METODE NEWTON-STEFFENSEN DENGAN ORDE KEKONVERGENAN TIGA UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NONLINEAR

Fitriani[1*], Johannes Kho[2], Supriadi Putra[2]

[1]Mahasiswa Program Studi S1 Matematika FMIPA Universitas Riau
[2]Dosen JurusanMatematika FMIPA Universitas Riau
Fakultas Matematika dan ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*anifitri551@gmail.com

ABSTRACT

This article discusses Newton-Steffensen method to solve a nonlinear equation. The method is obtained by combining Newton's method with Steffensen's method. The proposed method has third order convergence. Computational examples illustrate that the discussed method is better than Newton method and Steffensen method in terms of obtaining the root for same initial guesses.

Keywords : nonlinear equation, Newton method, Steffensen method, Newton-Steffensen method.

ABSTRAK

Artikel ini mendiskusikan metode Newton-Steffensen untuk menyelesaikan persamaan nonlinear. Metode ini diperoleh dengan mengkombinasikan metode Newton dengan metode Steffensen. Secara analitik dan komputasi ditunjukkan bahwa metode ini mempunyai orde kekonvergenan tiga. Contoh komputasi menggambarkan bahwa metode yang didiskusikan unggul dari metode Newton dan Steffensen dalam hal kesuksesan mendapatkan akar untuk tebakan awal yang sama.

Kata kunci : Persamaan nonlinear, metode *Newton*, metode *Steffensen*, metode *Newton-Steffensen.*

1. PENDAHULUAN

Menyelesaikan suatu persamaan nonlinear

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

adalah topik yang sangat penting di bidang matematika khususnya analisis numerik. Banyak metode numerik yang dapat digunakan, salah satunya yaitu metode Newton, yang menggunakan satu tebakan awal dalam menemukan akar hampiran dari persamaan nonlinear, dan bentuk iterasinya dinyatakan oleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0,1,2,.... \tag{2}$$

dengan $f'(x_n) \neq 0$. Metode Newton konvergen kuadratik [1]

Metode lain yang juga sering digunakan adalah metode Steffensen, yang merupakan modifikasi dari metode Newton. Metode Steffensen juga menggunakan satu tebakan awal dalam proses iterasinya. Formula iterasinya dinyatakan dengan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g(x_n)},\ n = 0,1,2,... \tag{3}$$

dengan $g(x_n) = \dfrac{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}{f(x_n)}$ merupakan aproksimasi untuk turunan $f'(x_n)$.

Metode Steffensen juga mempunyai orde konvergensi kuadratik [2]. Dalam perkembangannya, modifikasi dari suatu metode iterasi juga dilakukan dengan mengkombinasikan penggunaan beberapa metode yang sudah ada sebelumnya. Misalnya J.R. Sharma melakukan penggabungan dua metode yaitu metode Newton dan metode Steffensen. Dalam artikel ini penulis mempelajari ulang artikel yang ditulis oleh J. R. Sharma [3]yang berjudul*"A Composite Third Order Newton-Steffensen Method for Solving Nonlinear Equations"*.

2. METODE NEWTON-STEFFENSEN

Definisi 1

Misalkan $\sim$ adalah akar dari persamaan nonlinear $f(x) = 0$, $\sim \in \Re$. Barisan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ yang dihasilkan oleh suatu metode iterasi dikatakan konvergen ke $\sim$ jika memenuhi

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - \sim| = 0.$$

Definisi 2

Asumsikan $e_n = x_n - \sim$ sebagai nilai error untuk iterasi ke-*n* untuk $n \geq 0$, maka relasi

$$e_{n+1} = Ce_n^p + O\left(e_n^{p+1}\right)$$

disebut persamaan error dengan orde kekonvergenan p .

Disini akan diuraikan proses terbentuknya metode Newton-Steffensen dari penggabungan metode Newton dengan metode Steffensen dan akan membuktikan metode Newton-Steffensen dengan orde kekonvergenan tiga. Selanjutnya akan dilakukan uji komputasi untuk membandingkan metode Newton, metode Steffensen dan metode Newton-Steffensen.

2.1 Proses Terbentuknya Metode Newton-Steffensen

Misalkan ~ adalah akar dari persamaan nonlinear $f(x) = 0$ dan x_0 adalah nilai tebakan awal yang diberikan. Menggunakan bentuk metode Newton dapat diformulasikan suatu bentuk iterasi baru

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g(x_n)}, n = 0,1,2,... \tag{4}$$

dengan $g(x_n)$ adalah bentuk aproksimasi untuk turunan pertama $f'(x_n)$. Misalkan

$$g(x_n) = \frac{f(x_n + s(x_n) f(x_n)) - f(x_n)}{s(x_n) f(x_n)}$$

dengan $s(x_n)$ adalah fungsi sebarang. Substitusikan $g(x_n)$ kepersamaan (4) sehingga diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n + s(x_n) f(x_n)) - f(x_n)}{s(x_n) f(x_n)}}$$

atau

$$x_{n+1} = x_n - \frac{s(x_n) f^2(x_n)}{f(x_n + s(x_n) f(x_n)) - f(x_n)}. \tag{5}$$

Apabila $s(x_n) = 1$ maka persamaan (5) adalah iterasi metode Steffensen. Apabila $s(x_n) = -\dfrac{1}{f'(x_n)}$, maka persamaan (5) menjadi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f^2(x_n)}{f'(x_n)\left(f(x_n) - f\left(x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right)\right)},$$

atau

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f^2(x_n)}{f'(x_n)\left(f(x_n) - f(x_n^*)\right)} \tag{6}$$

dengan

$$x_n^* = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{7}$$

Bentuk iterasi persamaan (6) ini terlihat mirip dengan bentuk iterasi metode Steffensen, dimana tahap awal yang dilakukan adalah menggunakan metode Newton untuk menghitung x_n^*. Karena alasan ini, maka bentuk iterasi persamaan (6) ini diberi nama metode Newton-Steffensen.

2.2 Analisis Kekonvergenan

Teorema 1

Misalkan $f : D \subset \Re \to \Re$ merupakan fungsi terdiferensialkan secukupnya dengan akar sederhana $\sim$, $f^{'}(\sim) \neq 0$ dimana $\sim \in D$ dan x_0 cukup dekat ke $\sim$ maka metode Newton-Steffensen pada persamaan (6) konvergen ke $\sim$ dengan orde kekonvergenan tiga yang memenuhi persamaan error

$$e_{n+1} = A_2^2 e_n^3 + O(e_n^4), \tag{8}$$

dengan $e_n = x_n - \sim$ dan $A_2 = \dfrac{f^{''}(\sim)}{2 f^{'}(\sim)}$.

Bukti

Misalkan e_n adalah error untuk iterasi ke n, dengan $e_n = x_n - \sim$.

Dengan menggunakan ekspansi Taylor untuk $f(x_n)$ disekitar $x_n = \sim$ diperoleh

$$f(x_n) = f(\sim) + f^{'}(\sim)(x_n - \sim) + \frac{1}{2} f^{''}(\sim)(x_n - \sim)^2 + \frac{1}{6} f^{'''}(\sim)(x_n - \sim)^3 + O\left((x_n - \sim)^4\right)$$

Karena $f(\sim) = 0$ dan $e_n = x_n - \sim$, maka

$$f(x_n) = f^{'}(\sim)e_n + \frac{1}{2} f^{''}(\sim)e_n^2 + \frac{1}{6} f^{'''}(\sim)e_n^3 + O\left(e_n^4\right). \tag{9}$$

Misalkan

$$A_n = \frac{f^{n}(\sim)}{n!\, f^{'}(\sim)}, n = 2,3,... \tag{10}$$

maka persamaan (9) menjadi

$$f(x_n) = f^{'}(\sim)\left(e_n + A_2 e_n^2 + A_3 e_n^3\right) + O\left(e_n^4\right). \tag{11}$$

Dengan cara yang sama ekspansikan $f^{'}(x_n)$ disekitar $x_n = \sim$ sehingga diperoleh

$$f^{'}(x_n) = f^{'}(\sim)\left(1 + 2A_2 e_n + 3A_3 e_n^2\right) + O\left(e_n^3\right). \tag{12}$$

Persamaan (11) dibagi dengan persamaan (12) menghasilkan bentuk

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{e_n + A_2 e_n^2 + A_3 e_n^3 + O(e_n^4)}{1 + 2A_2 e_n + 3A_3 e_n^2 + O(e_n^3)}.$$

Perhatikan bentuk $\frac{1}{f'(x_n)}$. Misalkan

$$r = 2A_2 e_n + 3A_3 e_n^2 + O(e_n^3).$$

Dengan menggunakan deret geometri $\frac{1}{(1+r)} = 1 - r + r^2 + \ldots$ diperoleh

$$1 - r + r^2 = 1 - 2A_2 e_n - 3A_3 e_n^2 + 4A_2^2 e_n^2 + O(e_n^3), \qquad (13)$$

sehingga setelah penyederhanaan didapat

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - A_2 e_n^2 - 2A_3 e_n^3 + 2A_2^2 e_n^3 + O(e_n^4). \qquad (14)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (14) ke persamaan (7) maka diperoleh

$$x_n^* = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= (e_n + \sim) - e_n + A_2 e_n^2 + 2A_3 e_n^3 - 2A_2^2 e_n^3 - O(e_n^4)$$

atau

$$x_n^* = \sim + A_2 e_n^2 + 2A_3 e_n^3 - 2A_2^2 e_n^3 - O(e_n^4). \qquad (15)$$

Selanjutnya dengan menggunakan ekspansi Taylor untuk $f(x_n^*)$ disekitar $x_n^* = \sim$ diperoleh

$$f(x_n^*) = f(\sim) + f'(\sim)(x_n^* - \sim) + \frac{1}{2} f''(\sim)(x_n^* - \sim)^2 + \frac{1}{6} f'''(\sim)(x_n^*)^3 + O((x_n^* - \sim)^4)$$

Karena $f(\sim) = 0$ maka

$$f(x_n^*) = f'(\sim)(x_n^* - \sim) + \frac{1}{2} f''(\sim)(x_n^* - \sim)^2 + \frac{1}{6} f'''(\sim)(x_n^* - \sim)^3 + O((x_n^* - \sim)^4).$$

(16). Setelah penyederhanaan persamaan (16) dapat ditulis sebagai

$$f(x_n^*) = A_2 f'(\sim) e_n^2 + (2A_3 - 2A_2^2) f'(\sim) e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (17)$$

dengan A_n seperti pada persamaan (10). Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (11), (12), dan (17) diperoleh

$$\frac{f^2(x_n)}{f'(x_n)\left(f(x_n)-f(x_n^*)\right)}=\frac{\left(1+A_2e_n+A_3e_n^2+O\left(e_n^4\right)\right)^2}{1+2A_3e_n^2+2A_2^2e_n^2+2A_2e_n-2A_2A_3+4A_2^3e_n^3+O\left(e_n^4\right)}$$

(18)

Perhatikan penyebut pada persamaan (18). Misalkan

$$r=2A_3e_n^2+2A_2^2e_n^2+2A_2e_n-2A_2A_3+4A_2^3e_n^3+O\left(e_n^4\right),$$

Maka dengan menggunakan deret geometri $\frac{1}{1+r}=1-r+r^2-r^3\ldots$ diperoleh

$$1-r+r^2-r^3=1-2A_3e_n+2A_2^2e_n^2-2A_2e_n+10A_2A_3e_n^3-4A_2^3e_n^3+O\left(e_n^4\right),$$

sehingga

$$\frac{f^2(x_n)}{f'(x_n)\left(f(x_n)-f(x_n^*)\right)}=\left(1+A_2e_n+A_3e_n^2\right)^2\left(1-2A_3e_n+2A_2^2e_n^2-2A_2e_n\right.$$

$$\left.+10A_2A_3e_n^3-4A_2^3e_n^3\right)+O\left(e_n^4\right). \qquad (19)$$

Selanjutnya persamaan (19) disubstitusikan ke persamaan (6), dan setelah penyederhanaan diperoleh

$$x_{n+1}=x_n-\left(e_n-A_2^2e_n^3\right)+O\left(e_n^4\right)$$

$$=\left(e_n+\sim\right)-\left(e_n-A_2^2e_n^3\right)+O\left(e_n^4\right)$$

$$x_{n+1}=\sim+A_2^2e_n^3+O\left(e_n^4\right)$$

atau

$$e_{n+1}=A_2^2e_n^3+O\left(e_n^4\right). \qquad (20)$$

Berdasarkan Definisi 2 maka metode Newton-Steffensen memiliki orde kekonvergenan tiga. $\blacksquare$

Contoh 1 Tentukan akar hampiran dari persamaan nonlinear $\sin(x)-\frac{x}{2}=0$ dengan menggunakan metode Newton-Steffensen untuk tebakan awal $x_0=2$. Hasil komputasi dari persamaan nonlinear di atas yang dihitung menggunakan software Maple dapat dilihat pada tabel berikut.

Kriteria pemberhentian komputasi yaitu apabila $|x_n - x_{n-1}| \leq$ toleransi, jumlah iterasi melebihi maksimum iterasi dengan jumlah maksimum 100 iterasi atau nilai fungsi $|f(x_n)| \leq$ toleransi dengan toleransi $= 2.2x10^{-22}$.

Tabel 1 : Hasil komputasi Contoh 1 menggunakan metode Newton-Steffensen

n	x_n	$\|f(x_n)\|$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
1	1.8958030774617193157499	2.52967885e-04	1.04196923e-01
2	1.8954942670438331019418	8.06913669e-12	3.08810418e-04
3	1.8954942670339809471440	2.62194032e-34	9.85215480e-12

Dari Tabel 1 dapat dilihat bahwa proses metode Newton-Steffensen berhenti setelah iterasi ke-3 karena nilai fungsi pada iterasi ke-3 lebih kecil dari toleransi dengan akar hampirannya adalah $x_3 = 1.8954942670339809471440$.

3. UJI KOMPUTASI

Pada bagian ini akan dilakukan uji komputasi untuk membandingkan jumlah iterasi pada metode Newton (MN), metode Steffensen (MS), Newton-Steffensen (MNS). Fungsi nonlinear yang digunakan adalah

1. $f_1(x) = \tan^{-1}(x)$, pada [1,4]
2. $f_2(x) = \sin(x) - \frac{x}{2}$, pada [0.5,2.1]
3. $f_3(x) = 10xe^{(-x)^2} - 1$, pada [0,1]
4. $f_4(x) = x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720$, pada [14,16]
5. $f_5(x) = x\log10(x) - 1.2$, pada [0.5,4]

Tabel 2 menggunakan tiga tebakan awal untuk masing-masing fungsi. Pemilihan tebakan awal menggunakan criteria sederhana. Tebakan awal yang pertama dipilih cukup dekat dengan akar dari persamaan nonlinear yang dicari, tebakan awal yang kedua cukup jauh dengan akar dan tebakan awal yang ketiga jauh dari akar persamaan nonlinear. Pada Tabel 2 terdapat istilah gagal. Ada beberapa alasan yang menyebabkan metode dikatakan gagal menemukan akar hampiran. Diantaranya akar hampiran yang ditemukan divergen, jika akar hampiran konvergen tetapi tidak mencapai akar yang diharapkan, dan iterasi yang dihasilkan melebihi maksimum iterasi.

Pada Tabel 2 juga dapat dilihat bahwa untuk masing-masing metode dengan tebakan awal yang sudah ditentukan metode Newton-Steffensen memerlukan iterasi yang lebih sedikit jika dibandingkan dengan metode Newton dan metode Steffensen untuk mendapatkan akar hampiran yang diharapkan. Artinya metode Newton-Steffensen lebih cepat menemukan akar hampiran dari pada metode Newton dan metode Steffensen.

Dari hasil komputasi terlihat bahwa tebakan awal sangat berpengaruh terhadap metode untuk menghampiri akar. Hal ini terlihat pada kondisi yang berbeda setiap pemilihan tebakan awal. Ketika ketiga metode yang diterapkan berhasil mencapai akar hampiran yang diharapkan, hal ini menunjukkan bahwa pemilihan tebakan awal tepat untuk ketiga metode. Dari hasil komputasi terlihat metode Newton-Steffensen lebih cepat mencapai akar hampiran dan tidak pernah gagal dibandingkan metode Newton dan metode Steffensen, ini menunjukkan bahwa metode Newton-Steffensen tidak rentan terhadap tebakan awal yang menjauhi akar.

Tabel 2 : Perbandingan Metode Newton (MN), Metode Steffensen (MS), Metode Newton-Steffensen (MNS)

$f_i(x)$	Akar	x_0	Jumlah iterasi		
			MN	MS	MNS
$f_1(x)$	0.0000000000000000000000	-1.0	5	gagal	3
		0.5	4	5	3
		2.0	Gagal	gagal	4
$f_2(x)$	1.8954942670339809471440	1.5	6	7	4
		2.0	5	4	3
		3.0	6	5	4
$f_3(x)$	1.6796306104284499406749	1.0	6	gagal	4
		1.5	6	6	3
		2.0	6	6	4
$f_4(x)$	15.9828739806017017825458	14.5	11	gagal	8
		15.0	7	gagal	5
		15.5	16	gagal	4
$f_5(x)$	2.7406460959736931287259	2.0	5	5	3
		2.5	6	5	3
		7.0	6	6	4

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Cheney, W. & Kincaid, D. 1994.*Numerical Mathematics and Computer, Third edition.*Brooks / Cole Publishing Company. California.

[2] Q. Zheng, J. Wang, P. Zhao, L. Zhang.2009. A Steffensen Method and its Higher-order Variants.*Applied Mathematics and Computation*, 214:10-16.

[3] Sharma, J.R. 2005.A Composite third Order Newton-Steffensen Method for Solving Nonlinear Equations. *Applied Mathematics and Computation* 169 : 242-246.