

PREMI ASURANSI JIWA GABUNGAN BERJANGKA DENGAN ASUMSI GOMPERTZ

Danu Aditya¹, Johannes Kho², T. P. Nababan²

¹Mahasiswa Program Studi S1 Matematika

²Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*danuaditya14juli@gmail.com

ABSTRACT

This article discusses the annual premium of term insurance for joint life. In this kind of insurance, the sum assured of two people insured with the age of x and y is paid if only one of the insureds dies during the coverage period and then no more premium payment. The annual premium is affected by single premium and present value of annuity due, where Gompertz assumption is used in calculation. A bigger premium is obtained using the Gompertz assumption.

Keywords: *Gompertz assumption, annual premium, joint life insurance*

ABSTRAK

Pada artikel ini dibahas tentang premi tahunan asuransi jiwa gabungan berjangka. Pada jenis asuransi ini, uang pertanggungan dua orang tertanggung yang berumur x dan y tahun akan dibayarkan bila salah seorang tertanggung meninggal dunia dalam masa perlindungan dan selanjutnya tidak ada lagi pembayaran premi. Premi tahunan ini dipengaruhi oleh premi tunggal dan nilai tunai anuitas hidup awal yang dalam perhitungannya digunakan asumsi Gompertz. Perhitungan dengan menggunakan asumsi Gompertz diperoleh premi yang lebih besar.

Kata kunci: *asumsi Gompertz, premi tahunan, asuransi jiwa gabungan*

1. PENDAHULUAN

Dalam kehidupan manusia di dunia selalu dipenuhi dengan resiko yang akan terjadi antara lain resiko kecelakaan, resiko kerugian atau resiko kematian. Untuk meminimalkan resiko tersebut diperlukan suatu program asuransi. Di Indonesia, terdapat dua jenis asuransi yang sedang berkembang, yaitu asuransi jiwa perorangan dan asuransi jiwa gabungan. Kedua jenis asuransi tersebut mempunyai perbedaan pada jumlah tertanggungnya. Asuransi jiwa perorangan merupakan asuransi yang jumlah tertanggung hanya satu orang atau tunggal, sedangkan asuransi jiwa gabungan merupakan asuransi yang menanggung dua tertanggung atau lebih, dimana uang

pertanggungannya akan dibayarkan jika salah seorang tertanggung meninggal dunia dan pembayaran premi akan berhenti pada saat tersebut [3].

Berdasarkan jangka waktu perlindungannya asuransi jiwa dibagi menjadi tiga, yaitu asuransi jiwa seumur hidup, asuransi jiwa berjangka dan asuransi jiwa dwiguna. Untuk menentukan premi tahunan diperlukan premi tunggal dan nilai tunai anuitas hidup awal yang dipengaruhi oleh peluang hidup dan peluang meninggal. Ada beberapa metode yang dapat digunakan dalam perhitungan premi tahunan, diantaranya dengan menggunakan asumsi Gompertz, yaitu salah satu dari beberapa asumsi dalam aktuaria. Pada dasarnya asumsi Gompertz digunakan untuk menentukan percepatan mortalita. Namun, dari fungsi kepadatan peluangnya dapat juga ditentukan peluang hidup dan peluang meninggal dengan asumsi Gompertz.

Artikel ini membahas premi tahunan asuransi jiwa berjangka untuk status gabungan yang diperoleh dari buku karangan Futami [3]. Asuransi jiwa gabungan berjangka adalah asuransi jiwa gabungan yang jangka waktu perlindungannya ditentukan selama n tahun, dengan uang pertanggungan hanya akan dibayarkan jika salah seorang tertanggung meninggal dunia dalam masa perlindungan tersebut, dimana jumlah tertanggung dibatasi hanya dua orang yaitu yang berusia x dan y tahun. Pada Futami [3], perhitungan premi tahunan menggunakan fungsi komutasi, sedangkan artikel ini membahas perhitungan premi dengan asumsi Gompertz yang diperoleh dari Willemsse dan Kopplelaar [4] dan buku Bower *at. al.* [1].

2. ANUITAS HIDUP DAN PREMI TUNGGAL ASURANSI JIWA GABUNGAN

Sebelum membahas premi tahunan terlebih dahulu dikemukakan teori pendukung yang berkaitan dengan premi tahunan. Misalkan x menyatakan usia dari seseorang dan $T(x)$ variabel random yang menyatakan sisa usia seseorang yang berusia x tahun. Diketahui juga bahwa ${}_t p_x$ menyatakan peluang hidup seseorang yang berusia x hingga t tahun berikutnya dan ${}_t q_x$ menyatakan peluang meninggal seseorang yang berusia x sebelum mencapai t tahun.

Asumsi Gompertz berasal dari distribusi Gompertz yang diperkenalkan oleh matematika Inggris Benjamin Gompertz [1]. Dalam menyatakan teorinya Gompertz menggunakan percepatan mortalita sebagai ukuran rentannya seseorang terhadap kematian, yaitu

$$\mu_x = Bc^x, \quad (1)$$

dengan $B > 0$, $c > 1$, $x > 0$, konstanta B mewakili tingkat kematian secara umum dan c merupakan pertumbuhan spesifik tingkat kematian.

Distribusi Gompertz $G(x|\mu, \sigma)$ dengan rata-rata μ dan deviasi standar σ didefinisikan oleh

$$G(x|\mu, \sigma) = W\left(\frac{x - a}{b}\right),$$

dengan $W(x) = 1 - e^{-e^x}$ dan konstanta a dan b memenuhi

$$\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{6}}b \text{ dan } \mu = a - by. \quad (2)$$

Notasi $G(x|\mu, \sigma)$ dinamakan distribusi Gompertz karena [4]

$$G(x|\mu, \sigma) = 1 - g^{c^x},$$

dengan

$$g = e^{-e^{-\frac{a}{b}}} \text{ dan } c = e^{\frac{1}{b}}. \quad (3)$$

Berdasarkan persamaan (1), diperoleh peluang hidup seseorang yang berumur x hingga t tahun dan peluang meninggal seseorang berusia $x + t$ tahun sebagai

$${}_t p_x = g^{c^x(c^t-1)} \quad (4)$$

dan

$$q_{x+t} = 1 - g^{c^{x+t}(c-1)}. \quad (5)$$

Peluang hidup dan meninggal pada persamaan (4) dan (5) ini akan digunakan dalam perhitungan premi tunggal dan nilai tunai anuitas hidup awal asuransi jiwa berjangka.

Pada premi tahunan asuransi jiwa gabungan digunakan premi tunggal dan anuitas hidup gabungan, yaitu premi tunggal dan anuitas hidup untuk dua orang tertanggung yang berumur x dan y tahun yang dalam perhitungannya digunakan peluang hidup untuk status gabungan. Dari [3] peluang hidup gabungan seseorang yang berusia x dan y tahun bertahan hidup hingga t tahun berikutnya dinyatakan dengan

$${}_t p_{xy} = {}_t p_x {}_t p_y. \quad (6)$$

Premi tunggal untuk asuransi jiwa gabungan berjangka dari seseorang yang berusia x dan y dalam jangka waktu perlindungan selama n tahun [3] adalah

$$A^1_{xy:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} {}_t p_x {}_t p_y q_{x+t:y+t}, \quad (7)$$

dengan v menyatakan faktor diskon yaitu

$$v = \frac{1}{1+i}.$$

Kemudian berdasarkan asumsi Gompertz, premi tunggal asuransi jiwa gabungan berjangka dari dua orang yang berusia x dan y dalam jangka waktu perlindungan selama n tahun dinyatakan dengan

$$A^1_{xy:\overline{n}|} = v \sum_{t=0}^{n-1} v^t g^{(c^x+c^y)(c^t-1)} - \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} g^{(c^x+c^y)(c^{t+1}-1)}$$

$$A_{xy:\overline{n}}^1 = v \ddot{a}_{xy:\overline{n}} - a_{xy:\overline{n}}. \quad (8)$$

Nilai tunai anuitas hidup awal asuransi jiwa berjangka dari seseorang yang berusia x dan y biasanya dinyatakan dengan

$$\ddot{a}_{xy:\overline{n}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_t p_x {}_t p_y.$$

Namun, akan terdapat kesulitan apabila menerapkannya dalam asumsi Gompertz. oleh karena itu, dilakukan alternatif lain yaitu dengan menggunakan hubungan antara nilai tunai anuitas hidup awal dan premi tunggal asuransi jiwa gabungan berjangka sebagai berikut

$$\ddot{a}_{xy:\overline{n}} = \frac{1 - v^n {}_n p_x {}_n p_y - A_{xy:\overline{n}}^1}{d}, \quad (9)$$

dengan d merupakan tingkat diskon yang dinyatakan dengan

$$d = 1 - v.$$

Selanjutnya dengan menggunakan peluang hidup pada asumsi ini dan mensubstitusikan persamaan (4) ke persamaan (9), diperoleh nilai tunai anuitas hidup awal gabungan berjangka dari dua orang yang berusia x dan y dalam jangka waktu perlindungan selama n tahun dinyatakan dengan

$$\ddot{a}_{xy:\overline{n}} = 1 - v^n g^{(c^x+c^y)(c^n-1)} + a_{xy:\overline{n}}. \quad (10)$$

3. PREMI TAHUNAN ASURANSI JIWA GABUNGAN BERJANGKA DENGAN ASUMSI GOMPERTZ

Premi tahunan merupakan premi yang dibayarkan pada setiap awal permulaan tahun yang besarnya bisa sama maupun berubah-ubah setiap tahunnya [2]. Premi tahunan asuransi jiwa gabungan berjangka dengan asumsi Gompertz adalah premi tahunan untuk dua orang yaitu yang berusia x dan y dalam jangka waktu perlindungan selama n tahun yang uang pertanggungannya dibayarkan jika salah seorang tertanggung meninggal dunia dan tidak ada pembayaran premi setelahnya, dengan uang pertanggungannya akan dibayarkan di akhir tahun polis, dimana perhitungannya menggunakan asumsi Gompertz.

Premi tahunan asuransi jiwa gabungan berjangka dengan uang pertanggungannya sebesar R yang dibayarkan di akhir tahun polis dinyatakan dengan

$$P_{xy:\overline{n}}^1 = R \frac{A_{xy:\overline{n}}^1}{\ddot{a}_{xy:\overline{n}}}, \quad (11)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (8) dan (10) ke persamaan (11), maka besarnya premi tahunan asuransi jiwa gabungan berjangka dengan uang pertanggungan sebesar R dengan asumsi ini dinyatakan dengan

$$P_{xy:\overline{n}}^1 = R \frac{v \ddot{a}_{xy:\overline{n}} - a_{xy:\overline{n}}}{1 - v^n g^{(c^x+c^y)(c^n-1)} + a_{xy:\overline{n}}} . \quad (12)$$

Contoh Sepasang suami istri bekerja disuatu perusahaan yang sama, mereka mengikuti program asuransi dengan jangka waktu 15 tahun. Dengan usia suami pada waktu mengikuti program tersebut yaitu 40 tahun, dan usia istri 38 tahun, serta uang pertanggungan sebesar Rp 10.000.000 dengan tingkat bunga 5% setiap periode. Berdasarkan data TMI 1999 dengan asumsi Gompertz akan ditentukan besar premi tahunan untuk perorangan maupun gabungan.

Langkah 1. Menentukan konstanta-konstanta Gompertz

Dengan menggunakan definisi ditentukan konstanta Gompertz untuk TMI 1999 pria, dengan terlebih dahulu menentukan σ dan μ dengan menggunakan Microsoft Excel diperoleh $\sigma = 29,15475947$ dan $\mu = 50$ dengan mensubstitusikan nilai σ dan μ kedalam persamaan (2) diperoleh

$$\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{6}} b \text{ dan } \mu = a - b\gamma$$

$$b = 22,74340 \text{ dan } a = 36,8721523536$$

Dengan mensubstitusikan nilai a dan b ke persamaan (3) diperoleh

$$g = e^{-e^{-\frac{a}{b}}} = 0,820651646 \text{ dan } c = e^{\frac{1}{b}} = 1,0449497461$$

Karena $\ln g = \frac{-B}{\ln c}$ sehingga diperoleh $B = 0,008690$. Selanjutnya dengan tingkat bunga 5% diperoleh faktor diskon $v = 0,952381$

Langkah 2. Menentukan Premi tahunan asuransi jiwa gabungan berjangka

Dari langkah 1, diperoleh konstanta Gompertz untuk pria sebesar $B = 0,008690$ dan $c = 1,044949746$ sedangkan untuk konstanta Gompertz wanita sebesar $B = 0,00265890$ dan $c = 1,0436251$ dan faktor diskon sebesar $v = 0,9523810$.

Dengan menggunakan nilai-nilai diatas untuk memperoleh nilai tunai anuitas awal dan nilai anuitas akhir sehingga diperoleh

$$\ddot{a}_{40,38:\overline{15}} = 1 + v^1 g^{(c^{40}+c^{38})(c^1-1)} + \dots + v^{14} g^{(c^{54}+c^{52})(c^{14}-1)}$$

$$\ddot{a}_{40,38:\overline{15}} = 1 + 0,892798 + 0,791086 + \dots + 0,060621 = 6,444821$$

Sedangkan nilai tunai anuitas hidup akhir berjangka asuransi jiwa gabungan dengan asumsi ini adalah

$$a_{40,38:\overline{15}|} = v^1 g^{(c^{40}+c^{38})(c^1-1)} + v^2 g^{(c^{42}+c^{40})(c^2-1)} + \dots \\ + v^{14} g^{(c^{55}+c^{53})(c^{15}-1)}$$

$$a_{40,38:\overline{15}|} = 0,89751 + 0,795688 + 0,7003 + \dots + 0,046965 = 5,60284565$$

Sedangkan untuk premi tunggal asuransi jiwa gabungan berjangka dengan menggunakan persamaan (8) diperoleh

$$A_{40,38:\overline{15}|}^1 = v \ddot{a}_{40,38:\overline{15}|} - a_{40,38:\overline{15}|}$$

$$A_{40,38:\overline{15}|}^1 = (0,952381)(6,444821715) - (5,602845654) = 0,535080096$$

Dengan menggunakan persamaan (10) maka nilai tunai anuitas hidup awal gabungan berjangka seperti berikut

$$\ddot{a}_{40,38:\overline{15}|} = 1 - v^{15} g^{(c^{40}+c^{38})(c^{15}-1)} + a_{40,38:\overline{15}|} \\ = 1 - 0,135315812 - 5,602845654 \\ = 6,46752984$$

Sehingga premi tahunan asuransi jiwa gabungan berjangka dengan asumsi Gompertz dengan menggunakan persamaan (12) dengan uang pertanggungan sebesar Rp10.000.000 diperoleh

$$P_{40,38:\overline{15}|}^1 = R \frac{v \ddot{a}_{40,38:\overline{15}|} - a_{40,38:\overline{15}|}}{1 - v^{15} g^{(c^{40}+c^{38})(c^{15}-1)} + a_{40,38:\overline{15}|}} \\ = \text{Rp } 10.000.000 \frac{0,535080096}{6,467529842} = \text{Rp } 827.333,01.$$

4. KESIMPULAN

Perhitungan premi asuransi jiwa gabungan berjangka akan memberikan nilai yang lebih kecil dibandingkan dengan premi asuransi perorangan yang dihitung masing-masing dengan umur dan waktu pertanggungan yang sama dan semakin tinggi umur masuk peserta asuransi, maka semakin besar premi yang harus dibayarkan di awal tahunnya.

Sedangkan untuk masa pertanggungan yang semakin lama maka semakin besar premi yang harus dibayarkan dan semakin tinggi kemungkinan terjadi klaim. Pada perhitungan premi tahunan asuransi jiwa gabungan berjangka dengan asumsi Gompertz memiliki premi yang lebih besar dibandingkan dengan melakukan perhitungan premi secara umum.

UCAPAN TERIMA KASIH

Ungkapan terima kasih penulis ucapkan kepada Bapak Drs. Johannes Kho, M.Si selaku pembimbing I dan Bapak Drs.T.P. Nababan M.Si selaku pembimbing II yang telah meluangkan waktu pikiran dan tenaga dalam memberikan bimbingan, arahan, dorongan dan kesabaran kepada penulis dalam penyelesaian artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bowers, N. L., H. U.Geerber, J. G. Hickman, D. A. Jones & C. J. Nesbitt. 1986. *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries, Schaumhurg.
- [2] Futami, T. 1993. *Matematika Asuransi Jiwa, Bagian I*. Terj. dari *Seimei Hoken Sugaku, Jokan ("92 Revision)*, oleh Herliyanto, Gatot. Penerbit Incorporated Foundation Oriental Life Insurance Cultural Development Center, Japan.
- [3] Futami, T. 1994. *Matematika Asuransi Jiwa, Bagian II*. Terj. dari *Seimei Hoken Sugaku, Gekan ("92 Revision)*, oleh Herliyanto, Gatot. Penerbit Incorporated Foundation Oriental Life Insurance Cultural Development Center, Japan.
- [4] Willemse, W. J. & H. Kopplelaar. 2000. Knowledge Elicitation of Gompert' Law of Mortality. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2: 168-179.