

DERAJAT VERTEKS GRAF TERHADAP HIMPUNAN VERTEKS

Fauziah Arani^{1*}, Rolan Pane², Endang Lily²

¹Mahasiswa Program Studi S1 Matematika

²Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293) Indonesia

*fauziah@yahoo.com

ABSTRACT

This article discusses methods to define the degrees of the graph vertex. These methods include union, intersection, and difference symmetric from vertex set. Based on this definition the relation between the degrees of the graph vertex and vertexset is obtained. An example is given to illustrate the implementation of the methods.

Keyword: *Degree of vertex, vertexset, union, intersection and symmetric difference.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas metode untuk menentukan derajat verteks dari sebuah graf. Metode ini meliputi gabungan, irisan, dan beda simetris dari himpunan. Berdasarkan definisi, antara derajat verteks graf dan himpunan verteks juga diperoleh hubungan dengan membuktikan beberapa perluasan dari derajat verteks. Sebuah Contoh disajikan untuk memperlihatkan implementasi dari metode yang dibahas.

Kata kunci: *Derajat verteks, himpunan verteks, gabungan, selisih dan beda simetris.*

1. PENDAHULUAN

Teori graf merupakan bagian dari matematika yang telah tua usianya, namun masih dipelajari hingga sekarang. Graf adalah diagram tertentu yang memuat informasi jika dipahami secara tepat. Salah satu konsep pada graf sederhana adalah derajat verteks $G = (V, E)$ yaitu dengan V adalah verteks graf dan E adalah sisi, yang dinotasikan dengan $d(v_i)$ atau $d_G(v_i)$ dengan $v_i \in V$ yang menunjukkan banyaknya verteks $v_i \in V$ bersisian dengan $v_j \in V$, untuk $v_i \neq v_j$ ($i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$). Derajat verteks graf $d_G(v_i)$ merupakan konsep yang sudah lama dikenal dan dipelajari hingga sekarang menjadi sebuah ilmu pengetahuan yang sangat bermanfaat dalam kehidupan nyata.

Pada tahun 1736 seorang ahli matematika berkebangsaan Swiss bernama Euler dapat memecahkan masalah jembatan *Konigsberg* yang mana apakah mungkin melalui ketujuh buah jembatan itu masing-masing tepat satu kali, dan kembali lagi ke tempat semula [4]. Euler adalah orang pertama yang berhasil menemukan jawaban masalah itu

dengan pembuktian yang sederhana, ia memodelkan masalah ini ke dalam graf. Maka menurut sejarah, masalah jembatan ini adalah masalah pertama kali menggunakan graf. Di dalam uraian teori graf bahwa pada konsep derajat graf sering dipermasalahkan tentang jumlah derajat setiap verteks pada graf, selanjutnya dengan menganalisa derajat setiap verteks pada graf dapat ditemukan sifat-sifat hubungan antara verteks dan sisi, dan beberapa teorema graf.

Adapun langkah pemecahan tersebut diselesaikan dengan didasari atas teorema tentang derajat verteks. Selanjutnya berdasarkan [2] dapat mendefinisikan konsep baru pada graf sederhana $G = (V, E)$, yaitu derajat verteks graf terhadap himpunan verteks A yang menunjukkan banyaknya verteks dalam A bertetangga dengan verteks $v_i \in V$. Hal yang menarik untuk diperhatikan pada konsep baru tersebut adalah verteks $v_i \in A$ tidak selalu harus $v_i \in V$. Oleh karena itu dapat terjadi A merupakan hasil operasi dari beberapa himpunan verteks. Selain itu dapat dibentuk juga graf G adalah hasil operasi penjumlahan dari dua graf G_1 dan G_2 . Selanjutnya di dalam artikel ini akan diteliti hubungan antara derajat verteks graf $d_G(v_i)$ dan derajat verteks graf terhadap himpunan verteks A , $d_A(v_i) \forall v_i \in V$.

2. DERAJAT VERTEKS GRAF DAN DERAJAT VERTEKS PADA HIMPUNAN VERTEKS

Derajat verteks graf terhadap himpunan verteks merupakan konsep baru dari graf, himpunan, graf dan derajat verteks graf merupakan dasar dari derajat verteks terhadap himpunan verteks dan didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1[4, h. 48] Himpunan adalah kumpulan objek-objek yang berbeda.

Definisi 2[3, h.1] Sebuah graf $G(V, E)$ terdiri dari dua bagian:

- (i). Sebuah himpunan $V = V(G)$ memiliki elemen-elemen yang dinamakan verteks, titik, atau *node*.
- (ii). Sebuah himpunan $E = E(G)$ merupakan pasangan terurut dari *node-node* yang berbeda dinamakan ruas atau *edge*.

Definisi 3[1, h. 14] Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf sederhana dan A adalah sebarang himpunan verteks. Derajat verteks $v_i \in V$ pada graf G terhadap A adalah jumlah verteks A yang bertetangga (*adjacent*) dengan v_i . Derajat ini dinotasikan dengan $d_A(v_i)$.

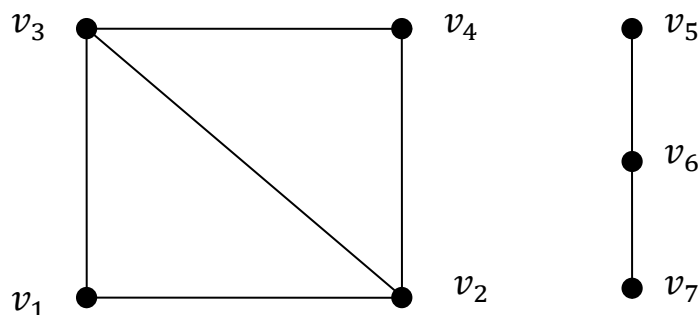
Berdasarkan Definisi 3 dapat diketahui bahwa

1. Jika $A = \emptyset$ maka $d_A(v_i) = 0, \forall v_i \in V$.
2. Jika $A = V$ maka $d_A(v_i) = d(v_i), \forall v_i \in V$.

Selain itu derajat verteks $v_i \in V$ terhadap A , $d_A(v_i)$ dapat diketahui $A \subseteq V$ atau $A \not\subseteq V$, dan dari Definisi 3 dapat dikatakan $d_A(v_i) = 0$, bila $A \cap V = \emptyset$, dan $d_A(v_i) = d_G(v_i)$, bila $A = V$.

Contoh:

Diketahui graf $G = (V, E)$ adalah graf sederhana dan jika $A = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$, Berapakah derajat verteks pada graf A yang tampak pada Gambar 1?



Gambar 1. Graf Sederhana

Penyelesaian

Berdasarkan Definisi 3 diperoleh,

$$\begin{aligned} d_A(v_1) &= 1, & d_A(v_2) &= 2, & d_A(v_3) &= 1, \\ d_A(v_4) &= 1, & d_A(v_5) &= 0, & d_A(v_6) &= 2, & d_A(v_7) &= 0. \end{aligned}$$

Selanjutnya berdasarkan Definisi 3 juga diperoleh

- i. Jika A adalah himpunan verteks maka,
 $d_A(v_i) \leq d_G(v_i), v_i \in V$.
- ii. Jika A adalah himpunan verteks maka,
 $d_G(v_i) = d_A(v_i) + d_{A'}(v_i), \forall v_i \in V$.
 Untuk A' adalah komplemen A .

Selanjutnya diperoleh ,

$$2q = \sum_{v_i \in A} d(v_i) = \sum_{v_i \in A} d_A(v_i) + \sum_{v_i \in A'} d_A(v_i). \quad (2)$$

Sedangkan q adalah jumlah selisih pada graf G .

$$\text{iii. } \sum_{v_i \in A} d_{A'}(v_i) = \sum_{v_i \in A'} d_A(v_i). \quad (3)$$

3. DERAJAT VERTEKS PADA OPERASI DUA HIMPUNAN VERTEKS

Pada Bagian 3 ini diuraikan hubungan derajat verteks G dan derajat verteks pada himpunan verteks A sebagai berikut.

Teorema 4[2] Jika $G = (V, E)$ adalah graf sederhana dan A himpunan verteks maka

$$\sum_{v_i \in V} d_A(v_i) = \sum_{v_i \in A} d(v_i).$$

Bukti:

Perhatikan $\sum_{v_i \in V} d_A(v_i)$. Jika $A = V$ maka $d_A(v_i) = d(v_i) \forall v_i \in V$, sehingga

$$\sum_{v_i \in V} d_A(v_i) = \sum_{v_i \in A} d(v_i),$$

Karena pada himpunan verteks $V = A \cup A'$

$$\sum_{v_i \in V} d_A(v_i) = \sum_{v_i \in V} d_A(v_i) + \sum_{v_i \in V} d_{A'}(v_i), \quad (4)$$

Berdasarkan persamaan (4), maka pada persamaan (5) diperoleh

$$\sum_{v_i \in V} d_A(v_i) = \sum_{v_i \in A} [d_A(v_i) + d_{A'}(v_i)]. \quad (5)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3) ke dalam persamaan (5) maka diperoleh

$$\sum_{v_i \in V} d_A(v_i) = \sum_{v_i \in A} d(v_i). \quad \blacksquare$$

Selanjutnya diberikan sifat-sifat derajat verteks pada operasi dua himpunan, masing-masing operasi gabungan, selisih dan beda simetris.

3.1 Operasi Gabungan Dua Himpunan Verteks

Teorema 5[2] Jika $G = (V, E)$ adalah graf sederhana, maka himpunan verteks A dan B adalah

$$\sum_{v_i \in V} d_{A \cup B}(v_i) = \sum_{v_i \in V} d_A(v_i) + \sum_{v_i \in V} d_B(v_i) - \sum_{v_i \in V} d_{A \cap B}(v_i).$$

Bukti:

Jika $\sum_{v_i \in V} d_{A \cup B}(v_i)$ adalah jumlah derajat verteks graf G himpunan verteks $A \cup B$,

dan $\sum_{v_i \in A \cap B} d(v_i)$ adalah jumlah derajat verteks G maka menurut Teorema 4 diperoleh

$$\sum_{v_i \in V} d_{A \cup B}(v_i) = \sum_{v_i \in A \cup B} d(v_i). \quad (6)$$

Karena $E(A \cup B) = E(A) + E(B) - E(A \cap B)$, maka pada persamaan (6)

$$\text{diperoleh } \sum_{v_i \in V} d_{A \cup B}(v_i) = \sum_{v_i \in V} d_A(v_i) + \sum_{v_i \in V} d_B(v_i) - \sum_{v_i \in V} d_{A \cap B}(v_i). \quad \blacksquare$$

Perhatikan kembali Teorema 5, jika $A \cap B = \emptyset$, maka

$$\sum_{v_i \in V} d_{A \cup B}(v_i) = \sum_{v_i \in A} d(v_i) + \sum_{v_i \in B} d(v_i).$$

$$\text{Karena } \sum_{v_i \in V} d_{A \cap B}(v_i) = 0.$$

3.2 Operasi Selisih

Teorema 6[2] Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf sederhana jika A dan B dua himpunan verteks maka

$$\sum_{v_i \in V} d_{A-B}(v_i) = \sum_{v_i \in V} d_A(v_i) - \sum_{v_i \in V} d_{A \cap B}(v_i).$$

Bukti:

Jika $\sum_{v_i \in V} d_{A-B}(v_i)$ adalah jumlah derajat verteks G terhadap selisih dua himpunan verteks dan $\sum_{v_i \in A-B} d(v_i)$ adalah jumlah derajat verteks graf G maka menurut Teorema 4 diperoleh

$$\sum_{v_i \in V} d_{A-B}(v_i) = \sum_{v_i \in A-B} d(v_i).$$

Karena $E(A - B) = E(A) - E(A \cap B)$, maka dari persamaan di atas diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{v_i \in V} d_{A-B}(v_i) &= \sum_{v_i \in A} d(v_i) - \sum_{v_i \in A \cap B} d(v_i), \\ &= \sum_{v_i \in V} d_A(v_i) - \sum_{v_i \in V} d_{A \cap B}(v_i) \end{aligned} \quad (7)$$

Dari persamaan (7) terbukti bahwa

$$\sum_{v_i \in V} d_{A-B}(v_i) = \sum_{v_i \in V} d_A(v_i) - \sum_{v_i \in V} d_{A \cap B}(v_i) \quad \blacksquare$$

3.3 Operasi Beda Simetris

Teorema 7[2] Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf sederhana. Jika A dan B dua himpunan verteks maka,

$$\sum_{v_i \in V} d_{A \Delta B}(v_i) = \sum_{v_i \in V} d_A(v_i) + \sum_{v_i \in V} d_B(v_i) - 2 \sum_{v_i \in V} d_{A \cap B}(v_i).$$

Bukti:

Jika $\sum_{v_i \in V} d_{A \Delta B}(v_i)$ adalah jumlah derajat verteks G terhadap himpunan verteks dan $\sum_{v_i \in A \Delta B} d(v_i)$ adalah jumlah derajat verteks, maka menurut Teorema 4 diperoleh.

$$\sum_{v_i \in V} d_{A \Delta B} = \sum_{v_i \in A \Delta B} d(v_i).$$

Karena $E(A \Delta B) = E(A - B) + E(B - A)$

Maka dari persamaan diatas diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{v_i \in V} d_{A \Delta B} &= \sum_{v_i \in A-B} d(v_i) + \sum_{v_i \in B-A} d(v_i), \\ &= \sum_{v_i \in A} d(v_i) - \sum_{v_i \in A \cap B} d(v_i) + \sum_{v_i \in B} d(v_i) - \sum_{v_i \in B \cap A} d(v_i), \\ &= \sum_{v_i \in V} d(v_i) + \sum_{v_i \in B} d(v_i) - 2 \sum_{v_i \in A \cap B} d(v_i). \end{aligned}$$

Dari persamaan diatas terbukti bahwa

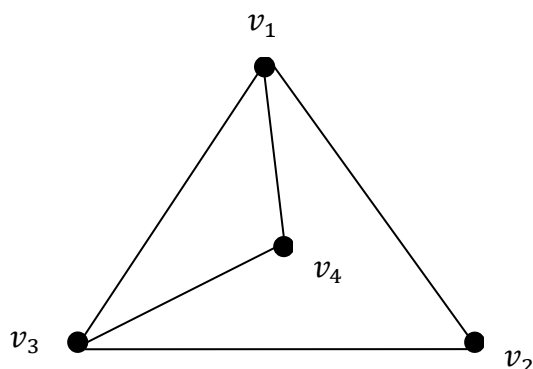
$$\sum_{v_i \in V} d_{A \Delta B} = \sum_{v_i \in V} d_A(v_i) + \sum_{v_i \in V} d_B(v_i) - 2 \sum_{v_i \in V} d_{A \cap B}(v_i) \quad \blacksquare$$

Contoh

Diketahui sebuah graf $G = (V, E)$, dimana $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,

dan $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4)\}$. Misalkan $A = \{v_1, v_2, v_3\}$, $B = \{v_3, v_4\}$.

Selanjutnya dapat direpresentasikan dalam bentuk graf,



Gambar 2. Graf Sederhana

Maka dengan menggunakan Teorema 5 dihasilkan

$$\begin{aligned}\sum_{v_i \in V} d_{A \cup B}(v_i) &= \sum_{v_i \in V} d_A(v_i) + \sum_{v_i \in V} d_B(v_i) - \sum_{v_i \in V} d_{A \cap B}(v_i), \\ &= (2 + 2 + 2 + 2) + (2 + 1 + 1 + 1) + (3 + 2 + 3 + 2), \\ &= 8 + 5 + 10, \\ &= 25.\end{aligned}$$

Selanjutnya dengan menggunakan Teorema 6, dihasilkan

$$\begin{aligned}\sum_{v_i \in V} d_{A-B}(v_i) &= \sum_{v_i \in V} d_A(v_i) - \sum_{v_i \in V} d_{A \cap B}(v_i), \\ &= (2 + 2 + 2 + 2) + (3 + 2 + 3 + 2), \\ &= 8 + 10, \\ &= 18.\end{aligned}$$

Terakhir dengan menggunakan Teorema 7, maka

$$\begin{aligned}\sum_{v_i \in V} d_{A \Delta B}(v_i) &= \sum_{v_i \in V} d_A(v_i) + \sum_{v_i \in V} d_B(v_i) - 2 \sum_{v_i \in V} d_{A \cap B}(v_i), \\ &= (2 + 2 + 2 + 2) + (2 + 1 + 1 + 1) + 2(3 + 2 + 3 + 2), \\ &= 8 + 5 + 2(10), \\ &= 13 + 20, \\ &= 33.\end{aligned}$$

4. KESIMPULAN

Pada graf $G = (V, E)$ dapat didefinisikan dengan sebuah himpunan V memiliki verteks-verteks dan sebuah himpunan E yang memiliki pasangan sisi atau *edge* secara terurut, Derajat verteks terhadap satu himpunan verteks A yang dinotasikan dengan $d_A(v_i)$, $\forall v_i \in A$, jika $v_i \in A$ dan $v_i \notin A \cap V$ maka diperoleh $d_A(v_i) = 0$, dan derajat verteks terhadap satu himpunan A dapat diperluas dengan operasi himpunan verteks, yaitu gabungan, selisih dan beda simetris himpunan verteks. Selain itu dari definisi juga didapatkan hubungan antara derajat verteks graf yang baru dengan derajat verteks biasa. Oleh karena itu derajat verteks graf terhadap himpunan verteks $d_A(v_i)$ dapat berguna bila bertujuan untuk membatasi derajat verteks $d(v_i)$.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Harary, F. 1969. *Graph Theory*. Addison Wesley, Philippines.
- [2] Kanna, R. M. R., B. N. Dharmendra, G. Sridhara, & R. P. Kumar. 2013. Some Results On The Degree Of a Vertex of a Graph with Respect to Any Vertexset. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, **8**(3): 125-131.
- [3] Lipschutz, S & L. L. March. 2002. *Matematika Diskrit*. Terj. Solved Problems in Discrete Mathematics Oleh Tim Penerbit Salemba Teknika. Salemba Teknika, Jakarta.
- [4] Liu, C. L. 1995. *Dasar-Dasar Matematika Diskret Edisi Kedua*. PT Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.