

**PENAKSIR RASIO DAN PENAKSIR REGRESI YANG EFISIEN
UNTUK RATA-RATA POPULASI PADA SAMPLING ACAK SEDERHANA
MENGUNAKAN DEVIASI KUARTIL DAN KOEFISIEN SKEWNESS**

Linda Veronika^{1*}, Sigit Sugiarto², Rustam Efendi²

¹ Mahasiswa Program Studi S1 Matematika

² Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*Lindaveronica266@gmail.com

ABSTRACT

In this article the combination of ratio estimators and ratio-regression in simple random sampling using quartile deviation and coefficient of skewness are discussed, which is a review from the article *Jeelani et.al. [International Journal of Modern Mathematical Sciences, 6(3): 174-183]*. These estimators are biased estimators and their mean square errors are determined. Estimator with the smallest mean square error is the most efficient estimator. A numerical example is given at the end of discussion.

Keywords: *simple random sampling, linear combination, quartil deviation, coefficient of skewness, mean square error.*

ABSTRAK

Pada artikel ini penaksir yang dibahas merupakan kombinasi penaksir rasio dan penaksir rasio-regresi pada sampling acak sederhana menggunakan deviasi kuartil dan koefisien *skewness*, yang merupakan review dari artikel *Jeelani et.al. [International Journal of Modern Mathematical Sciences, 6(3): 174-183]*. Masing-masing penaksir merupakan bias dan ditentukan *means square error*. Penaksir dengan *mean square error* terkecil merupakan penaksir yang efisien. Contoh numerik diberikan pada akhir pembahasan.

Kata kunci: *sampling acak sederhana, kombinasi linear, deviasi kuartil, koefisien skewness, mean square error.*

1. PENDAHULUAN

Penaksir rasio merupakan suatu metode yang digunakan untuk meningkatkan ketelitian suatu penaksir. Misalkan suatu populasi berhingga U terdiri dari N unit U_1, U_2, \dots, U_N dan misalkan y_i merupakan variabel yang akan diteliti dan variabel x_i telah diteliti sebelumnya, dengan mengambil manfaat hubungan antara y_i dan x_i

dimana y_i adalah unit dari populasi berkarakter Y dan x_i adalah unit dari populasi berkarakter X dan masing-masing populasi tersebut merupakan sub populasi U , sehingga variabel x_i dapat digunakan sebagai variabel bantu untuk menaksir variabel y_i [1]. Penaksir rasio untuk rata-rata populasi \bar{Y} dari variabel yang diteliti Y dinotasikan dengan \hat{Y}_R . Dalam pembahasan ini hubungan antara dua variabel dibatasi untuk hubungan yang berkorelasi positif. Penaksir rasio untuk rata-rata populasi telah banyak dikembangkan oleh para peneliti. Sisodia dan Dwivedi [6] mengajukan penaksir rasio dengan menggunakan informasi tambahan koefisien variasi. Kadilar dan Cingi [3] mengajukan penaksir regresi menggunakan koefisien variasi. Kemudian Iqbal *et.al.* [2] mengajukan tiga penaksir dengan menggunakan informasi tambahan untuk penaksir rasio pertama yaitu deviasi kuartil dan koefisien skewness, untuk penaksir rasio kedua yaitu deviasi kuartil, koefisien skewness dan koefisien regresi dan selanjutnya untuk penaksir rasio ketiga yaitu kombinasi dari kedua penaksir tersebut. Ketiga penaksir yang diajukan untuk rata-rata populasi merupakan penaksir bias, sehingga penaksir yang efisien untuk penaksir bias adalah penaksir yang memiliki *means square error (MSE)* terkecil [3:h.235].

2. SAMPLING ACAK SEDERHANA

Penarikan sampel acak sederhana merupakan suatu metode untuk mengambil n unit sampel dari N unit populasi dimana setiap elemen memiliki kesempatan yang sama untuk diambil sebagai unit sampel. Penarikan sampel ini adalah penarikan sampel acak tanpa pengembalian agar karakteristik unit-unit lebih akurat. Probabilitas seluruh n unit-unit tertentu yang terambil dalam n pengambilan adalah $\binom{N}{n}^{-1}$ [1].

Dalam perkembangan teori sampling acak sederhana, telah dianggap bahwa penaksiran hanya berdasarkan aritmatika sederhana dengan nilai pengamatan pada sampel. Oleh karena itu metode penaksiran lain yang dapat dipertimbangkan adalah metode yang memanfaatkan informasi tambahan dalam kondisi tertentu, sehingga penaksiran yang diberikan lebih handal dari nilai rata-rata populasi sederhana. Metode tersebut adalah metode penaksir rasio dan penaksir regresi.

Selanjutnya, penaksir regresi linear juga merupakan metode yang menyatakan hubungan antara variabel tak bebas y dengan satu atau lebih variabel bebas x dalam bentuk persamaan linear. Apabila variabel tak bebas y hanya dihubungkan dengan satu variabel bebas x , maka akan diperoleh persamaan regresi linear sederhana. Penaksir regresi linear untuk rata-rata populasi dinotasikan dengan \hat{Y}_{LR} [4].

Untuk menentukan bias dan *MSE* pada sampling acak sederhana digunakan teorema variansi dan kovariansi.

Teorema 1 [1:h.27] Apabila sampel berukuran n diambil dari populasi berukuran N yang berkarakter Y pada sampling acak sederhana maka variansi rata-rata sampel \bar{y} dinotasikan dengan $V(\bar{y})$ dan dirumuskan sebagai

$$V(\bar{y}) = \frac{1-f}{n} S_y^2,$$

dengan $f = n/N$ adalah fraksi penarikan sampel dan $S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2}{N-1}$ adalah variansi y_i pada populasi berkarakter Y .

Bukti dari Teorema ini dapat dilihat pada [1: h.27].

Teorema 2 [1:h.29] Jika y_i, x_i adalah sebuah pasangan yang bervariasi ditetapkan pada unit dalam populasi dan \bar{y}, \bar{x} adalah rata-rata dari sampel acak sederhana berukuran n , maka kovariansinya adalah

$$\text{cov}(y, x) = \frac{(1-f)}{n} \rho S_y S_x,$$

dengan $\rho = \frac{\sum (y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{X})}{\sqrt{\sum (y_i - \bar{Y})^2 \sum (x_i - \bar{X})^2}}$ adalah koefisien korelasi antara y_i dan x_i .

Bukti dari Teorema ini dapat dilihat pada [1:h.29].

3. BIAS DAN MSE PENAKSIR RASIO REGRESI UNTUK RATA-RATA POPULASI

Masing-masing penaksir yang diajukan untuk rata-rata populasi oleh Iqbal *et.al.* merupakan penaksir bias, sehingga untuk melihat efisiensi maka akan dibandingkan *Mean Square Error (MSE)* dari ketiga penaksir. Adapun penaksir rasio dan penaksir rasio-regresi untuk rata-rata populasi yang diajukan oleh Iqbal *et.al.* yaitu

1. Penaksir rasio \hat{Y}_{p1} untuk rata-rata populasi dengan menggunakan deviasi kuartil (QD) dan koefisien skewness (β_1) yang dirumuskan dengan

$$\hat{Y}_{p1} = \bar{y} \left(\frac{\bar{X}\beta_1 + QD}{\bar{x}\beta_1 + QD} \right), \quad (1)$$

dengan

$QD = Q_3 - Q_1$ dimana Q_1 adalah kuartil ke 1 dan Q_3 adalah kuartil ke 3

$\beta_1 = N \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^3}{(N-1)(N-2)S^3}$ dengan N adalah jumlah populasi, X_i adalah populasi X ke i , \bar{X} adalah rata-rata populasi X dan S adalah simpangan baku.

Dengan memanfaatkan Teorema 1 dan Teorema 2, maka diperoleh bias dan *MSE* dari persamaan (1) sebagai

$$B(\hat{Y}_{p1}) \approx \frac{1-f}{n} \bar{Y} (C_{p1}^2 C_x^2 - \theta_{p1} \rho C_y C_x)$$

$$MSE(\hat{Y}_{p1}) \approx \frac{1-f}{n} \bar{Y}^2 (C_y^2 + \theta_{p1}^2 C_x^2 - 2\theta_{p1} \rho C_x C_y)$$

dengan $\theta_{p1} = \bar{X}\beta_1/\bar{X}\beta_1 + QD$, $C_x = S_x/\bar{X}$, dan $C_y = S_y/\bar{Y}$.

2. Penaksir rasio \hat{Y}_{p2} untuk rata-rata populasi dengan menggunakan deviasi kuartil (QD), koefisien skewness (β_1) dan koefisien regresi (b) yang dirumuskan dengan

$$\hat{Y}_{p2} = \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{x}\beta_1 + QD} (\bar{X}\beta_1 + QD) \quad (2)$$

Dengan memanfaatkan Teorema 1 dan Teorema 2, maka diperoleh bias dan MSE dari persamaan (2) adalah

$$B(\hat{Y}_{p2}) \approx \frac{1-f}{n} \frac{S_x^2}{\bar{Y}} R_{p2}^2$$

$$MSE(\hat{Y}_{p2}) \approx \frac{1-f}{n} (R_{p2}^2 S_x^2 + S_y^2 (1-\rho^2)),$$

dengan $R_{p2} = \bar{Y}\beta_1/\bar{X}\beta_1 + QD$.

3. Penaksir rasio kombinasi yang diperoleh dari persamaan (1) dan (2) dirumuskan sebagai

$$\hat{Y}_{pc} = \alpha \left(\bar{y} \frac{\bar{X}\beta_1 + QD}{\bar{x}\beta_1 + QD} \right) + (1-\alpha) \left(\frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{x}\beta_1 + QD} (\bar{X}\beta_1 + QD) \right), \quad (3)$$

dengan α menyatakan konstanta dengan $0 < \alpha < 1$.

Dengan memanfaatkan Teorema 1 dan Teorema 2, maka diperoleh bias dan MSE dari persamaan (3) adalah

$$B(\hat{Y}_{pc}) \approx \frac{1-f}{n} \rho S_x C_y R_{p2} \alpha$$

$$MSE(\hat{Y}_{pc}) \approx \frac{1-f}{n} (R_{p2}^2 S_x^2 - 2\alpha R_{p2} S_{xy} + \alpha^2 \rho^2 S_y^2 - \rho^2 S_y^2 + S_y^2).$$

4. PENAKSIR YANG EFISIEN

Selanjutnya ditentukan penaksir yang efisien diantara ke tiga penaksir yang diajukan, yaitu dengan membandingkan MSE dari masing-masing penaksir tersebut dengan menggunakan efisiensi relatif.

1. Perbandingan $MSE(\hat{Y}_{pc})$ dengan $MSE(\hat{Y}_{p1})$ diperoleh $MSE(\hat{Y}_{pc}) < MSE(\hat{Y}_{p1})$ jika

$$\frac{R_{p2} S_{xy} - \sqrt{(R_{p2} S_{xy})^2 - \rho^2 S_y^2 W_1}}{\rho^2 S_y^2} < \alpha < \frac{R_{p2} S_{xy} + \sqrt{(R_{p2} S_{xy})^2 - \rho^2 S_y^2 W_1}}{\rho^2 S_y^2},$$

dengan

$$W = R_{p2}^2 S_x^2 - \rho^2 S_y^2 - \bar{Y}^2 \theta_{p1}^2 C_x^2 + 2\bar{Y}^2 \theta_{p1} \rho C_x C_{y1}.$$

2. Perbandingan $MSE(\hat{Y}_{pc})$ dengan $MSE(\hat{Y}_{p2})$ diperoleh $MSE(\hat{Y}_{pc}) < MSE(\hat{Y}_{p2})$ jika

$$0 < \alpha < \frac{2R_{p2}S_x}{\rho S_y}$$

3. Perbandingan $MSE(\hat{Y}_{p1})$ dengan $MSE(\hat{Y}_{p2})$ diperoleh $MSE(\hat{Y}_{p1}) < MSE(\hat{Y}_{p2})$ jika

$$0 < \beta < 2R_{p2}$$

5. CONTOH

Sebagai contoh pembahasan, digunakan data tentang pendapatan dan konsumsi karyawan PT. Perkebunan Nusantara V Pekanbaru Tahun 2006.

Tabel 1. Data Pendapatan dan Pengeluaran Karyawan PT. Perkebunan Nusantara V Pekanbaru Tahun 2006.

No.	Nama	Pendapatan (Rupiah)	Pengeluaran (Rupiah)
1	Suradi	1.000.000	800.000
2	Erwin Syahputra	1.000.000	900.000
3	Legiman	1.800.000	1.500.000
4	Iman	1.400.000	1.300.000
5	A. Khalidi	1.200.000	1.100.000
6	Candra	1.300.000	1.100.000
7	Arifin	1.400.000	1.200.000
8	Adi Sasono	1.500.000	1.400.000
9	Nirwan	1.600.000	1.300.000
10	Fadly	1.800.000	1.400.000
11	Rudy Ismanto	1.900.000	1.800.000
12	Heri Darma	2.000.000	1.500.000
13	Ridwan	2.000.000	1.700.000
14	Iwan	2.100.000	1.800.000
15	Edi Agus	2.100.000	2.000.000
16	Kelber	2.200.000	2.000.000
17	Rizaldy	2.200.000	2.000.000
18	Sriyadi	2.300.000	2.000.000
19	Yohanes	2.300.000	2.100.000
20	Charles Purba	2.400.000	2.300.000
21	Ariyanto	2.400.000	2.000.000
22	Sugiarto	2.500.000	2.300.000
23	J. Hutajulu	2.600.000	2.500.000

No.	Nama	Pendapatan (Rupiah)	Pengeluaran (Rupiah)
24	Bambang	2.800.000	2.700.000
25	Laura Muslim	2.800.000	2.400.000
26	Heriawan	2.900.000	2.600.000
27	Drajat	3.000.000	2.500.000
28	Suprpto	3.200.000	2.800.000
29	Donny	3.400.000	3.000.000
30	N. Gultom	3.300.000	3.100.000
31	Tazul Arifin	3.400.000	3.000.000
32	Sudirman	3.700.000	3.000.000
33	Fetnando	3.500.000	3.400.000
34	F. Butar-butar	3.500.000	3.300.000
35	R. Sianturi	3.600.000	3.500.000
36	E. Tarigan	3.700.000	3.400.000
37	Edy Suprianto	4.200.000	3.400.000
38	Bayu Lesmana	4.100.000	3.700.000
39	Krisna Setiawan	4.700.000	4.200.000
40	L. M. Silaban	4.900.000	3.800.000
41	Sukirman	5.200.000	4.700.000
42	Zulkifli	5.300.000	4.800.000
43	R. Lubis	5.500.000	5.300.000
44	Hery Augusman	5.800.000	5.000.000
45	Adi Hurainah	5.600.000	5.400.000
46	Tuhu Bangun	5.700.000	5.500.000
47	Pandapotan P	5.800.000	5.700.000
48	Ali Azhar	6.100.000	5.600.000
49	Abu Bakar N	6.000.000	5.700.000
50	MT. Sagala	6.100.000	6.400.000
51	Rafialdi	7.100.000	6.900.000
52	Jati Teguh	6.300.000	6.000.000
53	B. Maniruk	6.000.000	5.900.000
54	Kasmaliza	7.700.000	7.100.000
55	Sardoltua Girsang	7.000.000	6.600.000
56	Syahrial Nasution	7.500.000	7.000.000
57	BT. Napitupulu	8.000.000	7.500.000
58	Romadka Purba	8.000.000	7.200.000
Jumlah		218. 400.000	200.100.000

Sumber [5].

Dengan menggunakan data pada Tabel 1 akan ditentukan penaksir yang efisien untuk menaksir rata-rata konsumsi karyawan PT. Perkebunan Nusantara dengan menggunakan syarat penaksir lebih efisien yang diperoleh sebelumnya. Hal ini secara umum ditunjukkan dengan menghitung MSE dari masing-masing penaksir. Sebagai informasi tambahan untuk menentukan rata-rata konsumsi karyawan digunakan data tentang pendapatan karyawan PT. Perkebunan Nusantara V (X). Informasi yang diperoleh dari data pada lampiran pendapatan dan konsumsi karyawan PT. Perkebunan Nusantara V dengan menggunakan Microsoft excel sebagai berikut

$$\begin{array}{llll}
 N = 58 & S_x = 12,2857 & C_x = 0,4179 & \beta = 0,8919 \\
 n = 15 & S_y = 12,9977 & S_x^2 = 150,94 & \beta_1 = 0,3927 \\
 \bar{Y} = 54,26 & S_{xy} = 134,6184 & S_y^2 = 168,94 & QD = 8,5 \\
 \bar{X} = 29,4 & C_y = 0,2395 & \theta_{p1} = 0,5759 & R_{p2} = 1,0629 \\
 \rho = 0,8430 & f = 0,3 & &
 \end{array}$$

Dengan menggunakan informasi dari data tersebut, diperoleh bahwa

1. $MSE(\hat{Y}_{pc}) < MSE(\hat{Y}_{p1})$ jika $0.049725 < \alpha < 1$
2. $MSE(\hat{Y}_{pc}) < MSE(\hat{Y}_{p2})$ jika $0 < \alpha < 1.049725$
3. $MSE(\hat{Y}_{p1}) < MSE(\hat{Y}_{p2})$ jika $0.955208 < 1$

Selanjutnya nilai dari masing-masing penaksir disajikan pada Tabel 2

Tabel 2: Nilai MSE untuk masing-masing penaksir

Nama Penaksir	Notasi	MSE
Penaksir Rasio	\hat{Y}_{p1}	3.2050
Penaksir Rasio-Regresi	\hat{Y}_{p2}	1.5376
Penaksir Rasio Kombinasi Linear	\hat{Y}_{pc}	1.0567

Berdasarkan Tabel 2 di atas, dapat dilihat bahwa penaksir rasio kombinasi \hat{Y}_{pc} memiliki nilai MSE terkecil dengan syarat bahwa kondisi lebih efisien dapat terpenuhi.

6. KESIMPULAN

Setelah diperoleh nilai MSE dari masing-masing penaksir untuk rata-rata populasi yang diajukan pada sampling acak sederhana, kemudian membandingkan MSE dari masing-masing penaksir, sehingga dapat disimpulkan bahwa penaksir rasio kombinasi linear \hat{Y}_{pc} menggunakan informasi tambahan deviasi kuartil, koefisien *skewness* dan koefisien regresi lebih efisien daripada penaksir \hat{Y}_{p1} dan penaksir \hat{Y}_{p2} jika syarat efisien terpenuhi. Dalam hal ini permasalahan dibatasi untuk hubungan yang berkorelasi positif.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Cochran, W. G. 1991. *Teknik Penarikan Sampel*, 3rd Ed. Terj. Dari *Sampling Techniques*, oleh Rudiansyah & E.R Osman. UI Press, Jakarta.
- [2] Jeeelani, I., Maqbool, S. & S.A. Mir. 2013. Modified Ratio Estimators of Population Mean Using Linear Combination of Co-Efficient of Skewness and Quartile Deviation, *International Journal of Modern Mathematical Sciences* 2013, 6(3): 174-183
- [3] Kadilar, C. & H. Cingi. 2004. Ratio Estimators in Simple Random Sampling. *Applied Mathematics and Computation*. 151 : 893-902.
- [4] Montgomery, D.C. & Runger, D.C. 2011. *Applied Statistics and Probability for Engineers*, Fifth Edition. John Wiley & Sons Inc, New York.
- [5] Sinaga, C. V. D. N. 2007. Pola Konsumsi Karyawan PT. Perkebunan Sawit Nusantara V (PTPN V) Pekanbaru. Skripsi Fakultas Ekonomi Universitas Riau, Pekanbaru.
- [6] Sisodia, B. V. S. & V. K. Dwivedi. 1981. A Modified Ratio Estimator Using Coefficient of Variation Variable. *Jour. Ind. Soc. Agr. Stat.* 33: 13-18.