *generalized inverse matrices, generalized reflection matrices, orthogonal-L, orthogal-R, linear least squares problems*

ABSTRAK

Artikel ini mendiskusikan matriks refleksif tergeneralisasi yaitu matriks A yang memiliki hubungan

$$A = PAQ \text{ dan } A = -PAQ,$$

dengan $A \in C^{n\times m}$, dan $P \in C^{n\times n}$, $Q \in C^{m\times m}$ adalah dua matriks refleksi tergeneralisasi. Pembahasan dilanjutkan dengan mendiskusikan dan sifat-sifat matriks refleksif tergeneralisasi, yaitu Ortogonal-L, orthogonal-R dan persoalan kuadrat terkecil linear yang koefisiennya berbentuk matriks refleksif tergeneralisasi.

Kata kunci: *generalisasi invers matriks, matriks refleksif tergeneralisasi, ortogonal-L, ortogonal-R, persoalan kuadrat terkecil linear*

1. PENDAHULUAN

Matriks adalah himpunan bilangan-bilangan yang disusun secara empat persegi panjang menurut baris dan kolom. Matriks memiliki banyak jenis ada matriks bujursangkar, matriks idenitas, matriks ortogonal, matriks refleksif dan matriks antirefleksif. Dalam pembahasan ini ada yang disebut dengan matriks refleksif tergeneralisasi dan matriks antirefleksif tergeneralisasi. Matriks A dikatakan matriks refleksif tergeneralisasi dan antirefleksif tergeneralisasi yang memiliki hubungan

$$A = PAQ \text{ dan } A = -PAQ, \ A \in C^{n\times m},$$

dimana P berukuran $n \times n$ dan Q berukuran $m \times m$ adalah dua matriks refleksi tergeneralisasi.

Selanjutnya untuk dapat mengetahui sifat-sifat dari matriks refleksif tergeneralisasi, yaitu dengan subruang refleksif tergeneralisasi, orthogonal-L, orthogonal-R dan persoalan kuadrat terkecil linear sebagaimana yang dijelaskan pada bagian ketiga, dimana pada persoalan kuadrat terkecil linear akan diberikan sebuah contoh matriks yang koefisienya refleksif tergeneralisasi sebagai mana terdapat di [2]. Dalam penulisan ini akan digunakan simbol t, *, ortogonal-L dan ortogonal-R masing-masing untuk menyatakan transpos, transpos konjugat, ortogonal kiri dan ortogonal kanan.

Pada artikel ini dibagian dua dibahas mengenai definisi *generalized* invers matriks dan matriks refleksi tergeneralisasi, kemudian dilanjutkan dibagian tiga tentang sifat-sifat matriks refleksif tergeneralisasi yang merupakan review dari jurnal "*Generalized Reflexive Matrices: Special Properties and Applications"* oleh Hsin-Chu Chen [2]. Terakhir dibagian keempat berupa kesimpulan.

2. MATRIKS REFLEKSIF DAN ANTIREFLEKSIF TERGENERALISASI

Sebelum membahas sifat-sifat matriks refleksif tergeneralisasi, terlebih dahulu dibahas mengenai definisi dari *generalized* invers matriks, matriks refleksi tergeneralisasi orthogonal-L dan orthogonal-R yang banyak digunakan dalam menyelesaikan permasalahan pada bagian ketiga.

Definisi 1 (*generalized* invers matriks) [1, h. 336]

Misalkan A adalah matriks di $C^{n\times m}$. A^+ dikatakan *generalized* invers matriks dari A jika A^+ memenuhi satu atau lebih dari persamaan *Penrose* berikut.

1. $AA^+A = A$
2. $A^+AA^+ = A^+$
3. $(AA^+)^t = AA^+$
4. $(A^+A)^t = A^+A.$

Suatu matriks A^+ dikatakan *generalized* invers matriks *Moore-Penrose* dari matriks A jika dan hanya jika memenuhi keempat sifat pada Definisi 1.

Definisi 2 (matriks refleksi tergeneralisasi) [2]

Sebuah matriks P dikatakan matriks refleksi tergeneralisasi jika P memenuhi syarat-syarat sebagai berikut.

$$P = P^*$$
$$P^2 = I.$$

Definisi 3 ((*P*,*Q*) dua pasangan matriks refleksi tergeneralisasi) [2]

Misalkan P matriks refleksi tergeneralisasi berukuran $n\times n$ dan Q matriks refleksi tergeneralisasi berukuran $m\times m$. Maka

1. Suatu matriks $A \in C^{n\times m}$ dikatakan refleksif tergeneralisasi terhadap pasangan matriks (P,Q) jika $A = PAQ$ dan matriks A dikatakan antirefleksif tergeneralisasi terhadap matriks (P,Q) jika $A = -PAQ.$
2. Suatu subruang $S \subset C^{n\times m}$ dikatakan subruang refleksif tergeneralisasi terhadap pasangan matriks (P,Q) jika $A = PAQ$ dan subruang $S \subset C^{n\times m}$ dikatakan subruang antirefleksif tergeneralisasi terhadap pasangan matriks (P,Q) jika $A = -PAQ$ untuk setiap $A \in S.$
3. Suatu matriks A dikatakan mempunyai sifat umum SAS (simmetri dan anti-simmmetri) jika A adalah matriks refleksif tergeneralisasi dan matriks A dikatakan mempunyai sifat umum anti SAS jika A adalah matriks antirefleksif tergeneralisasi.

Definisi 4 (orthogonal-L dan orthogonal-R) [2]

Suatu mariks $X \in C^{n\times m}$ dikatakan orthogonal-L terhadap matriks lain $Y \in C^{n\times m}$ jika $X^*Y = 0$ dan matriks $X \in C^{n\times m}$ dikatakan orthogonal-R terhadap $Y \in C^{n\times m}$ jika $YX^* = 0$, demikian pula sebuah subruang S_1 pada $C^{n\times m}$ dikatakan orthogonal-L terhadap subruang lain S_2 pada $C^{n\times m}$ jika $X^*Y = 0$ dan subruang S_1 untuk $C^{n\times m}$ dikatakan orthogonal-R terhadap subruang lain S_2 jika $YX^* = 0$ untuk sebarang $X \in S_1$ dan $Y \in S_2$.

3. SIFAT-SIFAT MATRIKS REFLEKSIF TERGENERALISASI

Teorema 5

Misalkan P berukuran $n\times n$ dan Q berukuran $m\times m$ adalah dua matriks refleksi tergeneralisasi dan, $\alpha \in C$ dan $\beta \in C.$

1. Jika A dan B berada dalam $C_r^{m\times n}(Q,P),$ maka
$$(\alpha A^+ + \beta B^+) \in C_r^{m\times n}(Q,P),$$
$$(\alpha A^* + \beta B^*) \in C_r^{m\times n}(Q,P),$$
$$A^*B \in C_r^{m\times m}(Q) \text{ dan } AB^* \in C_r^{n\times n}(P).$$
2. Jika A dan B berada dalam $C_a^{m\times n}(Q,P),$ maka
$$(\alpha A^+ + \beta B^+) \in C_a^{m\times n}(Q,P),$$
$$(\alpha A^* + \beta B^*) \in C_a^{m\times n}(Q,P),$$
$$A^*B \in C_r^{m\times m}(Q) \text{ dan } AB^* \in C_r^{n\times n}(P).$$
3. Jika A berada didalam $C_r^{m\times n}(Q,P),$ dan B anggota $C_a^{m\times n}(Q,P),$ maka
$$(\alpha A^*A + \beta B^*B) \in C_r^{m\times m}(Q),$$
$$(\alpha AA^* + \beta BB^*) \in C_r^{n\times n}(P),$$
$$A^*B \in C_a^{m\times m}(Q) \text{ dan } AB^* \in C_a^{n\times n}(P).$$

Bukti: Untuk membuktikan bagian pertama, akan dibuktikan bahwa A^+ dan B^+ keduanya berada di $C_r^{m\times n}(Q,P),$ sebagai berikut

$$AA^+A = A. \tag{1}$$

Substitusikan A=PAQ pada persamaan (1), diperoleh

$$PAQ\ A^+PAQ = PAQ, \tag{2}$$

karena A^+ adalah *generalized* invers dari A. Kemudian kalikan P^{-1} dan Q^{-1} kedua ruas pada persamaan (2), sehingga diperoleh

$$A\,QA^+P\,A = A$$

$$A\,Y\,A = A, \tag{3}$$

dimana $Y = Q\,A^+P,$ kemudian tunjukan juga Y memenuhi syarat persamaan *Penrose* pada Definisi 1, kondisi 1.

$$AA^+A = A.$$

Dari persamaan (3) telah diperolah bahwa $Y = Q\,A^+P$ maka akan ditunjukkan $Y = A^+$ sebagai berikut

$$A\,Y\,A = A$$

$$P\,A\ A^+\ AQ = P\,AQ. \tag{4}$$

kemudian kalikan P^{-1} dan Q^{-1} kedua ruas pada persamaan (4), maka diperoleh

$$P^{-1}P\,AA^+AQ\ Q^{-1} = P^{-1}\,P\,AQQ^{-1}$$

$$A\ A^+\ A = A,$$

karena Y juga generalisasi invers dari A. Sehingga $A^+ = Y$, diperoleh

$$A^+ = QA^+P \in C_r^{m\times n}(Q,P). \tag{5}$$

Dengan demikian juga,

$$B^+ = QB^+P \in C_r^{m\times n}(Q,P). \tag{6}$$

Dengan mengalikan persamaan (5) dan (6), masing-masing dengan α dan β, dengan penjumlahan diperoleh

$$(\alpha A^+ + \beta B^+) \in C_r^{m\times n}(Q,P)\,.$$

Bukti untuk bagian 2 dan 3 dapat diperoleh dengan cara yang sama. ■

Teorema 6

Diberikan matriks *P* berdimensi $n \times n$ dan *Q* berdimensi $m \times m$ merupakan dua matriks refleksi tergeneralisasi untuk sembarang matriks $A \in C^{n\times m}$ dapat diuraikan menjadi dua bagian *U* dan *V*, $U + V = A$ sedemikian hingga $U \in C_r^{n\times m}(P,Q)$ dan $V \in C_a^{n\times m}(P,Q)$.

Bukti: Pilih $U = \frac{1}{2}(A + PAQ)$ dan $V = \frac{1}{2}(A - PAQ)$ maka dapat diperoleh

$$
\begin{aligned}
U + V &= \frac{1}{2}(A + PAQ) + \frac{1}{2}(A - PAQ) \\
&= (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}PAQ) + (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}PAQ) \\
&= \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}PAQ + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}PAQ \\
&= \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}PAQ - \frac{1}{2}PAQ \\
&= \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A \\
&= A. \blacksquare
\end{aligned}
$$

Teorema 7

$C_r^{n\times m}(P,Q)$ adalah subruang refleksi tergeneralisasi dan $C_a^{n\times m}(P,Q)$ adalah subruang antirefleksi tergeneralisasi di $C^{n\times m}$, terhadap (*P*,*Q*) pada lapangan di *C*. Selanjutnya $C_r^{n\times m}(P,I)$ adalah ortogonal-L refleksif terhadap $C_a^{n\times m}(P,I)$ dan $C_r^{n\times m}(I,Q)$ adalah ortogonal-R refleksif terhdap $C_a^{n\times m}(I,Q)$ dimana *I* adalah matriks identitas.

Bukti: $C_r^{n\times m}(P,Q)$ dan $C_a^{n\times m}(P,Q)$ adalah subruang. Maka $C_r^{n\times m}(P,Q)$ merupakan subhimpunan tak-kosong pada $C^{n\times m}$.

Misalkan *X* dan *Y* adalah dua elemen di $C_r^{n\times m}(P,Q)$ dan $\alpha \in C$, akan ditunjukkan sebagai berikut

$$(\alpha X + Y) = P(\alpha X + Y)Q.$$

Karena $C_r^{n\times m}(P,Q)$ adalah subruang, oleh karena itu dari Definisi 3, pada kondisi 1 dan 2, bahwa $C_r^{n\times m}(P,Q)$ merupakan subruang refleksif tergeneralisasi pada $C^{n\times m}$ terhadap (*P*,*Q*) pada lapangan di *C*.

$C_r^{n\times m}(P,I)$ dan $C_a^{n\times m}(P,I)$ saling ortogonal-L. Untuk sebarang $X \in C_r^{n\times m}(P,I)$ dan sebarang $Y \in C_a^{n\times m}(P,I)$ diperoleh

$$X^*Y = (P\,X\,I)^*\,(-P\,Y\,I) = -X^*Y = 0$$
$$Y^*X = (X^*Y)^* = 0.$$

Maka, $C_r^{n\times m}(P,I)$ dan $C_a^{n\times m}(P,I)$ saling ortogonal-L.

Demikian juga untuk $C_r^{n\times m}(I,Q)$ dan $C_a^{n\times m}(I,Q)$ saling ortogonal-R. Untuk sebarang $X \in C_r^{n\times m}(I,Q)$ dan sebarang $Y \in C_a^{n\times m}(I,Q)$ diperoleh

$$Y\,X^* = (-I\,Y\,Q)\,(I\,X\,Q)^* = -Y\,X^* = 0,$$
$$X\,Y^* = (Y\,X^*)^* = 0.$$

Sehingga , $C_r^{n\times m}(I,Q)$ dan $C_a^{n\times m}(I,Q)$ saling ortogonal-R. ■

Teorema 8

Diberikan sebuah persoalan kuadrat terkecil linear

$$\min_x \|Ax-b\|_2, \quad A \in C^{n\times m}, \quad x \in C^m, \quad b \in C^n, \quad m \le n,$$

dimana A diasumsikan memiliki rank kolom penuh, yakni, $rank(A) = m$, misalkan $\tilde{x}$ adalah solusi tunggal untuk persoalan kudrat terkecil linear dan $\tilde{r} = b - A\tilde{x}$, adalah residunya.

1. Jika $A \in C_r^{n\times m}(P,Q)$, maka

$$\tilde{x} \in C_r^m(Q) \text{ dan } \tilde{r} \in C_r^n(P) \text{ jika } b \in C_r^n(P),$$
$$\tilde{x} \in C_a^m(Q) \text{ dan } \tilde{r} \in C_a^n(P) \text{ jika } b \in C_a^n(P).$$

2. Jika $A \in C_a^{n\times m}(P,Q)$, maka

$$\tilde{x} \in C_r^m(Q) \text{ dan } \tilde{r} \in C_a^n(P) \text{ jika } b \in C_a^n(P),$$
$$\tilde{x} \in C_a^m(Q) \text{ dan } \tilde{r} \in C_r^n(P) \text{ jika } b \in C_r^n(P).$$

Bukti: Bukti untuk bagian 2 sejalan dengan bagian 1, maka akan dibuktikan bagian yang pertama sebagai berikut.

Diketahui bahwa $A \in C_r^{n\times m}(P,Q)$, maka diperoleh $A = PAQ$, dengan P dan Q merupakan matriks refleksif tergeneralisasi dengan demikian diperoleh

$$P = P^* = P^{-1} \text{ dan } Q = Q^* = Q^{-1},$$

karena $rank(A) = m$, A^+ dapat ditentukan sebagai berikut

$$\begin{aligned} A^+ &= (A^*A)^{-1}A^* \\ &= (QA^*PPAQ)^{-1}QA^*P \\ &= Q(A^*A)^{-1}A^*P \\ &= QA^+P. \end{aligned}$$

Dapat disimpulkan bahwa jika $b = Pb$, diperoleh

$$\tilde{x} = A^+b = QA^+Pb = QA^+b = Q\tilde{x}.$$

Sehingga untuk

$$\tilde{r} = b - A\tilde{x} = Pb - PAQ\,Q\tilde{x} = P(b - A\tilde{x}) = P\tilde{r}.$$

Dengan cara yang sama untuk proses ke- 2, jika $b = -Pb$, maka

$$\tilde{x} = A^{+}b = QA^{+}Pb = -QA^{+}b = -Q\tilde{x}.$$

Sehingga untuk

$$\tilde{r} = b - A\tilde{x} = -Pb - PAQ(-Q\tilde{x}) = -P(b - A\tilde{x}) = -P\tilde{r}.$$

Ini melengkapi bukti untuk proses yang ke 2. ■

4. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa untuk menentukan matriks refleksif tergeneralisasi dapat ditentukan dengan keempat sifat-sifat matriks refleksif tergeneralisasi mempunyai hubungan yaitu :

$$A = PAQ \text{ dan } A = -PAQ, \quad A \in C^{n \times m},$$

dimana P dan Q adalah dua matriks refleksi tergeneralisasi. Peranan dari matriks P dan Q adalah untuk menentukan matriks A yang merupakan sebuah matriks refleksif tergeneralisasi, tanpa mengesampingkan keempat sifat tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Budhi, W. S. 1995. *Aljabar Linear*. Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.

[2] Hsin-Chu Chen. 1998. *Generalized reflexive matrices: special properties and applications. SIAM J. Matriks Anal. Appl.* **19** (1):140-153.

[3] Leon, S. J. 2001 . *Aljabar Linear dan Aplikasinya : Edisi Kelima*. Erlangga, Jakarta.

[4] Jacob, B. 1990. *Linear Algebra.* W. H. Freeman and Company, New York.