METODE GAUSS-SEIDEL PREKONDISI UNTUK MENCARI SOLUSI SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Alhumaira Oryza Sativa[1*]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*alhumairaoryzasativa@gmail.com

ABSTRACT

This article discusses how to find a solution of linear system of equations $Ax = b$, with A in the form of Z-matrix, using preconditioned Gauss-Seidel method. Precondition matrix used is the matrix proposed by J.H. Yun [Applied Mathematics Letters, 27: 207-215 (2012)]. Analytically it is shown that the spectral radius of the iteration matrix of the preconditioned Gauss-Seidel method is smaller than that of the standard Gauss-Seidel method. Furthermore, from the numerical experiment in solving a linear system of equation $Ax = b$, it is seen that the preconditioned Gauss-Seidel method requires fewer iterations than standard Gauss-Seidel method.

Keywords: *systems of linear equations, Z-matrix, preconditioned Gauss-Seidel method, spectral radius.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas bagaimana menemukan solusi sistem persamaan linear $Ax = b$, dengan A berbentuk Z-matriks, menggunakan metode Gauss-Seidel prekondisi. Matriks prekondisi yang digunakan adalah matriks yang dikemukakan oleh J. H. Yun [Applied Mathematics Letters, 27 : 207–215 (2012)]. Secara analitik ditunjukkan bahwa spektral radius matriks iterasi metode Gauss-Seidel prekondisi lebih kecil dari matriks iterasi metode Gauss-Seidel standar. Selanjutnya dari contoh komputasi terlihat bahwa metode Gauss-Seidel prekondisi yang didiskusikan memerlukan iterasi yang lebih sedikit dibanding metode Gauss-Seidel untuk mendapatkan solusi sistem persamaan linear $Ax = b$.

Kata kunci: *sistem persamaan linear, Z-matriks, metode Gauss-Seidel prekondisi, spektral radius.*

1. PENDAHULUAN

Sebuah sistem sembarang yang terdiri dari n persamaan linear dan n variabel yang tidak diketahui disebut sistem persamaan linear, yang dalam bentuk persamaan matriks ditulis

$$Ax = b, \tag{1}$$

dengan A adalah matriks koefisien yang berukuran $n \times n$, serta x dan b merupakan matriks kolom yang berukuran $n \times 1$.

Mencari solusi sistem persamaan linear pada persamaan (1) dapat menggunakan dua metode yaitu metode langsung dan metode tidak langsung atau metode iterasi. Metode langsung prinsip kerjanya tidak menggunakan tebakan awal, misalnya metode invers, metode eliminasi gauss dan metode faktorisasi LU. Sedangkan metode iterasi adalah metode yang menggunakan tebakan awal, misalnya metode Jacobi dan metode Gauss-Seidel. Mencari solusi sistem persamaan linear dengan metode iterasi dimulai dengan tebakan awal $x^{(0)}$ dan diperbaiki pada proses berikutnya sehingga diperoleh solusi hampiran $x^{(k)}$ yang memenuhi batas toleransi yang diberikan.

Misalkan matriks A adalah matriks nonsingular dan semua elemen diagonalnya tidak nol. Untuk mencari solusi sistem persamaan linear dengan menggunakan metode iterasi, matriks A dapat dipisah (*splitting*) menjadi $A = M - N$, dimana M adalah matriks nonsingular dan N adalah matriks sisa. Dengan menerapkan *splitting* ke sistem persamaan linear (1) diperoleh

$$Mx = Nx + b. \tag{2}$$

Karena M adalah matriks nonsingular, maka M memiliki invers sehingga persamaan (2) dapat dinyatakan dengan

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b. \tag{3}$$

Dari persamaan (3) dapat dibentuk metode iterasi jika diberikan tebakan awal $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ yaitu

$$x^{(k)} = M^{-1}Nx^{(k-1)} + M^{-1}b, \tag{4}$$

dengan $k = 1, 2, \ldots$. Persamaan (4) juga dapat ditulis dengan

$$x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c, \tag{5}$$

dimana $T = M^{-1}N$ dan $c = M^{-1}b$. Persamaan (5) merupakan metode iterasi dasar untuk mencari solusi sistem persamaan linear.

Jika $x^{(k)} \to x$ ketika $k \to \infty$ maka persamaan (5) dikatakan konvergen. Metode iterasi (5) juga konvergen jika spektral radius dari T lebih kecil dari 1 atau $\rho(T) < 1$.

Teorema 1 [2, h. 457]
Untuk tebakan awal $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ maka barisan $x^{(k)}$ pada persamaan (5) konvergen ke solusi sistem persamaan linear jika dan hanya jika $\rho(T) < 1$.

Teorema 2 [1, h. 28]
Misalkan A adalah sebuah matriks dengan $a_{ij} \geq 0$ untuk $i, j = 1, 2, \ldots$ maka berlaku
(a) Jika $Ax \geq \beta x$ untuk sebuah vektor $x \geq 0$, maka $\rho(A) \geq \beta$
(b) Jika $Ax \leq \gamma x$ untuk sebuah vektor $x > 0$, maka $\rho(A) \leq \gamma$
(c) Jika A tak tereduksi (*irreducible*) dan $\beta x \leq Ax \leq \gamma x$ untuk sebuah vektor $x \geq 0$ dan $x \neq 0$, maka $\beta < \rho(A) < \gamma$ dan $x > 0$.

Apabila matriks A pada sistem persamaan linear (1) berkondisi buruk (*ill-conditioned*) yaitu jika terjadi perubahan-perubahan relatif kecil dalam entri-entrinya, dapat menyebabkan perubahan-perubahan yang relatif besar dalam mencari solusi sistem persamaan linear (1), maka salah satu cara untuk mengatasinya adalah menggunakan matriks prekondisi (P). Matriks prekondisi mentransformasikan sistem persamaan linear (1) dituliskan

$$PAx = Pb, \tag{6}$$

dimana $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ adalah matriks prekondisi yang nonsingular.

Pada tahun 1991 Gunawardena et [4] menggunakan prekondisi $I + S$ yang dinotasikan dengan P_s untuk mencari solusi sistem persamaan linear dengan I adalah matriks identitas dan

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_{23} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pada tahun 2001 Evans et [3] menggunakan prekondisi $I + R_1$ yang dinotasikan dengan P_1 untuk mencari solusi sistem persamaan linear dengan I adalah matriks identitas dan

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sedangkan pada tahun 2012 Jae Heon Yun [6] menggunakan prekondisi yang diperoleh dari menjumlahkan prekondisi P_s dan R_1 pada prekondisi P_1. Sehingga diperoleh prekondisi $P = I + S + R_1$ yang dinotasikan dengan P_{s1}

$$P_{s1} = \begin{bmatrix} 1 & -a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -a_{23} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1,n} \\ -a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Artikel ini merupakan review dari artikel Jae Heon Yun [6], dengan judul *"Comparison Result for The Preconditioned Gauss-Seidel Methods"*, kemudian dilengkapi dengan uji komputasi untuk membandingkan kecepatan iterasi memperoleh solusi sistem persamaan linear dan kecepatan konvergensi dengan menggunakan spektral radius.

2. METODE JACOBI DAN GAUSS-SEIDEL

Pada metode iterasi dasar dijelaskan mengenai *splitting* dari matriks A pada sistem persamaan linear (1) yaitu $A = M - N$. Untuk keperluan lain, matriks A juga dapat di pisah menjadi $A = D - L - U$ dimana D adalah matriks diagonal, L adalah matriks segitiga bawah kuat (*strictly lower triangular*), dan U adalah matriks segitiga atas kuat (*strictly upper triangular*).

Pada metode Jacobi matriks $M = D$ dan $N = L + U$ untuk *splitting* $A = M - N$. Bila disubtitusikan M dan N ke persamaan metode iterasi dasar (5) diperoleh

$$x^{(k)} = D^{-1}(L + U)x^{(k-1)} + D^{-1}b, \tag{8}$$

dengan $k = 1, 2, \ldots$. Persamaan (8) merupakan metode iterasi Jacobi.

Pada metode Gauss-Seidel *splitting* $A = M - N$ dimana $M = D - L$ dan $N = U$. Dengan mensubtitusikan M dan N ke persamaan (5) diperoleh

$$x^{(k)} = (D - L)^{-1}Ux^{(k-1)} + (D - L)^{-1}b, \tag{9}$$

dimana $k = 1, 2, \ldots$. Persamaan (9) merupakan metode iterasi Gauss-Seidel.

Konvergensi metode Jacobi dan metode Gauss-Seidel untuk sistem persamaan linear dengan matriks doagonal dominan kuat (*strictly diagonal dominant*) diberikan oleh teorema berikut.

Teorema 3 [5, h. 185]
Jika A adalah matriks diagonal dominan kuat (*strictly diagonal dominant*), maka untuk tebakan awal $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, metode iterasi Jacobi atau metode Gauss-Seidel konvergen ke solusi sistem persamaan linear $Ax = b$.

3. METODE GAUSS-SEIDEL PREKONDISI

Pada sistem persamaan linear (1), asumsikan bahwa matriks $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ adalah Z-matriks yaitu $a_{ij} \leq 0$ untuk $i \neq j$ yang semua diagonal utamanya adalah satu, diperoleh $A = I - L - U$ dimana I adalah matriks identitas, L adalah matriks segitiga bawah kuat (*strictly lower triangular*), dan U adalah matriks segitiga atas kuat (*strictly upper triangular*).

Dengan menunjukkan prekondisi P_{s1} pada persamaan (7) ke sistem persamaan linear (1) diperoleh

$$P_{s1}Ax = P_{s1}b. \tag{10}$$

Misalkan $P_{s1}A = A_{s1}$ dan $P_{s1}b = b_{s1}$, sehingga persamaan (10) menjadi

$$A_{s1}x = b_{s1}. \tag{11}$$

Matriks A_{s1} dapat dipisah (*splitting*) menjadi $A_{s1} = M_{s1} - N_{s1}$ dimana M_{s1} adalah matriks nonsingular dan N_{s1} merupakan matriks sisa. Pada metode Gauss-Seidel prekondisi matriks $M_{s1} = (I - L - SL - R_1U + R_1)$ dan $N_{s1} = U - S + SU$, dengan $SL = \wedge_0 + E_0$ dan $R_1U = \wedge_1 + E_1$, dimana $\wedge_0, \wedge_1$ masing-masing adalah matriks diagonal dari SL dan R_1U. Sedangkan E_0, E_1 masing-masing adalah matriks segitiga bawah kuat dari SL dan R_1U. Sehingga $M_{s1} = (I - \wedge_0 - \wedge_1) - (L - R_1 + E_0 + E_1)$.

Subtitusikan *splitting* $A_{s1} = M_{s1} - N_{s1}$ ke persamaan (11) diperoleh

$$M_{s1}x = N_{s1}x + b_{s1}. \tag{12}$$

Karena M_{s1} adalah matriks nonsingular, maka M_{s1} memiliki invers sehingga persamaan (12) menjadi

$$x = M_{s1}^{-1}N_{s1}x + M_{s1}^{-1}b_{s1}. \tag{13}$$

Dari persamaan (13) dapat diebntuk metode iterasi jika diberikan tebakan awal $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ yaitu

$$x^{(k)} = M_{s1}^{-1}N_{s1}x^{(k-1)} + M_{s1}^{-1}b_{s1}, \tag{14}$$

dengan $k = 1, 2, \ldots$. Persamaan (14) juga dapat ditulis dengan

$$x^{(k)} = T_{s1}x^{(k-1)} + c, \tag{15}$$

dengan $T_{s1} = M_{s1}^{-1}N_{s1}$ dan $c = M_{s1}^{-1}b_{s1}$. Persamaan (15) merupakan metode iterasi Gauss-Seidel prekondisi untuk mencari solusi sistem persamaan linear.

Teorema 4 Misalkan $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ adalah Z-matriks. Jika $a_{1n}a_{n1} < 1$ dan $a_{i,i+1}a_{i+1,i} < 1$ untuk $1 \leq i \leq n-1$, maka

$$\rho(T_{s1}) < \rho(T) \quad \text{jika} \quad \rho(T) < 1.$$

Bukti.
Sebelumnya telah diperoleh $M = I - L$ dan $M_{s1} = (I - \wedge_0 - \wedge_1) - (L - R_1 + E_0 + E_1)$, sedangkan $N = U$ dan $N_{s1} = U - S + SU$. Misalkan $T = M^{-1}N$ dan $T_{s1} = M_{s1}^{-1}N_{s1}$, dimana T adalah matriks iterasi dari metode Gauss-Seidel dan T_{s1} adalah matriks iterasi dari metode Gauss-Seidel prekondisi.

Karena A adalah Z-matriks, maka $A_{s1} = P_{s1}A$ juga Z-matriks. Diketahui $a_{1n}a_{n1} < 1$ dan $a_{i,i+1}a_{i+1,i} < 1$ untuk $1 \leq i \leq n-1$ maka terdapat *splitting* dari matriks A yaitu $A_{s1} = M_{s1} - N_{s1}$. Dari prekondisi Gunawardena [4] dan Evans [3] terdapat $a_{i,i+1} \neq 0$ dan $a_{n1} \neq 0$ untuk $1 \leq i \leq n-1$, maka matriks A tak tereduksi (*irreducible*).

Dari Teorema 1 telah dibuktikan bahwa $\rho(T) < 1$, maka akan dibuktikan $\rho(T_{s1}) < \rho(T)$. *Splitting* dari matriks A adalah $A = M - N$, maka terdapat A adalah vektor eigen positif atau $x > 0$ sedemikian hingga $Tx = \lambda x$, dimana $\lambda = \rho(T) < 1$. Dari $Tx = \lambda x$ dengan $T = M^{-1}N$ dimana $M = (I - L)$ dan $N = U$ diperoleh

$$\begin{aligned} Tx &= \lambda x \\ Ux &= \lambda(I - L)x. \end{aligned} \tag{16}$$

Dengan menggunakan prekondisi Gunawardena [4] yaitu $P_s = I + S$ dan $T_s x = \lambda x$ dengan $T_s = M_s^{-1}N_s$, dimana $M_s = (I - \wedge_0) - (L + E_0)$ dan $N_s = U - S + SU$, diperoleh

$$\begin{aligned} T_s x &= \lambda x \\ SUx &= \lambda(S - \wedge_0 - E_0)x. \end{aligned} \tag{17}$$

Dengan menggunakan prekondisi Evans [3] yaitu $P_1 = I + R_1$ dan $T_1 x = \lambda x$ dengan $T_1 = M_1^{-1}N_1$ dimana $M_1 = (I - \wedge_1) - (L - R_1 + E_1)$ dan $N_1 = U$, diperoleh

$$\begin{aligned} T_1 x &= \lambda x \\ R_1 Ux &= \lambda R_1 x. \end{aligned} \tag{18}$$

Dengan menggunakan persamaan (16), (17), dan (18) diperoleh

$$\begin{aligned} T_{s1}x - \lambda x &= M_{s1}^{-1}(U - S + SU)x - \lambda((I - \wedge_0 - \wedge_1) - (L - R_1 + E_0 + E_1))x \\ &= (\lambda - 1)M_{s1}^{-1}(S + \lambda R_1)x. \end{aligned} \tag{19}$$

Jika $\lambda < 1$, maka dari (19) diperoleh $T_{s1} - \lambda x \leq 0$. Sehingga $T_{s1}x \leq \lambda x$. Karena $x > 0$, maka dengan menggunakan Teorema 2 diperoleh bahwa $\rho(T_{s1}) \leq \lambda$ dimana $\lambda = \rho(T)$ dan $\rho(T) < 1$ maka dapat disimpulkan bahwa

$$\rho(T_{s1}) < \rho(T) \quad \text{jika} \quad \rho(T) < 1.$$

■

5. UJI KOMPUTASI

Pada bagian ini dilakukan uji komputasi yang bertujuan untuk membandingkan banyaknya iterasi dan kecepatan konvergensi yang dilihat dari spektral radius untuk metode Jacobi, metode Gauss-Seidel dan metode metode Gauss-Seidel prekondisi dalam mencari solusi sistem persamaan linear.

Contoh 1 Dengan menggunakan matriks random pada program Matlab 7.10 dengan M-file sebagaimana pada Lampiran 4, diperoleh matriks A dan b untuk sistem persamaan linear $Ax = b$. Tentukan solusi hampiran dari sistem persamaan linear berikut dengan toleransi $1e-6$ dan matriks A berukurunan 8×8 yaitu

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0530 & -0.2470 & -0.1005 & -0.1714 & -0.1057 & -0.0725 & -0.1898 \\ -0.0791 & 1.0000 & -0.0426 & -0.1552 & -0.0735 & -0.0899 & -0.1588 & -0.3703 \\ -0.0544 & -0.2285 & 1.0000 & -0.0386 & -0.1327 & -0.1396 & -0.1634 & -0.1859 \\ -0.0628 & -0.1767 & -0.0992 & 1.0000 & -0.2081 & -0.1856 & -0.2392 & -0.0265 \\ -0.2232 & -0.1394 & -0.0185 & -0.0403 & 1.0000 & -0.1061 & -0.2339 & -0.1704 \\ -0.1758 & -0.0784 & -0.1710 & -0.1895 & -0.0838 & 1.0000 & -0.1145 & -0.1158 \\ -0.1389 & -0.0416 & -0.1006 & -0.2178 & -0.1496 & -0.0624 & 1.0000 & -0.1061 \\ -0.0461 & -0.1556 & -0.2457 & -0.0877 & -0.1131 & -0.0061 & -0.1910 & 1.0000 \end{bmatrix},$$

sedangkan matriks b adalah

$$\begin{bmatrix} 0.8236 \\ 0.1750 \\ 0.1636 \\ 0.6660 \\ 0.8944 \\ 0.5166 \\ 0.7027 \\ 0.1536 \end{bmatrix}.$$

Solusi.
Mencari solusi hampiran sistem persamaan linear dari Contoh 1 adalah dengan menggunakan metode iterasi. Metode iterasi yang digunakan adalah metode iterasi Jacobi (MJac), metode Gauss-Seidel (MGS), dan metode Gauss-Seidel prekondisi (MGSP). Sedangkan untuk perhitungan menggunakan program Matlab 7.10 dengan M-file.

Berikut adalah tabel perbandingan hasil komputasi MJac, MGS, dan MGSP dengan tebakan awal $x^{(0)} = \mathbf{0}$ dan toleransi $1e-6$.

Tabel 1: Perbandingan Hasil Komputasi MJac, MGS, dan MGSP

Iterasi	Metode	Solusi Hampiran					Error
k		$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$\cdots$	$x_7^{(k)}$	$x_8^{(k)}$	$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty$
1	MJac	0.7189	0.5353	$\cdots$	0.2072	0.2228	$3.2830e-001$
	MGS	0.7189	0.5982	$\cdots$	0.5386	0.5895	$3.8210e-001$
	MGSP	0.7242	0.6004	$\cdots$	0.6255	0.5914	$3.8070e-001$
2	MJac	1.0004	0.8579	$\cdots$	0.5355	0.4778	$1.9970e-001$
	MGS	1.1010	0.9979	$\cdots$	0.8328	0.7987	$2.2320e-001$
	MGSP	1.1050	1.0155	$\cdots$	0.8372	0.7659	$1.8710e-001$

Iterasi	Metode	Solusi Hampiran					Error
k		$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$\cdots$	$x_7^{(k)}$	$x_8^{(k)}$	$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty$
3	MJac	1.1703	1.0169	$\cdots$	0.7159	0.6514	$1.2300e-001$
	MGS	1.3242	1.1921	$\cdots$	0.9591	0.8978	$1.0480e-001$
	MGSP	1.2934	1.1873	$\cdots$	0.9188	0.8291	$6.6100e-002$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
13	MJac	1.5113	1.3510	$\cdots$	1.0613	0.9764	$1.9000e-003$
	MGS	1.5165	1.3561	$\cdots$	1.0667	0.9814	$4.1162e-005$
	MGSP	1.3976	1.2810	$\cdots$	0.9640	0.8645	$2.3855e-006$
14	MJac	1.5131	1.3528	$\cdots$	1.0632	0.9781	$1.3000e-003$
	MGS	1.5165	1.3562	$\cdots$	1.0667	0.9814	$1.8802e-005$
	MGSP	1.3976	1.2810	$\cdots$	0.9640	0.8645	$8.5719e-007$
15	MJac	1.5143	1.3540	$\cdots$	1.0644	0.9793	$8.2464e-004$
	MGS	1.5165	1.3562	$\cdots$	1.0667	0.9814	$8.5887e-006$
	MGSP	$-$	$-$	$\cdots$	$-$	$-$	$-$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
17	MJac	1.5156	1.3552	$\cdots$	1.0657	0.9805	$3.5733e-004$
	MGS	1.5166	1.3562	$\cdots$	1.0667	0.9814	$1.7921e-006$
	MGSP	$-$	$-$	$\cdots$	$-$	$-$	$-$
18	MJac	1.5159	1.3556	$\cdots$	1.0660	0.9808	$2.3522e-004$
	MGS	1.5166	1.3562	$\cdots$	1.0667	0.9814	$8.1862e-007$
	MGSP	$-$	$-$	$\cdots$	$-$	$-$	$-$
19	MJac	1.5161	1.3558	$\cdots$	1.0663	0.9810	$1.5483e-004$
	MGS	$-$	$-$	$\cdots$	$-$	$-$	$-$
	MGSP	$-$	$-$	$\cdots$	$-$	$-$	$-$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
31	MJac	1.5166	1.3562	$\cdots$	1.0667	0.9814	$1.0248e-006$
	MGS	$-$	$-$	$\cdots$	$-$	$-$	$-$
	MGSP	$-$	$-$	$\cdots$	$-$	$-$	$-$
32	MJac	1.5166	1.3562	$\cdots$	1.0667	0.9814	$6.7462e-007$
	MGS	$-$	$-$	$\cdots$	$-$	$-$	$-$
	MGSP	$-$	$-$	$\cdots$	$-$	$-$	$-$

Pada Tabel 1 terlihat bahwa MGSP lebih cepat memperoleh solusi dibandingkan dengan MJac dan MGS. Hal ini terlihat jelas pada iterasi ke-14 MGSP telah memperoleh solusi, sedangkan MJac memperoleh solusi pada iterasi ke-32 dan MGS pada iterasi ke-18. Hal ini terjadi karena kriteria pemberhentian telah terpenuhi yaitu $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty$ sudah lebih kecil dari toleransi yang diberikan yaitu $1e-6$. Norm $\|.\|_\infty$ didefinisikan dengan $\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}|x_i|$. Selain itu konvergensi MGSP lebih cepat dibandingkan dengan MJac dan MGS, hal ini dilihat dari hasil spektral radius bahwa $\rho(T_{MGSP}) < \rho(T_{MGS}) < \rho(T_{MJac}) < 1$ yaitu $0.359329 < 0.456791 < 0.658263 < 1$.

Untuk ukuran matriks yang lebih besar, dilakukan uji komputasi yang bertujuan untuk membandingkan jumlah iterasi (k) dan spektral radius dari T atau $\rho(T)$ dari MJac, MGS, dan MGSP dalam memperoleh solusi sistem persamaan linear (1). Untuk mencari matriks A dan b dari matriks random dapat menggunakan program Matlab 7.10 dengan M-file. Berikut adalah tabel perbandingan iterasi untuk mencari solusi sistem persamaan linear.

Tabel 2: Jumlah Iterasi MJac, MGS dan MGSP

Ukuran	MJac		MGS		MGSP	
Matriks A	k	$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty$	k	$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty$	k	$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty$
8×8	32	$6.7462e-007$	18	$8.1862e-007$	14	$8.5719e-007$
25×25	54	$8.1700e-007$	30	$8.8617e-007$	28	$9.1806e-007$
99×99	1040	$9.9769e-007$	549	$9.9489e-007$	545	$9.7608e-007$
225×225	5152	$9.9778e-007$	2713	$9.9778e-007$	2688	$9.9622e-007$
525×525	7329	$9.9880e-007$	3861	$9.9710e-007$	3847	$9.9796e-007$
961×961	7927	$9.9974e-007$	4173	$9.9933e-007$	4164	$9.9823e-007$

Pada Tabel 2 terlihat bahwa MGSP selalu lebih cepat memperoleh solusi dibandingkan dengan MJac dan MGS. Berikut adalah tabel perbandingan spektral radius MJac, MGS dan MGSP. Pada Tabel 3 nilai spektral radius (ρ) dari ketiga

Tabel 3: Hasil Perbandingan Spektral Radius MJac, MGS dan MGSP

Ukuran	MJac	MGS	MGSP
Matriks A	$\rho(T_{MJac})$	$\rho(T_{MGS})$	$\rho(T_{MGSP})$
8×8	0.658263	0.456791	0.359329
25×25	0.784789	0.630547	0.609572
99×99	0.964934	0.931275	0.929718
225×225	0.987424	0.975062	0.974839
525×525	0.998219	0.996443	0.996430
961×961	0.998346	0.996695	0.996687

metode mempunyai nilai perbedaan yang signifikan dengan $\rho(T_{MGSP}) < \rho(T_{MGS}) < \rho(T_{MJac}) < 1$. Jadi dapat disimpulkan bahwa matriks prekondisi sangatlah berpengaruh terhadap kekonvergenan suatu metode iterasi untuk mencari solusi sistem persamaan linear.

UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Supriadi Putra, M. Si dan Bapak Zulkarnain, M. Si. yang telah memberikan arahan dan bimbingan dalam penulisan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Berman, A & Robert, J.P. 1994. *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences, Ninth Edition*, SIAM. Philadelpia.

[2] Burden, R. L & Faires, J.D. 2010. *Numerical Analysis, Ninth Edition*, Brooks Cole. New York.

[3] Evans, D.J, Martins, M.M & Trigo. M.E. 2001. The AOR Iterative Method for New Preconditioned Lynear Systems. *Applied Mathematics*, 132 : 461–466.

[4] Gunawardena, S.D, Jain, S.K. & Snyder, L. 1991. Modified Iterative Methods For Consistent Linear Systems. *Applied Linear Algebra*, 154 : 123–143.

[5] Kincaid, D. & Cheney, W. 1991. *Numerical Analysis Mathematics of Scientific Computing*. Brooks/Cole Publishing Company, California.

[6] Yun, J.H. 2012. Comparison Result For The Preconditioned Gauss-Seidel Methods. *Applied Mathematics Letters*, 27 : 207-215.