METODE ITERASI OPTIMAL BERORDE EMPAT UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NONLINEAR

Helmi Putri Yanti[1*], **Rolan Pane**[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] DosenJurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*helmi.putriyanti@gmail.com

ABSTRACT

In this article, we discuss the derivation of an optimal iterative method using a quadratic polynomial, which is a review and a correction of a part of Fernández-Torres and Vásquez-Aquino's article [Advances in Numerical Analysis, 10: 1-8, 2013]. Analytically we show that the obtained method has an order of convergence four and requires three function evaluations per iteration, so that the efficiency index of the method is 1.587. The analytical results are in agreement with the computational examples. Numerical comparisons show that the method obtained can compete with the existing fourth order methods.

Keywords: *Efficiency index, the order of convergence, the method of order four, optimal iterative method.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas penurunan metode iterasi optimal menggunakan polinomial kuadratik, yang merupakan review dan koreksi sebagian artikel Fernández-Torres dan Vásquez-Aquino [*Advances in Numerical Analysis*, 10: 1–8, 2013]. Secara analitik ditunjukkan bahwa metode yang didapat memiliki orde kekonvergenan empat dan untuk setiap iterasinya memerlukan tiga kali evaluasi fungsi, sehingga indeks efisiensinya 1.587. Hasil temuan analitik ini terlihat juga pada contoh komputasi yang dilakukan. Perbandingan numerik yang dilakukan menunjukkan bahwa metode yang diperoleh dapat bersaing dengan metode orde empat yang sudah ada.

Kata kunci: *Indeks efisiensi, orde konvergensi, metode berorde empat, metode iterasi optimal.*

1. PENDAHULUAN

Pendekatan matematika dalam berbagai bidang ilmu yang sering muncul adalah bagaimana menemukan akar dari persamaan nonlinear

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Metode analitik dan metode numerik dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear (1). Tetapi, pada beberapa kasus persamaan nonlinear tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik, sehingga metode numerik menjadi alternatif.

Banyak metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear. Beberapa diantaranya adalah metode Newton dengan orde konvergensi kuadratik [1], metode Chun yang memiliki orde konvergensi kubik [3], metode Noor [7], dan metode Cordero [4] yang memiliki orde konvergensi kuartik.

Pada artikel ini direview dan dikoreksi metode iterasi optimal yang diturunkan berdasarkan polinomial kuadratik, dengan menambahkan syarat tertentu, yang telah di kemukakan oleh Fernández-Torres dan Vásquez-Aquino [7].

Pembahasan dimulai dengan menurunkan metode iterasi optimal, kemudian dilanjutkan dengan melakukan kajian *error* analisis yang menunjukkan metode iterasi optimal ini berorde kuartik. Pada bagian tiga dilakukan perbandingan numerik persamaan nonlinear terhadap beberapa fungsi uji.

2. METODE ITERASI OPTIMAL UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NONLINEAR

Misalkan α adalah akar sederhana dari $f(x) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang mempunyai turunan pada I, lalu $f'(x) \neq 0$ untuk $x \in I$. Didefinisikan $g = f^{-1}$ pada I. Bila diambil $x_0 \in I$ yang dekat ke α dan dimisalkan x_n telah ditentukan, didefinisikan

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{2}$$

$$K = f(x_n), \quad L = f(z_n). \tag{3}$$

Diberikan persamaan polinomial

$$p_2(y) = A(y-K)(y-L) + B(y-K) + C, \tag{4}$$

yang memenuhi kondisi

$$p_2(K) = g(K) = x_n, \tag{5}$$

$$p_2(L) = g(L) = z_n, \tag{6}$$

$$p_2'(K) = g'(K) = \frac{1}{f'(x_n)}. \tag{7}$$

Selanjutnya bila persamaan (4) diselesaikan dengan memenuhi kondisi (5), diperoleh

$$C = x_n = g[f(x_n)]. \tag{8}$$

Bila disubstitusikan persamaan (8) ke persamaan (4) dan diharuskan memenuhi persamaan (6), diperoleh

$$B = \frac{z_n - x_n}{f(z_n) - f(x_n)} = g[f(x_n), f(z_n)]. \tag{9}$$

Selanjutnya persamaan (4) diturunkan terhadap y, kemudian disubstitusikan persamaan (9) ke persamaan yang diperoleh, dan diharuskan memenuhi kondisi (7) diperoleh

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{f'(x_n)(f(x_n) - f(z_n))} + \frac{z_n - x_n}{(f(z_n) - f(x_n))^2} \\ &= \frac{g[f(x_n), f(x_n)] - g[f(x_n), f(z_n)]}{(f(x_n) - f(z_n))} \\ A &= g[f(x_n), f(x_n), f(z_n)]. \end{aligned} \tag{10}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (8), (9), (10) ke persamaan (4), didapat

$$\begin{aligned} p_2(y) = {} & g[f(x_n), f(x_n), f(z_n)](y - K)(y - L) \\ & + g[f(x_n), f(z_n)](y - K) + g[f(x_n)]. \end{aligned} \tag{11}$$

Perpotongan parabola $p_2(y)$ terhadap sumbu x terjadi jika $y = 0$ pada persamaan (11), sehingga dengan menggunakan persamaan (3), setelah disederhanakan diperoleh

$$\begin{aligned} p_2(0) = {} & g[f(x_n)] - g[f(x_n), f(z_n)]f(x_n) \\ & + g[f(x_n), f(x_n), f(z_n)]f(x_n)f(z_n). \end{aligned} \tag{12}$$

Dengan memperhatikan persamaan (8), (9), (10), maka persamaan (12) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} p_2(0) = {} & x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left(\frac{f(z_n)(f(z_n) - f(x_n)) - (z_n - x_n)f(z_n)f'(x_n)}{(f(z_n) - f(x_n))^2} \right) \\ & + \left(\frac{(z_n - x_n)f(x_n)f'(x_n)(f(z_n) - f(x_n))}{f'(x_n)(f(z_n) - f(x_n))^2} \right). \end{aligned} \tag{13}$$

Selanjutnya dengan menyatakan perpotongan polinomial $p_2(y)$ tersebut terhadap sumbu x dengan x_{n+1}, dan mengingat persamaan (2), maka persamaan (13) menjadi

$$x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left(\frac{(f(z_n))^2 - f(x_n)f(z_n) + (f(x_n))^2}{(f(z_n) - f(x_n))^2} \right). \tag{14}$$

Dengan demikian diperoleh metode iterasi dengan bentuk iterasi

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{15}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left(\frac{(f(z_n))^2 - f(x_n)f(z_n) + (f(x_n))^2}{(f(z_n) - f(x_n))^2} \right). \tag{16}$$

Selanjutnya metode iterasi yang disajikan persamaan (15) dan (16) dianalisa kekonvergenannya, sebagaimana diberikan Teorema 1.

Teorema 1 (Orde Konvergensi) Asumsikan bahwa fungsi $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ untuk interval buka I yang memiliki akar sederhana $\alpha \in I$. Misalkan f fungsi mulus pada lingkungan akar, maka metode iterasi optimal yang diberikan oleh persamaan (15) dan (16) memiliki orde konvergensi kuartik.

Bukti:
Misalkan α adalah akar sederhana dari persamaan $f(x) = 0$, asumsikan $f'(x) \neq 0$ dan $e_n = x_n - \alpha$. Dengan menggunakan ekspansi Taylor untuk $f(x_n)$ disekitar $x_n = \alpha$, diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_n) =& f(\alpha) + f'(\alpha)\frac{(x_n - \alpha)}{1!} + f''(\alpha)\frac{(x_n - \alpha)^2}{2!} \\ &+ f'''(\alpha)\frac{(x_n - \alpha)^3}{3!} + f''''(\alpha)\frac{(x_n - \alpha)^4}{4!} + O(e_n^5). \end{aligned} \tag{17}$$

Karena $f(\alpha) = 0$ dan $x_n - \alpha = e_n$, maka persamaan (17) dapat ditulis

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!}f'''(\alpha)e_n^3 + \frac{1}{4!}f''''(\alpha)e_n^4 + O(e_n^5), \\ f(x_n) &= f'(\alpha)\left(e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!f'(\alpha)}e_n^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!f'(\alpha)}e_n^3 + \frac{f''''(\alpha)}{4!f'(\alpha)}e_n^4 + O(e_n^5) \right), \end{aligned} \tag{18}$$

dan dengan menyatakan $c_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!f'(\alpha)}$, maka persamaan (18) menjadi

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + O(e_n^5)\right). \tag{19}$$

Selanjutnya dengan menggunakan ekspansi Taylor untuk $f'(x_n)$ disekitar $x_n = \alpha$, setelah penyederhanaan diperoleh

$$\begin{aligned} f'(x_n) =& f'(\alpha)\big(1 + \frac{2}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\frac{(x_n - \alpha)}{1!} + \frac{3}{3}\frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)}\frac{(x_n - \alpha)^2}{2!} \\ &+ \frac{4}{4}\frac{f''''(\alpha)}{f'(\alpha)}\frac{(x_n - \alpha)^3}{3!} + O(e_n^5)\big). \end{aligned} \tag{20}$$

Kemudian dihitung $\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ dengan menggunakan persamaan (19) dan (20), yaitu

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{\left(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + O(e_n^5)\right)}{\left(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + O(e_n^4)\right)}. \tag{21}$$

Selanjutnya digunakan formula deret geometri, diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \big(e_n - c_2e_n^2 + 2c_2^2e_n^3 - 2c_3e_n^3 - 4c_2^3e_n^4 + 7c_2c_3e_n^4 - 3c_4e_n^4 + O(e_n^5)\big). \quad (22)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (22) ke persamaan (15), setelah penyederhanaan diperoleh

$$z_n = \alpha + c_2e_n^2 - 2c_2^2e_n^3 + 2c_3e_n^3 + 4c_2^3e_n^4 - 7c_2c_3e_n^4 + 3c_4e_n^4 + O(e_n^5). \quad (23)$$

Kemudian dengan menggunakan ekspansi Taylor untuk $f(z_n)$ di sekitar $z_n = \alpha$, dan menggunakan persamaan (23), didapat

$$f(z_n) = f'(\alpha)^2(c_2e_n^2 + 2c_3e_n^3 - 2c_2^2e_n^3 - 7c_2c_3e_n^4 + 5c_2^3e_n^4 + 3c_4e_n^4 + O(e_n)^5). \quad (24)$$

Selanjutnya dihitung $(f(z_n))^2$ menggunakan persamaan (24), setelah disederhanakan diperoleh

$$(f(z_n))^2 = (f'(\alpha))^2(c_2^2e_n^4 + O(e_n^5)). \quad (25)$$

Kemudian dihitung $f(x_n)f(z_n)$ menggunakan persamaan (19) dan (24), didapat

$$f(x_n)f(z_n) = (f'(\alpha))^2(c_2e_n^3 - c_2^2e_n^4 + 2c_3e_n^4 + O(e_n^5)). \quad (26)$$

Kemudian dihitung $(f(x_n))^2$ menggunakan persamaan (19), setelah penyederhanaan diperoleh

$$(f(x_n))^2 = (f'(\alpha))^2(e_n^2 + 2c_2e_n^3 + c_2^2e_n^4 + 2c_3e_n^4 + O(e_n^5)). \quad (27)$$

Kemudian dihitung $(f(z_n))^2 - f(x_n)f(z_n) + (f(x_n))^2$ menggunakan persamaan (25), (26), dan persamaan (27), setelah disederhanakan diperoleh

$$(f(z_n))^2 - f(x_n)f(z_n) + (f(x_n))^2 = e_n^2 + c_2e_n^3 + 3c_2^2e_n^4 + O(e_n^5). \quad (28)$$

Selanjutnya dihitung $(f(z_n) - f(x_n))^2$ dari persamaan (19) dan persamaan (24), didapat

$$(f(z_n) - f(x_n))^2 = (f'(\alpha))^2(e_n^2 + 4c_2^2e_n^4 - 2c_3e_n^4 + O(e_n^5)). \quad (29)$$

Kemudian dihitung $\dfrac{(f(z_n))^2 - f(x_n)f(z_n) + (f(x_n))^2}{(f(z_n) - f(x_n))^2}$, dengan menggunakan persamaan (28) dan persamaan (29) dan bantuan identitas geometri, setelah penyederhanaan diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{(f(z_n))^2 - f(x_n)f(z_n) + (f(x_n))^2}{(f(z_n) - f(x_n))^2} &= 1 + (4c_2^4 - 10c_2^2c_3 + 4c_3^2)e_n^4 + (-4c_2^3 + 2c_2c_3)e_n^3 \\ &\quad + (2c_3 - c_2^2)e_n^2 + c_2e_n + O(e_n^5). \quad (30)\end{aligned}$$

Selanjutnya dihitung $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\frac{(f(z_n))^2 - f(x_n)f(z_n) + (f(x_n))^2}{(f(z_n) - f(x_n))^2}$ menggunakan persamaan (22) dan persamaan (30), setelah penyederhanaan diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\left(\frac{(f(z_n))^2 - f(x_n)f(z_n) + (f(x_n))^2}{(f(z_n) - f(x_n))^2}\right) = e_n + (-3c_4 + 5c_2c_3 - 5c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5). \tag{31}$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (31) ke persamaan (15), diperoleh

$$x_{n+1} = \alpha + (3c_4 - 5c_2c_3 + 5c_2^3)e_n^4 + O(e_n)^5,$$

atau

$$e_{n+1} = (3c_4 - 5c_2c_3 + 5c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5). \tag{32}$$

Dari persamaan (32) terlihat bahwa metode iterasi yang diberikan oleh persamaan (15) dan (16) memiliki orde konvergensi kuartik. Teorema 1 terbukti.□

Perhatikan bahwa metode iterasi yang diberikan persamaan (15) dan (16), memerlukan tiga perhitungan fungsi periterasinya. Jadi efisiensi indeksnya adalah 1.587. Karena metode iterasi ini berorde kuartik dan memerlukan tiga perhitungan fungsi periterasinya maka metode ini optimal.

3. PERBANDINGAN NUMERIK

Pada bagian ini dilakukan perbandingan numerik antara metode iterasi optimal untuk sistem persamaan nonlinear terhadap beberapa metode pembanding, untuk melihat jumlah iterasi yang diperlukan setiap metode untuk mencapai akar pendekatan.

Berikut ini ditunjukkan uji komputasi untuk membandingkan kecepatan dalam menemukan akar antara metode-metode yang dibahas pada artikel ini, diantaranya adalah metode Newton (MN), metode Noor (MNO), metode Cordero (MC), metode Chun (MCH), dan metode iterasi optimal (MIO). Adapun fungsi-fungsi yang akan digunakan dalam melakukan perbandingan dari metode yang didiskusikan adalah Jika nilai mutlak fungsi lebih kecil dari toleransi 1.0×10^{-50} dan jika selisih nilai mutlak antara dua iterasi yang berdekatan bernilai lebih kecil dari toleransi yang diberikan.

Adapun fungsi-fungsi yang akan digunakan dalam melakukan perbandingan dari metode yang didiskusikan adalah

$$\begin{array}{ll}
f_1(x) = \cos(x) - x, & \alpha = 0..7390851332151606, \\
f_2(x) = x^2 - e^x - 3x + 2, & \alpha = 02575302854398608, \\
f_3(x) = (x+2)e^x + \cos(x) - 1, & \alpha = -0.4428544010023885, \\
f_4(x) = e^{-x} + \cos(x), & \alpha = 1.7461395304080124,
\end{array}$$

Dalam menentukan solusi numerik dari contoh-contoh fungsi nonlinear di atas, digunakan program Maple 13 dengan toleransi 1.0×10^{-50}. Untuk hasil uji komputasi dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1: Perbandingan Berbagai Iterasi untuk Fungsi $f_1(x)$ Sampai $f_2(x)$

f_i	x_0	Metode	n	COC	$x_n - x_{n-1}$
f_1	0.5	MIO	3	4.00	$1.12718909e-34$
		MC	3	4.00	$4.91528250e-29$
		MNO	3	4.00	$1.90504723e-17$
		MCH	4	3.00	$3.36806187e-38$
		MN	6	2.00	$3.30310685e-29$
	1.0	MIO	3	4.00	$3.36806187e-38$
		MC	3	4.00	$4.91528250e-29$
		MNO	3	4.00	$3.60234734e-47$
		MCH	3	3.00	$3.90985654e-38$
		MN	6	2.00	$2.41158665e-44$
	2.0	MIO	3	4.00	$4.48655090e-35$
		MC	3	4.00	$3.18155904e-30$
		MNO	3	4.00	$1.65874898e-39$
		MCH	4	3.00	$3.98384346e-41$
		MN	6	2.00	$7.48582020e-39$
f_2	0.5	MIO	3	4.00	$4.62458121e-17$
		MC	3	4.00	$8.95920142e-16$
		MNO	3	4.00	$2.66917458e-39$
		MCH	5	3.00	$1.64716042e-30$
		MN	3	2.00	$2.66917458e-39$
	1.0	MIO	3	4.00	$3.84119197e-18$
		MC	3	4.00	$2.17502151e-17$
		MNO	3	4.00	$1.08789919e-18$
		MCH	4	3.00	$3.60615895e-32$
		MN	6	2.00	$9.01746628e-42$
	2.0	MIO	3	4.00	$4.42375870e-15$
		MC	4	4.00	$7.05085575e-15$
		MNO	4	4.00	$3.11160395e-15$
		MCH	5	3.00	$2.57361679e-18$
		MN	6	2.00	$5.05022048e-48$

f_i	x_0	Metode	n	COC	$x_n - x_{n-1}$
f_3	0.5	MIO	4	4.00	$9.59810135e-23$
		MC	4	4.00	$2.68896271e-23$
		MNO	4	4.00	$1.57506924e-22$
		MCH	5	3.00	$9.27833680e-51$
		MN	8	2.00	$3.00025812e-27$
	1.0	MIO	5	4.00	$3.36234521e-16$
		MC	5	4.00	$1.79543676e-16$
		MNO	4	4.00	$4.19906902e-16$
		MCH	6	3.00	$7.02024638e-28$
		MN	9	2.00	$2.72065913e-47$
	2.0	MIO	5	4.00	$1.41464084e-30$
		MC	6	4.00	$6.09657038e-39$
		MNO	5	4.00	$2.69603279e-23$
		MCH	7	3.00	$3.76537489e-28$
		MN	10	2.00	$9.10260918e-28$
f_4	0.5	MIO	4	4.00	$3.11983556e-18$
		MC	4	4.00	$3.63274329e-14$
		MNO	3	4.00	$9.08219918e-26$
		MCH	4	3.00	$1.74540965e-22$
		MN	6	2.00	$3.90226986e-39$
	1.0	MIO	3	4.00	$6.82711738e-42$
		MC	3	4.00	$4.16790386e-30$
		MNO	3	4.00	$9.20574784e-17$
		MCH	3	3.00	$1.19661256e-23$
		MN	6	2.00	$9.81051485e-47$
	2.0	MIO	3	4.00	$1.28499018e-16$
		MC	3	4.00	$6.83885181e-41$
		MNO	3	4.00	$1.20038686e-30$
		MCH	3	3.00	$1.57968600e-38$
		MN	6	2.00	$9.13313682e-38$

Pada Tabel 1 kolom pertama menyajikan fungsi, kolom kedua tebakan awal, kolom ketiga metode yang dibandingkan, kolom keempat jumlah iterasi dari metode yang digunakan, dan kolom terakhir menyajiakn selisih nilai akar yang dinotasikan dengan $x_n - x_{n-1}$.

Ucapan Terimakasih Penulis mengucapkan terimakasih kepada Dr. Imran M., M.Sc. yang telah memberikan arahan dan bimbingan dalam penulisan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Atkinson, K. E. 1993. *Elementary Numerical Analysis, 2^{nd} Ed.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

[2] Bartle, R. G. & D. R. Shebert. 1999. *Introduction to Real Analysis, 3^{rd} Ed.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

[3] Chun, C. 2010, A Geometric construction of iterative formulas of order three, *Applied Mathematics Letters*, **23**: 512–516.

[4] Cordero, A & J. R. Torregrosa. (2010), New modifications of Potra-Ptak's method with optimal fourth and eight orders of convergence, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **234**: 2969-2976.

[5] Fernandez-Torres G. & J. Vasquez-Aquino. 2013. Three New Optimal Fourth-Order Iterative Methods to Solve Nonlinear Equations, *Advances in Numerical Analysis*, **10**: 1-8.

[6] Mathews, J.H. 1992. *Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering, 2^{rd} Ed.* Prentice Hall. Englewood Cliffs, New Jersey.

[7] Noor, M. A. 2012. Fourth-Order Iterative Method Free from Second Derivative for Solving Nonlinear Equations, *Applied Mathematical Science*, **6**: 4617-4625.

[8] Stewart, J. 2003. *Kalkulus 5^{th} Ed:Jilid 2*. Ter. dari *Calculus, 5^{th} Ed*, oleh Sungkono. C. Penerbit Salemba Teknika, Jakarta.

[9] Traub, J.F. 1964. *Iterative Methods for the Solution of Equations*. Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs.

[10] Weerakoon, S & T.G.I. Fernando. 2000. A Variant of Newton's Method with Accelerated Third Order Convergence.*Applied Mathematics Letters*, **13**: 87-93.