METODE CHEBYSHEV-HALLEY BEBAS TURUNAN KEDUA UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NONLINEAR

Ridho Alfarisy[1*]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*ridhoalfarisy2010@gmail.com

ABSTRACT

This article discusses the Chebyshev-Halley method free from second derivative with one parameter, which is a modification of Chebyshev-Halley method with third order convergence. This method has a convergence of sixth order if the value of the parameter is one and of fifth order if the value of the parameter is other than one. For each iteration of this method, four function evaluations are needed, so that the efficiency index for the parameter is $6^{\frac{1}{4}} = 1.565$. Furthermore, the computational test shows that the discussed method is better than Newton method, Chebyshev method, Halley method, and Super Halley method in terms of the error produced in obtaining the estimated root.

Keywords: *Chebyshev-Halley method, Newton method, nonlinear equation, order of convergence.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas metode Chebyshev-Halley bebas turunan kedua dengan satu parameter yang dimodifikasi dari metode Chebyshev-Halley dengan kekonvergenan orde tiga. Metode ini memiliki kekonvergenan orde enam jika nilai parameter diambil satu dan berorde lima jika nilai parameter diambil selain satu. Pada metode ini, evaluasi fungsi sebanyak empat kali dilakukan untuk setiap iterasinya, sehingga indeks efisiensi untuk parameter yang bernilai satu adalah $6^{\frac{1}{4}} = 1.565$. Selanjutnya dari uji komputasi terlihat bahwa metode yang didiskusikan lebih baik dari pada metode Newton, metode Chebyshev, metode Halley, dan metode Super Halley jika dilihat dari kesalahan metode dalam mendapatkan akar pendekatan.

Kata kunci: *metode Chebyshev-Halley, metode Newton, persamaan nonlinear, orde konvergensi.*

1. PENDAHULUAN

Persoalan matematika yang sering muncul adalah bagaimana menyelesaikan persamaan nonlinear dengan bentuk

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Metode analitik tidak dapat menyelesaikan semua kasus dari persamaan (1), sehingga metode numerik menjadi alternatif. Metode numerik yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan (1) adalah metode Newton dengan bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f'(x_n) \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{2}$$

yang memiliki kekonvergenan orde dua [1, h. 68-69]. Selain metode Newton, ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan (1), diantaranya metode Chebyshev [7, h.88], metode Halley [7, h.86] dan metode Super Halley [4].

Pada artikel ini di bagian dua dibahas metode Chebyshev-Halley bebas turunan kedua dengan satu parameter, dimodifikasi dari metode Chebyshev-Halley dengan kekonvergenan orde tiga [3] yang bentuk iterasinya diberikan oleh

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{L_f(x_n)}{1 - \alpha L_f(x_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{3}$$

dengan $L_f(x_n) = \frac{f''(x_n)f(x_n)}{(f'(x_n))^2}$. Pembahasan ini terdapat pada artikel yang ditulis oleh Dingfang Li, Ping Liu dan Jisheng Kou [2] dengan judul *"An Improvement of Chebyshev-Halley Methods Free from Second Derivative"*. Kemudian dilanjutkan di bagian tiga membuktikan analisa kekonvergenan dan di bagian empat melakukan uji komputasi.

2. METODE CHEBYSHEV-HALLEY BEBAS TURUNAN KEDUA UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NONLINEAR

Pada bagian ini disajikan beberapa definisi dasar untuk pembahasan selanjutnya, kemudian dilanjutkan dengan proses terbentuknya metode iterasi baru.

Definisi 1 (Orde Konvergensi) [5]
Misalkan barisan bilangan real $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergen ke x^* dan nyatakan $e_n = x_n - x^*$ untuk $n \geq 0$. Jika terdapat konstanta positif $p > 0$, sehingga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} = C \neq 0,$$

maka barisan tersebut dikatakan konvergen ke x^* dengan orde konvergensi p. Konstanta C disebut konstanta kesalahan asimtotik (*asymptotic error constant*).

Definisi 2 (Persamaan Tingkat Kesalahan) [5]
Apabila notasi $e_n = x_n - x^*$ merupakan notasi untuk nilai tingkat kesalahan pada iterasi ke-n, maka

$$e_{n+1} = Ce_n^p + O(e_n^{p+1})$$

disebut sebagai persamaan tingkat kesalahan, dengan nilai p adalah orde konvergensinya.

Secara komputasi, orde konvergensi dapat dihitung dengan menggunakan definisi dari *COC* (*Computational Order of Convergence*).

Definisi 3 (*COC*) [8]
Misalkan x^* adalah akar dari suatu persamaan nonlinear $f(x) = 0$, dan x_{n+1}, x_n, x_{n-1} adalah tiga iterasi berturut-turut yang cukup dekat ke akar x^*. Orde konvergensi secara komputasi *COC* dapat diaproksimasikan dengan rumus

$$COC \approx \frac{\ln |(x_{n+1} - x^*)/(x_n - x^*)|}{\ln |(x_n - x^*)/(x_{n-1} - x^*)|}.$$

Definisi 4 (Indeks Efisiensi) [6, h. 12]
Misalkan p adalah orde konvergensi dari suatu metode iterasi dan w adalah banyaknya fungsi yang dievaluasi pada setiap iterasinya, maka indeks efisiensi dari metode adalah $p^{\frac{1}{w}}$.

Metode Chebyshev-Halley Bebas Turunan Kedua dengan Parameter α
Penurunan metode Chebyshev-Halley bebas turunan kedua dengan parameter α dimulai dengan mengkombinasikan metode pada persamaan (3) dengan metode pada persamaan (2). Jika z_n merupakan metode pada persamaan (3), maka untuk langkah iterasi selanjutnya yaitu x_{n+1} dicari dengan metode pada persamaan (2) sehingga

$$L_f(x_n) = \frac{f''(x_n)f(x_n)}{(f'(x_n))^2}, \tag{4}$$

$$z_n = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{L_f(x_n)}{1 - \alpha L_f(x_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{5}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}. \tag{6}$$

Turunan kedua $f''(x_n)$ yang terdapat pada persamaan (5), dapat ditaksir dengan menggunakan ekspansi Taylor $f(y_n)$ disekitar x_n. Diekspansikan sampai orde dua dan mengabaikan orde yang lebih tinggi. Jika y_n merupakan metode Newton dengan bentuk

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{7}$$

maka setelah disederhanakan diperoleh

$$f(y_n) \approx \frac{1}{2}\frac{f''(x_n)(f(x_n))^2}{(f'(x_n))^2}, \tag{8}$$

dari persamaan (8) dapat diperoleh bentuk dari turunan kedua $f''(x_n)$ yaitu

$$f''(x_n) \approx \frac{2f(y_n)(f'(x_n))^2}{(f(x_n))^2}. \tag{9}$$

Persamaan (9) disubtitusikan ke dalam persamaan (4), diperoleh approksimasi

$$L_f(x_n) \approx \frac{2f(y_n)}{f(x_n)}. \tag{10}$$

Kemudian subtitusikan persamaan (10) ke dalam persamaan (5) diperoleh

$$z_n = x_n - \left(1 + \frac{f(y_n)}{f(x_n) - 2\alpha f(y_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \ \alpha \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Selanjutnya, turunan pertama $f'(z_n)$ yang terdapat pada persamaan (6), dapat ditaksir dengan menggunakan ekspansi Taylor $f'(z_n)$ disekitar x_n. Diekspansikan sampai orde pertama dan mengabaikan orde yang lebih tinggi sehingga

$$f'(z_n) \approx f'(x_n) + f''(x_n)(z_n - x_n). \tag{12}$$

Subtitusikan persamaan (12) ke dalam persamaan (6) diperoleh

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)(f(x_n))^2}{f'(x_n)((f(x_n))^2 + 2f(y_n)f'(x_n)(z_n - x_n))}, \ n = 0, 1, 2, \cdots . \tag{13}$$

Menggunakan persamaan (7), (11) dan (13) diperoleh metode iterasi tiga langkah baru yang merupakan bentuk dari metode Chebyshev-Halley bebas turunan kedua dengan parameter α, yaitu

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= x_n - \left(1 + \frac{f(y_n)}{f(x_n) - 2\alpha f(y_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \ \alpha \in \mathbb{R}, \\ x_{n+1} &= z_n - \frac{f(z_n)(f(x_n))^2}{f'(x_n)((f(x_n))^2 + 2f(y_n)f'(x_n)(z_n - x_n))}, \ n = 0, 1, 2, \cdots . \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Berdasarkan nilai parameter α metode pada persamaan (14) memiliki keluarga yang berhubungan dengan metode iterasi lain, yaitu jika $\alpha = 0$ maka disebut metode modifikasi Chebyshev, jika $\alpha = 0.5$ maka disebut metode modifikasi Halley dan jika $\alpha = 1$ maka disebut metode modifikasi Super Halley. Selanjutnya akan ditunjukkan orde konvergensi dari metode Chebyshev-Halley bebas turunan kedua dengan parameter α.

3. ANALISA KEKONVERGENAN

Teorema 5
Misalkan terdapat fungsi yang terdiferensial secukupnya $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pada interval terbuka $\mathbb{D}$ dan mempunyai akar sederhana $x^* \in \mathbb{D}$. Jika tebakan awal x_0 cukup dekat dengan akar x^*, maka metode pada persamaan (14) mempunyai kekonvergenan paling sedikit orde lima, jika $\alpha = 1$ maka metode pada persamaan (14) mempunyai kekonvergenan orde enam.

Bukti: Misalkan x^* adalah akar sederhana dari persamaan $f(x) = 0$ maka $f(x^*) = 0$ dan $f'(x^*) \neq 0$. Asumsikan $e_n = x_n - x^*$, kemudian dengan mengekspansikan $f(x_n)$ disekitar x^* sampai orde enam dan mengabaikan orde yang lebih tinggi diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_n) = f(x^*) &+ f'(x^*)\frac{(x_n - x^*)}{1!} + f^{(2)}(x^*)\frac{(x_n - x^*)^2}{2!} + f^{(3)}(x^*)\frac{(x_n - x^*)^3}{3!} \\ &+ f^{(4)}(x^*)\frac{(x_n - x^*)^4}{4!} + f^{(5)}(x^*)\frac{(x_n - x^*)^5}{5!} + f^{(6)}(x^*)\frac{(x_n - x^*)^6}{6!} \\ &+ O\left(x_n - x^*\right)^7. \end{aligned} \tag{15}$$

Karena $f(x^*) = 0$ dan $e_n = x_n - x^*$, maka persamaan (15) menjadi

$$\begin{aligned} f(x_n) = f'(x^*)\bigg(e_n &+ \frac{f^{(2)}(x^*)e_n^2}{2!f'(x^*)} + \frac{f^{(3)}(x^*)e_n^3}{3!f'(x^*)} + \frac{f^{(4)}(x^*)e_n^4}{4!f'(x^*)} + \frac{f^{(5)}(x^*)e_n^5}{5!f'(x^*)} \\ &+ \frac{f^{(6)}(x^*)e_n^6}{6!f'(x^*)} + O(e_n^7)\bigg), \end{aligned}$$

dengan $c_k = \dfrac{f^{(k)}(x^*)}{k!f'(x^*)}$, $k = 2, 3, \cdots$, sehingga

$$f(x_n) = f'(x^*)(c_1e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + c_5e_n^5 + c_6e_n^6 + O(e_n^7)). \tag{16}$$

Selanjutnya dengan cara yang sama untuk nilai $f'(x_n)$ kembali dilakukan ekspansi Taylor dari $f'(x_n)$ disekitar x^* sehingga setelah disederhanakan diperoleh

$$f'(x_n) = f'(x^*)(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + 5c_5e_n^4 + 6c_6e_n^5 + O(e_n^6)). \tag{17}$$

Kemudian dari persamaan (16) dan (17) diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{(c_1e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + c_5e_n^5 + c_6e_n^6 + O(e_n^7))}{(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + 5c_5e_n^4 + 6c_6e_n^5 + O(e_n^6))}. \tag{18}$$

Selanjutnya dengan menggunakan deret geometri $\dfrac{1}{1+r} = 1 - r + r^2 - r^3 + \cdots$, untuk $r = 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + 5c_5e_n^4 + 6c_6e_n^5 + O(e_n^7)$, setelah disederhanakan diperoleh hasil dari persamaan (18) sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n &+ c_2e_n^2 - (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 - (-4c_2^3 - 3c_4 + 7c_2c_3)e_n^4 - (10c_2c_4 - 4c_5 + 8c_2^4 \\ &+ 6c_3^2 - 20c_2^2c_3)e_n^5 + (-5c_6 - 16c_2^5 + 52c_2^3c_3 + 13c_2c_5 - 33c_2c_3^2 + 17c_3c_4 \\ &- 28c_2^2c_4)e_n^6 + O(e_n^7). \end{aligned} \tag{19}$$

Selanjutnya dengan mensubtitusikan persamaan (19) ke (7) diperoleh

$$\begin{aligned} y_n = x^* &+ c_2 e_n^2 - (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 - (-4c_2^3 - 3c_4 + 7c_2c_3)e_n^4 - (10c_2c_4 - 4c_5 + 8c_2^4 + 6c_3^2 \\ &- 20c_2^2c_3)e_n^5 - (-5c_6 - 16c_2^5 + 52c_2^3c_3 + 13c_2c_5 - 33c_2c_3^2 + 17c_3c_4 - 28c_2^2c_4)e_n^6 \\ &+ O(e_n^7). \end{aligned} \tag{20}$$

Kemudian dengan menggunakan persamaan (20) dilakukan ekspansi Taylor dari $f(y_n)$ disekitar x^* sampai orde enam dan mengabaikan orde yang lebih tinggi

$$\begin{aligned} f(y_n) = f'(x^*)(c_2e_n^2 &+ (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + (-7c_2c_3 + 3c_4 + 5c_2^3)e_n^4 + (24c_2^2c_3 + 4c_5 - 12c_2^4 \\ &- 6c_3^2 - 10c_2c_4)e_n^5 + (5c_6 + 28c_2^5 - 13c_2c_5 + 37c_2c_3^2 - 17c_3c_4 \\ &- 73c_2^3c_3 + 34c_2^2c_4)e_n^6 + O(e_n^7)). \end{aligned} \tag{21}$$

Selanjutnya dihitung $(f(x_n) - 2\alpha f(y_n))$ menggunakan persamaan (16) dan (21)

$$\begin{aligned} f(x_n) - 2\alpha f(y_n) = f'(x^*)(e_n &+ (c_2 - 2\alpha c_2)e_n^2 + (-4\alpha c_3 + 4\alpha c_2^2)e_n^3 + (c_4 + 14\alpha c_2c_3 \\ &- 10\alpha c_2^3 - 6\alpha c_4)e_n^4 + (c_5 + 20\alpha c_2c_4 + 24\alpha c_2^4 - 8\alpha c_5 + 12\alpha c_3^2 \\ &- 48\alpha c_2^2c_3)e_n^5 + (146\alpha c_2^3c_3 + 34\alpha c_3c_4 + c_6 - 10\alpha c_6 - 74\alpha c_2c_3^2 \\ &- 56\alpha c_2^5 + 26\alpha c_2c_5 - 68\alpha c_2^2c_4)e_n^6 + O(e_n^7)). \end{aligned} \tag{22}$$

Selanjutnya dihitung $(1 + \frac{f(y_n)}{f(x_n) - 2\alpha f(y_n)})$ dengan menggunakan persamaan (21) dan (22), kemudian dikalikan dengan persamaan (19) dan disederhanakan

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{f(y_n)}{f(x_n) - 2\alpha f(y_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &\quad = e_n + (-2c_2^2 + 2\alpha c_2^2)e_n^3 + (-7c_2c_3 + 9c_2^3 + 4\alpha^2c_2^3 - 14\alpha c_2^3 + 8\alpha c_2c_3)e_n^4 + (44c_2^2c_3 \\ &\qquad - 10c_2c_4 - 30c_2^4 + 8\alpha c_3^2 - 40\alpha^2c_2^4 + 66\alpha c_2^4 + 12\alpha c_2c_4 - 76\alpha c_2^2c_3 + 8\alpha^3c_2^4 \\ &\qquad + 24\alpha^2c_2^2c_3 - 6c_3^2)e_n^5 + (-258\alpha c_2^5 + 24\alpha c_3c_4 + 248\alpha^2c_2^5 - 188c_2^3c_3 - 104\alpha^3c_2^5 \\ &\qquad + 36\alpha^2c_2^2c_4 - 296\alpha^2c_2^3c_3 + 450\alpha c_2^3c_3 + 48\alpha^2c_2c_3^2 - 136\alpha c_2c_3^2 + 16\alpha^4c_2^5 \\ &\qquad - 13c_2c_5 - 110\alpha c_2^2c_4 + 62c_2^2c_4 + 70c_2c_3^2 + 64\alpha^3c_2^3c_3 - 17c_3c_4 + 88c_2^5 \\ &\qquad + 16\alpha c_2c_5)e_n^6 + O(e_n^7). \end{aligned} \tag{23}$$

Kemudian subtitusikan persamaan (23) ke (11), diperoleh

$$\begin{aligned} z_n = x^* &- (-2c_2^2 + 2\alpha c_2^2)e_n^3 - (-7c_2c_3 + 9c_2^3 + 4\alpha^2c_2^3 - 14\alpha c_2^3 + 8\alpha c_2c_3)e_n^4 - (44c_2^2c_3 \\ &- 10c_2c_4 - 30c_2^4 + 8\alpha c_3^2 - 40\alpha^2c_2^4 + 66\alpha c_2^4 + 12\alpha c_2c_4 - 76\alpha c_2^2c_3 + 8\alpha^3c_2^4 \\ &+ 24\alpha^2c_2^2c_3 - 6c_3^2)e_n^5 - (-258\alpha c_2^5 + 24\alpha c_3c_4 + 248\alpha^2c_2^5 - 188c_2^3c_3 - 104\alpha^3c_2^5 \\ &+ 36\alpha^2c_2^2c_4 - 296\alpha^2c_2^3c_3 + 450\alpha c_2^3c_3 + 48\alpha^2c_2c_3^2 - 136\alpha c_2c_3^2 + 16\alpha^4c_2^5 \\ &- 13c_2c_5 - 110\alpha c_2^2c_4 + 62c_2^2c_4 + 70c_2c_3^2 + 64\alpha^3c_2^3c_3 - 17c_3c_4 + 88c_2^5 \\ &+ 16\alpha c_2c_5)e_n^6 + O(e_n^7). \end{aligned} \tag{24}$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (24) dilakukan ekspansi Taylor dari $f(z_n)$ disekitar x^*

$$\begin{aligned}f(z_n) = f'(x^*)((&-2\alpha c_2^2 + 2c_2^2)e_n^3 + (-4\alpha^2 c_2^3 + 14\alpha c_2^3 + 7c_2c_3 - 8\alpha c_2c_3 - 9c_2^3)e_n^4\\ &+ (10c_2c_4 - 44c_2^2c_3 + 30c_2^4 + 6c_3^2 + 40\alpha^2 c_2^4 - 8\alpha c_3^2 - 66\alpha c_2^4 - 24\alpha^2 c_2^2c_3\\ &- 12\alpha c_2c_4 - 8\alpha^3 c_2^4 + 76\alpha c_2^2c_3)e_n^5 + (-244\alpha^2 c_2^5 + 64\alpha^3 c_2^3c_3 + 250\alpha c_2^5\\ &- 450\alpha c_2^3c_3 + 296\alpha^2 c_2^3c_3 - 84c_2^5 + 110\alpha c_2^2c_4 - 62c_2^2c_4 + 104\alpha^3 c_2^5\\ &+ 136\alpha c_2c_3^2 - 16\alpha^4 c_2^5 - 48\alpha^2 c_2c_3^2 - 36\alpha^2 c_2^2c_4 - 24\alpha c_3c_4 - 16\alpha c_2c_5\\ &- 70c_2c_3^2 + 17c_3c_4 + 188c_2^3c_3 + 13c_2c_5)e_n^6 + O(e_n^7)). \qquad (25)\end{aligned}$$

Kemudian dihitung $f''(x_n) = \frac{2f(y_n)(f'(x_n))^2}{(f(x_n))^2}$ dengan menggunakan persamaan (16), (17) dan (21) sehingga

$$\begin{aligned}f''(x_n) = f'(x^*)(&2c_2 + 4c_3e_n + (2c_2c_3)e_n^2 + (4c_3^2 + 8c_5 - 4c_2^2c_3 + 4c_2c_4)e_n^3 + (14c_3c_4\\ &- 14c_2c_3^2 + 6c_2c_5 - 6c_2^2c_4 + 10c_6 + 8c_2^3c_3)e_n^4 + (-24c_3c_5 + 28c_2^2c_3^2\\ &- 20c_2c_6 - 20c_2^2c_5 - 12c_3^3 - 12c_4^2 - 60c_2c_3c_4 - 12c_2^4c_3 + 8c_2^3c_4)e_n^5\\ &+ (-50c_2^3c_3^2 + 30c_2^2c_6 + 4c_2c_4^2 - 28c_4c_5 + 114c_2^2c_3c_4 - 20c_3c_6 + 16c_2^5c_3\\ &- 42c_3^2c_4 - 10c_2^4c_4 + 42c_2c_{3^3} + 16c_2c_3c_5 + 34c_2^3c_5)e_n^6 + O(e_n^7)). \qquad (26)\end{aligned}$$

Selanjutnya dihitung $(\frac{f(z_n)}{f'(x_n)+f''(x_n)(z_n-x_n)})$ dengan menggunakan persamaan (17), (24), (25) dan (26) sehingga

$$\begin{aligned}&\frac{f(z_n)}{f'(x_n) + f''(x_n)(z_n - x_n)}\\ &\quad= (-2\alpha c_2^2 + 2c_2^2)e_n^3 + (-4\alpha^2 c_2^3 + 14\alpha c_2^3 + 7c_2c_3 - 8\alpha c_2c_3 - 9c_2^3)e_n^4 + (-42c_2^2c_3\\ &\quad+ 6c_3^2 + 10c_2c_4 + 30c_2^4 - 66\alpha c_2^4 - 8\alpha^3 c_2^4 + 40\alpha^2 c_2^4 - 24\alpha^2 c_2^2c_3 - 12\alpha c_2c_4\\ &\quad+ 74\alpha c_2^2c_3 - 8\alpha c_3^2)e_n^5 + (13c_2c_5 + 266\alpha c_2^5 + 104\alpha^3 c_2^5 - 252\alpha^2 c_2^5 - 24\alpha c_3c_4\\ &\quad- 48\alpha^2 c_2c_3^2 - 36\alpha^2 c_2^2c_4 + 292\alpha^2 c_2^3c_3 - 440\alpha c_2^3c_3 + 106\alpha c_2^2c_4 + 128\alpha c_2c_3^2\\ &\quad- 16\alpha^4 c_2^5 + 17c_3c_4 + 183c_2^3c_3 - 58c_2^2c_4 - 63c_2c_3^2 - 64\alpha^3 c_2^3c_3 - 92c_2^5\\ &\quad- 16\alpha c_2c_5)e_n^6 + O(e_n^7). \qquad (27)\end{aligned}$$

Jika persamaan (24) dan (27) disubtitusikan ke dalam persamaan (13) diperoleh

$$\begin{aligned}x_{n+1} = x^* + (&-2c_2^2c_3 + 2\alpha c_2^2c_3)e_n^5 + (8\alpha c_2c_3^2 - 8\alpha c_2^5 - 10\alpha c_2^3c_3 + 5c_2^3c_3 + 4\alpha^2 c_2^5\\ &- 7c_2c_3^2 + 4\alpha^2 c_2^3c_3 + 4\alpha c_2^2c_4 - 4c_2^2c_4 + 4c_2^5)e_n^6 + O(e_n^7). \qquad (28)\end{aligned}$$

Karena $e_{n+1} = x_{n+1} - x^*$ maka

$$\begin{aligned}e_{n+1} =&(-2c_2^2c_3 + 2\alpha c_2^2c_3)e_n^5 + (8\alpha c_2c_3^2 - 8\alpha c_2^5 - 10\alpha c_2^3c_3 + 5c_2^3c_3 + 4\alpha^2 c_2^5\\ &- 7c_2c_3^2 + 4\alpha^2 c_2^3c_3 + 4\alpha c_2^2c_4 - 4c_2^2c_4 + 4c_2^5)e_n^6 + O(e_n^7). \qquad (29)\end{aligned}$$

Dari persamaan (29) diperoleh metode Chebyshev-Halley bebas turunan kedua dengan parameter α memiliki kekonvergenan paling sedikit orde lima dan jika

$\alpha = 1$ maka metode Chebyshev-Halley bebas turunan kedua mempunyai persamaan tingkat kesalahan dengan rumus

$$e_{n+1} = (c_2 c_3^2 - c_2^3 c_3) e_n^6 + O(e_n^7).$$

Berdasarkan Definisi 2 maka metode Chebyshev-Halley bebas turunan kedua dengan $\alpha = 1$ memiliki kekonvergenan orde enam. ■

Karena pada setiap iterasinya metode Chebyshev-Halley bebas turunan kedua dengan $\alpha = 1$ melakukan evaluasi fungsi sebanyak 4 kali, sehingga berdasarkan Definisi 4 indeks efisiensi untuk $\alpha = 1$ adalah $6^{\frac{1}{4}} = 1.565$.

4. UJI KOMPUTASI

Pada bagian ini, dilakukan uji komputasi dengan menggunakan metode Newton (MN), metode Chebyshev (MC), metode Halley (MH), metode Super Halley (MSH), serta metode Chebyshev-Halley bebas turunan kedua dengan parameter α yang terdiri dari metode modifikasi Chebyshev (MMC), metode modifikasi Halley (MMH) dan metode modifikasi Super Halley (MMSH).

Di bawah ini adalah beberapa contoh fungsi dan nilai tebakan awal beserta akar yang digunakan untuk membandingkan metode-metode tersebut

$f_1(x) = x^2 - (2 - x)^3$	$x_0 = 1.1$	$x^* = 1.0000000000000000$
$f_2(x) = (x + 2)e^x - 1$	$x_0 = -0.5$	$x^* = -0.4428544010023886$
$f_3(x) = 10xe^{-x^2} - 1$	$x_0 = 1.8$	$x^* = 1.6796306104284499$
$f_4(x) = \sin^2(x) - x^2 + 1$	$x_0 = 1.5$	$x^* = 1.4044916482153412.$

Dalam menemukan solusi numerik dari beberapa contoh fungsi di atas, digunakan program Maple13 dengan memakai 320 digit. Dalam menemukan solusi numerik juga ditentukan kriteria pemberhentian jalannya suatu program komputasi, yaitu jika total evaluasi fungsi periterasi ($TNFE$) lebih besar sama dengan 12. Angka 12 dipilih karena merupakan kelipatan persekutuan terkecil (KPK) dari banyaknya evaluasi fungsi metode-metode yang akan dibandingkan.

Tabel 1: Perbandingan Hasil Komputasi untuk MN, MC, MH, MSH, MMC, MMH dan MMSH

Metode	n	COC	x_n	$\lvert f(x_n)\rvert$	$\lvert x_n - x^*\rvert$
f_1, $x_0 = 1.1$					
MN	6	2.0000	1.0000000000000000	$1.73e-089$	$3.46e-090$
MC	4	3.0000	1.0000000000000000	$2.31e-123$	$4.61e-124$
MH	4	3.0000	1.0000000000000000	$2.71e-130$	$5.42e-131$
MSH	4	3.0000	1.0000000000000000	$1.19e-108$	$2.39e-109$
MMC	3	5.0000	1.0000000000000000	$2.11e-162$	$4.22e-163$
MMH	3	5.0000	1.0000000000000000	$2.23e-172$	$4.46e-173$
MMSH	3	6.0000	1.0000000000000000	$1.00e-318$	$2.00e-319$

Metode	n	COC	x_n	$\lvert f(x_n)\rvert$	$\lvert x_n - x^*\rvert$
f_2, $x_0 = -0.5$					
MN	6	2.0000	-0.4428544010023886	$1.41e-089$	$8.61e-090$
MC	4	3.0000	-0.4428544010023886	$2.62e-107$	$1.59e-107$
MH	4	3.0000	-0.4428544010023886	$3.34e-130$	$2.03e-130$
MSH	4	3.0000	-0.4428544010023886	$3.91e-122$	$2.38e-122$
MMC	3	5.0000	-0.4428544010023886	$1.85e-171$	$1.13e-171$
MMH	3	5.0000	-0.4428544010023886	$4.42e-182$	$2.69e-182$
MMSH	3	5.7638	-0.4428544010023886	$1.00e-319$	$2.00e-320$
f_3, $x_0 = 1.8$					
MN	6	2.0000	1.6796306104284499	$1.22e-057$	$4.41e-058$
MC	4	3.0000	1.6796306104284499	$2.02e-060$	$7.32e-061$
MH	4	3.0000	1.6796306104284499	$5.22e-077$	$1.89e-077$
MSH	4	3.0000	1.6796306104284499	$4.66e-101$	$1.69e-101$
MMC	3	5.0000	1.6796306104284499	$8.76e-117$	$3.17e-117$
MMH	3	5.0000	1.6796306104284499	$3.10e-134$	$1.12e-134$
MMSH	3	6.0000	1.6796306104284499	$2.08e-239$	$7.54e-240$
f_4, $x_0 = 1.5$					
MN	6	2.0000	1.4044916482153412	$4.53e-074$	$1.82e-074$
MC	4	3.0000	1.4044916482153412	$1.29e-083$	$5.21e-084$
MH	4	3.0000	1.4044916482153412	$1.65e-095$	$6.64e-096$
MSH	4	3.0000	1.4044916482153412	$5.79e-147$	$2.33e-147$
MMC	3	5.0000	1.4044916482153412	$6.77e-227$	$2.73e-227$
MMH	3	5.0000	1.4044916482153412	$3.43e-180$	$1.38e-180$
MMSH	3	6.0000	1.4044916482153412	$1.17e-289$	$4.70e-290$

Keterangan untuk Tabel 1 adalah, n menyatakan jumlah iterasi, x_0 menyatakan tebakan awal, COC menyatakan orde konvergensi dari metode secara komputasi, x_n menyatakan akar dari fungsi, $|f(x_n)|$ menyatakan nilai fungsi untuk pendekatan akar ke n dan $|x_n - x^*|$ menyatakan kesalahan.

Secara umum berdasarkan Tabel 1 semua metode yang dibandingkan berhasil menemukan akar yang diharapkan dari semua fungsi yang diberikan. Selanjutnya jika membandingkan nilai kesalahan dan nilai fungsi dari iterasi terakhir pada MC, MH dan MSH yang sama-sama memiliki kekonvergenan orde tiga, dapat dilihat pada Tabel 1 pada contoh f_1 bahwa MH unggul jika dibandingkan dengan MC, tetapi MC lebih unggul dibandingkan MSH. Pada contoh f_2 MH unggul jika dibandingkan dengan MSH, tetapi MSH unggul dibandingkan MC. Selanjutnya pada contoh f_3 dapat dilihat bahwa MSH unggul jika dibandingkan dengan MH tetapi MH unggul dibandingkan MC. Kemudian pada contoh f_4 MSH unggul jika dibandingkan dengan MH, tetapi MH unggul dibandingkan MC. Secara keseluruhan MC, MH dan MSH unggul jika sama-sama dibandingkan dengan MN yang memiliki kekonvergenan lebih kecil yaitu kekonvergenan orde dua.

Kemudian jika membandingkan MMH dan MMC yang sama-sama memiliki kekonvergenan orde lima, dapat dilihat bahwa pada contoh f_1, f_2 dan f_3 MMH memberikan nilai kesalahan dan nilai fungsi yang lebih kecil jika dibandingkan dengan MMC, tetapi MMC juga memberikan nilai kesalahan dan nilai fungsi yang lebih kecil jika dibandingkan dengan MMH, dapat dilihat pada contoh f_4. Tetapi, secara keseluruhan MMC dan MMH lebih unggul jika dibandingkan dengan MN, MC, MH dan MSH.

Secara keseluruhan dari semua fungsi MMSH unggul jika dibandingkan dengan MN, MC, MH, MSH, MMC dan MMH, jika dilihat dari kecilnya nilai kesalahan dan nilai fungsi yang dihasilkan oleh MMSH pada iterasi terakhirnya. Hal itu terjadi karena MMSH memiliki kekonvergenan yang paling tinggi yaitu kekonvergenan orde enam.

UCAPAN TERIMA KASIH

Ungkapan terima kasih penulis ucapkan kepada Bapak Drs. Rolan Pane, M.Si. dan Bapak Supriadi Putra, M.Si. yang telah meluangkan waktu, pikiran dan tenaga dalam memberikan bimbingan, petunjuk dan pengarahan kepada penulis dalam menyelesaikan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Atkinson, K.E. 1993. *Elementary Numerical Analysis, 2^{nd}Ed.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

[2] Dingfang, L., Ping, L. & Jisheng, K. 2014. An Improvement of Chebyshev-Halley Methods Free from Second Derivative. *Applied Mathematics and Computation*, **235**: 221-225.

[3] Gutierrez, J.M. & Hernandez, M.A. 1997. A Family of Chebyshev-Halley Type Methods in Banach Spaces. *Bulletin Aust. Math. Soc*, **55**: 113-130.

[4] Gutierrez, J.M. & Hernandez, M.A. 2001. An Acceleration of Newton's Method: Super Halley Method. *Applied Mathematics Computation*, **117**: 223-239.

[5] Sharma, J. R. & Guha. R.K. 2011. Some Modified Newtons Methods with Fourth-Order Convergence. *Advance in Science Research*, **2**: 240-247.

[6] Traub, J.F. 1964. *Iterative Methods for the Solution of Equations*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

[7] Wait, R. 1979. *The Numerical Solution of Algebraic Equation*. John Wiley & Sons, Inc., Chicester.

[8] Weerakoon, S. & Fernando, T.G.I. 2000. A Variant of Newtons Method with Accelerated Third Order Convergence. *Applied Mathematics Letters*, **13**: 87-93.