EMPAT CARA UNTUK MENENTUKAN NILAI INTEGRAL POISSON

Novrialman[1*], Sri Gemawati[2], Agusni[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

[*] Novrialman@Gmail.com

ABSTRACT

Poisson Integral is one of the definite integrals that can not be solved by an elementary technique. In this article, we discuss four ways to solve the Poisson integral on the interval [-1, 1], that is using the Riemann sum, functional equations, parametric derivatives and infinite series. All of the methods produce the same solution.

Keywords: *functional equation, infinite series, parametric differentiation, Poisson integral, Riemann sums*.

ABSTRAK

Integral Poisson merupakan salah satu integral tentu yang tidak dapat diselesaikan secara teknik elementer. Pada Artikel ini dibahas mengenai empat cara untuk menyelesaikan Integral Poisson pada interval [-1, 1], yaitu dengan menggunakan jumlah Riemann, persamaan fungsional, turunan parametric dan deret tak-hingga. Keempat cara ini menghasilkan solusi yang sama.

Kata Kunci: *deret tak-hingga, integral Poisson, jumlah Riemann, persamaan fungsional, turunan parametrik.*

1. PENDAHULUAN

Kalkulus adalah salah satu mata pelajaran penting di dalam Matematika yang membahas dua pokok bahasan utama yaitu turunan dan integral. Turunan membahas tentang persoalan garis singung dan laju perubahan, sedangkan integral membahas tentang luas dan volume. Integral terbagi dua yaitu integral tentu dan integral tak tentu.

Selanjutnya yang dibahas dalam artikel ini adalah integral Poisson ($I(x)$) yang merupakan salah satu bentuk integral tentu. Menentukan nilai integral Poisson ini tidak dapat diselesaikan secara elementer, namun dapat ditentukan dengan empat cara yang berbeda, yaitu jumlah Riemann, fungsi fungsional, turunan parametrik, dan deret tak-hingga.

Pada artikel ini dijelaskan sifat-sifat dari integral Poisson dan empat caramenunjukan nilai integral Poisson untuk $I(x)=0$, jika $|x|<1$ dengan jumlah Riemann, fungsi fungsional, turunan parametrik, dan deret tak-hingga yang merupakan *review* detil dari artikel Hongwei Chen dengan judul *"Four Ways to Evaluate a Poisson Integral'',* 2002.

2. INTEGRAL POISSON

Sebelum membahas tentang beberapa sifat integral Poisson dan menentukan nilai integral Poisson dengan cara jumlah Riemann, fungsi fungsional, turunan parametrik, dan deret tak-hingga,terlebih dahulu diberikan beberapa Definisi dan Teorema.

Definisi 1 [4] Integral Poisson, dinotasikan dengan $I(x)$ didefinisikan oleh:

$$I(x)=\int_0^{\pi}\ln\left(1-2x\cos\theta+x^2\right)d\theta,\ \theta\in[0,\pi],\ x\in R. \tag{1}$$

Definisi 2 [3, h.120] Misalkan $A\subseteq R$ adalah interval, fungsi $f:A\to R$ dikatakan kontinu di $c\in A$, jika untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat $\delta>0$ sehingga untuk setiap $x\in A$ dengan $|x-c|<\delta,$ maka $|f(x)-f(c)|<\varepsilon.$

Definisi 3 [3, h.196] Fungsi $f:[a,b]\to R$ dikatakan terintegralkan secara Riemann pada $[a,b]$ jika terdapat $\delta_\varepsilon>0$ maka *tagged* partisi pada $[a,b]$ dimana $\left\|\dot{P}\right\|<\delta_\varepsilon,$ maka

$$\left|S\left(f;\dot{P}\right)-L\right|<\varepsilon.$$

Setiap fungsi yang terintegralkan secara Riemann pada $[a,b]$ dilambangkan dengan $\Re[a,b]$.

Definisi 4 [6, h.372] Fungsi logaritma natural, dinotasikan dengan $g(x)=\ln x,$ didefinisikan oleh:

$$\ln x=\int_1^x\frac{1}{t}\,dt,\ x>0,$$

dengan daerah asalnya adalah bilangan real positif.

Teorema1[6, h.375] Apabila a dan b bilangan-bilangan positif dan r sebuah bilangan rasional, maka

(i) $\ln 1=0.$

(ii) $\ln ab=\ln a+\ln b.$

(iii) $\ln\dfrac{a}{b}=\ln a-\ln b.$

(iv) $\ln a^r=r\ln a.$

Bukti:

(i) Dari Definisi 4, diperoleh

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0 \qquad \blacksquare$$

(ii) $\frac{d}{dx}(\ln ax) = \frac{1}{ax}a = \frac{1}{x} = \frac{d}{dx}(\ln x).$

Akibatnya, terdapat konstanta c sehingga $\ln ax + c.$ Untuk menentukan c, ambil $x = 1$, diperoleh $\ln a = \ln 1 + c$, karena $\ln 1 = 0$, maka $c = \ln a$. jadi $\ln ax = \ln x + \ln a$, sehingga untuk $x = b$, diperoleh

$$\ln ab = \ln a + \ln b. \qquad \blacksquare$$

(iii) Dari (ii) ambil $a = 1/b$ diperoleh $\ln \frac{1}{b} + \ln b = \ln\left(\frac{1}{b}.b\right) = \ln 1 = 0.$ Jadi $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$ berdasarkan Teorema 1(ii) diperoleh $\ln \frac{a}{b} = \ln\left(a.\frac{1}{b}\right)$, maka diperoleh

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b. \qquad \blacksquare$$

(iv) $\frac{d}{dx}(\ln x^r) = \frac{1}{x^r} rx^{r-1} = \frac{r}{x} = r\frac{1}{x} = r\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{d}{dx}(r \ln x).$

Akibatnya, terdapat konstanta c sehingga $\ln x^r = r \ln x + c.$ Untuk menentukan c, ambil $x = 1$, diperoleh $\ln 1 = r \ln 1 + c$, sehingga $c = 0$. jadi, $\ln x^r = r \ln x$ sehingga untuk $x = 1$, diperoleh

$$\ln a^r = r \ln a. \qquad \blacksquare$$

Teorema 2 [8, h.739] Jika $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ dan n adalah bilangan bulat positif, maka

$$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Bukti: Dari indentitas Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta,$$

jadi

$$z = re^{i\theta}.$$

Dengan demikian

$$z^n = \left[r\left(e^{i\theta}\right)\right]^n = r^n e^{in\vartheta},$$

sehingga

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta). \qquad \blacksquare$$

Definisi 5 [1, h.87] Misalkan $z = a + bi$ adalah sebarang bilangan kompleks, maka konjugat kompleks (*complex conjugat*) dari z dinotasikan dengan simbol $\bar{z}$ dan didefinisikan sebagai

$$\bar{z} = a - bi.$$

Dengan kata lain, $\bar{z}$ diperoleh dengan cara membalikkan tanda bagian imajiner dari z.

Definisi 6 [5, h.77] Fungsi sinus dan cosinus dalam bilangan kompleks didefinisikan oleh:

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \text{ dan } \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right),$$

untuk semua bilangan kompleks z.

Definisi 7 [2, h.264] Misalkan f_n, $n = 1,2,3,...$ adalah barisan fungsi yang didefinisikan pada himpunan E dan himpunan barisan $f_n(x)$ konvergen untuk setiap $x \in E$. Misalkan pula $f(x) = \lim_{x \to \infty} f_n(x)$ maka f_n disebut konvergen pada himpunan E.

Jika $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergen pada setiap E dan $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ maka f disebut jumlah deret $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Definisi 8 [7, h.147] $f_{n,}$ $n = 1,2,3,\ldots,$ konvergen seragam pada himpunan E ke fungsi f jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat N sedemikian hingga dimana $n \geq N$ berlaku

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| \leq \varepsilon,$$

untuk semua $x \in E$.

Definisi 9 [7, h.147] Deret $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergen seragam pada himpunan E, jika barisan parsil S_n yang didefinisikan dengan

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) = S_i(x),$$

konvergen seragam pada himpunan E.

3. EMPAT CARA UNTUK MENENTUKAN NILAI INTEGRAL POISSON

Sebelum menunjukan nilai integral Poisson dengan cara jumlah Riemann, fungsi fungsional, turunan parametrik, dan deret tak-hingga terlebih dahulu dibahas sifat-sifat pada integral Poisson yang dinyatakan dalam bentuk Teorema berikut.

Teorema 3 [4] Apabila $\theta \in [0, \pi]$ dan x suatu bilangan real, maka

(i) $I(0) = 0.$

(ii) $I(-x) = I(x).$

(iii) $I(x) = 2\pi \ln|x| + I(1/x), \ (x \neq 0).$

Bukti:

(i) Berdasarkan Definisi (1), diperoleh

$$I(0) = \int_0^{\pi} \ln 1 \, d\theta = \int_0^{\pi} 0 \, d\theta = 0. \qquad \blacksquare$$

(ii) Dengan menggunakan Definisi 4 pada persamaan (1), diperoleh

$$I(-x) = \int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2|-x|\cos\theta + \left|-x^2\right|\right) d\theta$$

$$I(-x) = \int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2x\cos\theta + x^2\right) d\theta.$$

Sehingga

$$I(-x) = I(x). \qquad \blacksquare$$

(iii) Persamaan (1) dapat juga ditulis

$$I(x) = \ln\left[x^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\theta + 1\right)\right] d\theta. \qquad (2)$$

Berdasarkan Teorema 1(ii), maka persamaan (2) menjadi

$$I(x) = \int_0^{\pi} \ln\left(x^2\right) d\theta + \int_0^{\pi} \ln\left(1 - \frac{2}{x}\cos\theta + \frac{1}{x^2}\right) d\theta,$$

$$I(x) = \int_0^{\pi} \ln\left(x^2\right) d\theta + I(1/x),$$

dengan menggunakan Teorema 1(iv), diperoleh

$$\int_0^{\pi} \ln\left(x^2\right) d\theta = 2\pi \ln|x|.$$

Sehingga

$$I(x) = 2\pi \ln|x| + I(1/x), \ (x \neq 0). \qquad \blacksquare$$

Teorema 4 [4] Apabila $I(x) = \int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2x\cos\theta + x^2\right) d\theta$ maka $I(x) = 0, \quad |x| < 1,$ $\theta \in [0, \pi].$

Bukti:

1. Dengan menggunakan jumlah Riemann.

Karena

$$1 - 2x\cos\theta + x^2 \geq (1 - |x|)^2, \text{ untuk } |x| < 1,$$

maka persamaan (1) kontinu dan terintegralkan. Partisi interval $[0,\pi]$ menjadi n subinterval dengan titik partisi $x_k = k\pi / n,$ untuk $1 \le k \le n.$ $S\left(f;\dot{P}\right)$ Jumlah Riemann untuk $I(x),$ diperoleh

$$S\left(f;\dot{P}\right) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+x^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{n}\ln\left[(1+x)^2\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+x^2\right)\right]. \tag{3}$$

Selanjutnya, misalkan $\omega = e^{(i\pi/n)}$, diberikan polinomial $x^{2n}-1$ mempunyai n buah pembuat nol yang berbeda. Akar-akar berbeda dari polinomialnya adalah ω^k untuk $-n \le k < n,$ maka

$$x^{2n}-1 = \prod_{k=-n}^{n-1}\left(x-\omega^k\right). \tag{4}$$

Berdasarkan Definisi 5, Teorema 2, dan Definisi 6 persamaan (4) menjadi

$$x^{2n}-1 = \left(x^2-1\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+x^2\right),$$

sehingga

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+x^2\right) = \frac{x^{2n}-1}{x^2-1}. \tag{5}$$

Substitusikan persamaan (5) ke (3), diperoleh

$$S\left(f;\dot{P}\right) = \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\left(x^{2n}-1\right)\right).$$

Berdasarkan Definisi 7 dan karena $|x|<1,$ diperoleh

$$x^{2n}\to 0,\ n\to\infty,$$

karena

$$I(x) = \lim_{n\to\infty} S\left(f;\dot{P}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\left(x^{2n}-1\right)\right),$$

sehingga

$$I(x) = 0.$$

■

2. Dengan menggunakan persamaan fungsional.
Akan ditunjukkan

$$I(x) = I(-x) = \frac{1}{2}I\left(x^2\right). \tag{6}$$

Pertama, jumlahkan dua persamaan Integral Poisson

$$I(x)+I(-x) = \int_0^{\pi}\ln\left(1-2x\cos\theta+x^2\right)d\theta + \int_0^{\pi}\ln\left(1+2x\cos\theta+x^2\right)d\theta, \tag{7}$$

dengan menggunakan Teorema 1(ii) pada persamaan (7), diperoleh

$$I(x)+I(-x)=\int_0^{\pi}\ln\left(1-2x^2\cos\theta+x^4\right)d\theta.$$

Misalkan $\alpha=2\theta,$ diperoleh

$$\begin{aligned}I(x)+I(-x)&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\ln\left(1-2x^2\cos\alpha+x^2\right)d\alpha\\&=\frac{1}{2}I\left(x^2\right)+\frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi}\ln\left(1-2x^2\cos\alpha+x^2\right)d\alpha.\end{aligned}$$

Selanjutnya dengan substitusi $\alpha=2\pi-t,$ diperoleh

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\ln\left(1-2x^2\cos(2\pi-t)+x^2\right)d\alpha=\frac{1}{2}I\left(x^2\right),$$

sehingga

$$I(x)+I(-x)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}I\left(x^2\right)+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}I\left(x^2\right). \tag{8}$$

Berikutnya dengan menggunakan Teorema 3(ii) pada persamaan (8), diperoleh persamaan (6), dengan menggunakan persamaan (6) secara berulang, diperoleh

$$I(x)=\frac{1}{2}I\left(x^2\right)=\frac{1}{2^2}I\left(x^4\right)=\cdots=\frac{1}{2^n}I\left(x^{2n}\right).$$

Berikutnya karena $|x|<1$ dan berdasarkan Definisi 7, diperoleh

$$x^{2n}\to 0,\, n\to\infty,$$

maka

$$I(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}I(0).$$

Selanjutnya dengan menggunakan Teorema 3(i), diperoleh

$$I(0)=0.$$

Sehingga

$$I(x)=0. \qquad \blacksquare$$

3. Dengan menggunakan turunan parametrik.

Karena $I(x)$ dapat diturunkan untuk $|x|<1,$ dengan aturan Leibnitz, diperoleh

$$I'(x)=\int_0^{\pi}\frac{-2\cos\theta+2x}{1-2x\cos\theta+x^2}d\theta. \tag{9}$$

Jelas bahwa $I'(0)=0.$ Selanjutnya akan ditunjukkan $I'(x)=0$ untuk $x\neq 0.$ Namun, sebelumnya dengan menggunakan persamaan kernel Poisson akan ditunjukkan

$$\int_0^{\pi}\frac{1-x^2}{1-2x\cos\theta+x^2}=\pi. \tag{10}$$

Gunakan substitusi setengah sudut dan misalkan $t=\tan(\theta/2),$ diperoleh

$$\int \frac{1-x^2}{1-2x\cos\theta + x^2}\,d\theta = 2\left(1-x^2\right)\int \frac{dt}{(1-x)^2 + (1+x)^2 t^2}$$
$$= \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}t\right) + C$$
$$= \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\tan(\theta/2)\right) + C. \qquad (11)$$

Selanjutnya dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus persamaan (11), diperoleh

$$\int_0^{\pi} \frac{1-x^2}{1-2x\cos\theta + x^2}\,d\theta = \lim_{\theta\to\pi} 2\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\tan(\theta/2)\right) = \pi.$$

Berikutnya dengan mensubstitusikan persamaan (10) ke (9), diperoleh

$$I'(x) = \frac{1}{x}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{1-x^2}{1-2x\cos\theta + x^2}\right)d\theta = 0.$$

Telah ditunjukkan $I'(x) = 0$ untuk $x \neq 0$, diperoleh

$$I'(x) = 0, \text{ untuk } |x| < 1,$$

maka

$$I(x) = C.$$

Karena $I(0) = 0$, telah ditunjukkan

$$I(x) = 0, \text{ untuk } |x| < 1. \qquad \blacksquare$$

4. Dengan menggunakan deret tak-hingga.
Akan ditunjukkan

$$\ln\left(1-2x\cos\theta + x^2\right) = -2\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\theta. \qquad (12)$$

Namun, sebelumnya dengan menyelesaikan persamaan kernel Poisson dengan Definisi (6) dan pecahan parsial, diperoleh

$$\frac{1-x^2}{1-2x\cos\theta + x^2} = \frac{1-x^2}{\left(1-xe^{i\theta}\right)\left(1-xe^{-i\theta}\right)} = -1 + \frac{1}{1-xe^{i\theta}} + \frac{1}{1-xe^{-i\theta}},$$

dengan perluasan deret geometri dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{1-x^2}{1-2x\cos\theta + x^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\theta. \qquad (13)$$

Deret (13) memenuhi Definisi (9) untuk $|x| < 1,$ selanjutnya dengan mengurangi 1 dan membagi dengan x pada persamaan (13), diperoleh

$$\frac{2\cos\theta - 2x}{1-2x\cos\theta + x^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}\cos n\theta. \qquad (14)$$

Deret (14) memenuhi Definisi (9) untuk $|x| < 1,$ dengan mengintegralkan persamaan (14) terhadap x dari 0 ke x, telah ditunjukkan persamaan (12). Selanjutnya untuk menentukan nilai integral Poisson integralkan persamaan (12) terhadap θ dari 0 ke π, sehingga

$$I(x) = 0. \qquad \blacksquare$$

4. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan sebelumnya maka dapat disimpulkan bahwa nilai integral Poisson dapat ditentukan dengan empat cara yang berbeda. Pertama, jumlah Riemann dengan menggunakan fungsi kontinu dan selanjutnya menggunakan konsep jumlah Riemann maka dihasilkan suatu persamaan yang dilambangkan dengan $S\left(f;\dot{P}\right)$. Persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan sifat logaritma natural. Berikutnya diberikan persamaan polinomial dengan akar-akar berbeda dari polinomialnya adalah ω^k, selanjutnya dengan menggunakan fungsi trigonometrik pada bilangan kompleks dan Teorema De Moivre pada persamaan polinomial, sehingga diperoleh persamaan polinomial yang dapat di substitusi pada $S\left(f;\dot{P}\right)$. Sehingga diperoleh persamaan $S\left(f;\dot{P}\right)$ dalam bentuk baru, dengan menggunakan konsep barisan fungsi pada $S\left(f;\dot{P}\right)$ sehingga diperoleh $I(x) = 0$ untuk $|x| < 1$.

Kedua persamaan fungsional dengan menggunakan salah satu jenis persamaan fungsional yaitu $\ln xy$ pada persamaan integral Poisson sehingga diperoleh persamaan fungsional untuk integral Poisson, dengan menetapkan $\alpha = 2\theta$ pada persamaan tersebut diperoleh persamaan fungsional yang baru untuk integral Poisson. Selanjutnya dengan menggunakan persamaan fungsional secara berulang, dan menggunakan konsep barisan fungsi pada integral Poisson diperoleh $I(x) = 0$ untuk $|x| < 1$.

Ketiga turunan parametrik dengan menggunakan aturan Leibnitz pada integral Poisson diperoleh $I'(x)$. Selanjutnya ditunjukkan untuk $I'(0) = 0$ dan $I'(x) = 0$ untuk $x \neq 0$. Dalam menunjukkan $I'(x) = 0$ untuk $x \neq 0$ digunakan persamaan kernel Poisson, diperoleh $I(x) = C$ untuk $x \neq 0$. Sehingga diperoleh $I(x) = 0$ untuk $|x| < 1$.

Keempat deret tak-hingga dengan menunjukkan nilai integral Poisson dengan deret tak-hingga, diberikan persamaan kernel Poisson. Dalam menyelesaikan persamaan kernel Poisson digunakan pecahan parsial dan fungsi trigonometrik pada bilangan kompleks, berikutnya diperoleh bentuk deret tak-hingga untuk persamaan kernel Poisson. Selanjutnya integralkan kedua ruas tersebut terhadap x dari 0 ke x. Dari hasil integral tersebut integralkan kembali terhadap θ dari 0 ke π, selanjutnya dengan menggunakan konsep deret yang konvergen seragam pada hasil integral tersebut, diperoleh $I(x) = 0$ untuk $|x| < 1$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H. 1987. *Aljabar Linear Elementer,* 6nd *Ed.* Terjemahan *Elementary Linear Algebra*, *Sixth Edition*, oleh Silaban, Pantur & I. N Susila. Erlangga, Jakarta.

[2] Apostol, T. M. 1974. *Mathematical Analysis*. *Second Edition.* Adison-Wesley Publishing Company, New York.

[3] Bartle, R. G & D. R. Serbet.2000. *Introduction to Real Analysis. Third Edition*. Jhon Wiley & sonc, Inc. New york.

[4] Chen. H. 2002. *Four Ways to Evaluate a Poisson Integral*. ProQuest Science Journals. **75 (4)**:290-294.

[5] Poliouras, J. D. 1987. *Peubah Kompleks Untuk Ilmuan dan Insinyur*. Terjemahan *Complex Variables For Scientists and Engineers*, oleh Drs. Wibisono Gunawan. Erlangga, Jakarta.

[6] Purcell, E. J. & D. Verbeg. 1987. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitis Edisi Kelima:Jilid 1*. Terjemahan *Calculus With Analytic Geometry, Fifth Edition*, oleh Susila, I. N., B. Kartasasmita & Rawuh. Erlangga, Jakarta.

[7] Rudin, W. 1976. *Principles of Mathematical Analysis. Third Edition.* McGraw-Hill, Inc. Tokyo.

[8] Stewart. J. 1998. *Kalkulus, Edisi Kempat:Jilid 1*. Terjemahan *Calculus, Fourth Edition,* oleh Susila, I. N & Gunawan, H. Erlangga, Jakarta.