METODE ITERASI BERTIPE NEWTON UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NONLINEAR DENGAN ORDE KONVERGENSI SEBARANG BILANGAN BULAT

Ayunda Putri[1*], Aziskhan [2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Laboratorium Matematika Terapan, Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*ayunda0215@yahoo.com

ABSTRACT

This article discusses an analytic study of combining iterative methods of order p and q with p and q integers to Newton's method to obtain a Newton-type iteration method of order $p+q$. This new method can also be applied to solve systems of nonlinear equations. Numerical computations are carried out consecutively for a method of second and third order, which produce a Newton-type method of fifth order, and methods of third and fifth order, which produce a Newton-type method of eighth order. The test results support the analytical studies.

Keywords: *order of convergence, nonlinear equations, systems of nonlinear equations, simple root, Newton's method.*

ABSTRAK

Pada artikel ini dibahas kajian analitik pengkombinasian metode iterasi berorde p dan q dengan p dan q bilangan bulat ke metode newton sehingga diperoleh metode iterasi bertipe Newton berorde $p+q$. Metode hasil konstruksi ini dapat juga diterapkan untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinear. Uji komputasi dilakukan berturut turut untuk metode berorde dua dan berorde tiga, yang menghasilkan metode bertipe Newton berorde lima, dan metode berorde tiga dan berorde lima yang menghasilkan metode bertipe Newton berorde delapan. Hasil uji komputasi mendukung kajian analitik.

Kata kunci: *orde konvergensi, persamaan nonlinear, sistem persamaan nonlinear, akar sederhana, metode Newton.*

1. PENDAHULUAN

Persamaan nonlinear adalah salah satu subjek yang memegang peranan penting dalam bidang ilmu matematika baik analisis maupun terapan. Namun terkadang pembahasan mengenai persamaan nonlinear ini terkendala karena bentuk persamaannya yang rumit dan tidak dapat diselesaikan dengan cara analitik, misalnya persamaan nonlinear dalam bentuk fungsi transenden. Seiring dengan pesatnya riset di bidang analisis numerik maka semakin berkembang pula metode untuk mencari akar sederhana α dari persamaan nonlinear $f(x) = 0$, dimana $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi skalar pada interval buka D. Salah satu metode yang umum dikenal adalah metode Newton yang bentuk iterasinya adalah

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{1}$$

Metode Newton konvergen secara kuadratik untuk tebakan awal yang cukup dekat dengan α [4, h. 282].

Metode Newton merupakan salah satu metode yang cukup banyak dimodifikasi oleh para peneliti. Misalnya modifikasi metode Newton dengan orde konvergensi tiga oleh Potra [6] yang didefinisikan dengan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) + f\left(x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)}. \tag{2}$$

King [2] melakukan modifikasi metode Newton menjadi keluarga satu parameter dengan orde konvergesi empat yang ditunjukkan dengan

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{f(x_n) + \beta f(y_n)}{f(x_n) + (\beta - 2) f(y_n)} \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}. \end{aligned}$$

Metode oleh King [2] dan Potra [6] merupakan metode iterasi dengan orde konvergensi bilangan bulat.

Pada bagian dua dari artikel ini dibahas metode iterasi bertipe Newton untuk menyelesaikan persamaan nonlinear dengan orde konvergensi sebarang bilangan bulat yang merupakan review dari artikel yang ditulis oleh Zhong Li, Chensong Peng, Tianhe Zhou dan Jun Gao [3] dengan judul *"A New Newton-Type Method for Solving Nonlinear Equations with Any Integer Order of Convergence"*. Pada bagian tiga, metode ini diaplikasikan untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinear. Kemudian di bagian empat dilakukan perbandingan numerik untuk kasus persamaan nonlinear dan sistem persamaan nonlinear terhadap beberapa fungsi uji.

2. METODE ITERASI BERTIPE NEWTON UNTUK PERSAMAAN NONLINEAR

Sebelum membahas tentang metode iterasi bertipe Newton untuk persamaan nonlinear akan diperkenalkan dua lema sebagai berikut.

Lema 1 [3] Asumsikan bahwa $f \in C^p(D)$ dan terdapat sebuah akar sederhana α dari persamaan nonlinear $f(x) = 0$, dimana $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah suatu fungsi skalar pada interval buka D. Jika terdapat sebuah fungsi iterasi $\varphi(x)$ dengan orde konvergensi p (p adalah bilangan bulat) yang menghasilkan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, maka

$$x_{n+1} - \alpha = A(x_n - \alpha)^p + O((x_n - \alpha)^{p+1}), \quad \text{jika} \quad x_n \in U(\alpha), \tag{3}$$

dengan konstanta $A \neq 0$ dan $U(\alpha)$ adalah lingkungan dari α.

Bukti. Menggunakan deret Taylor, $\varphi(x_n)$ diekspansikan di sekitar $x = \alpha$ sampai suku ke-p, lalu diperoleh

$$\begin{aligned}\varphi(x_n) = \varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{\varphi''(\alpha)}{2!}(x_n - \alpha)^2 + \cdots + \frac{\varphi^p(\alpha)}{p!}(x_n - \alpha)^p \\ + \frac{\varphi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}(x_n - \alpha)^{(p+1)}.\end{aligned} \tag{4}$$

Diketahui bahwa $\varphi(x)$ adalah sebuah fungsi iterasi sehingga $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Kemudian, $\varphi(x_n)$ diketahui berorde p sehingga persamaan (4) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \alpha + \frac{\varphi^p(\alpha)}{p!}(x_n - \alpha)^p + O((x_n - \alpha)^{(p+1)}) \\ &= A(x_n - \alpha)^p + O((x_n - \alpha)^{(p+1)}),\end{aligned}$$

dengan $A = \dfrac{\varphi^p(\alpha)}{p!}$ dan $A \neq 0$. Sehingga persamaan (3) terbukti. ■

Lema 2 [3] Misalkan bahwa $f \in C^{p+q}(D)$ dan terdapat sebuah akar sederhana α dari persamaan nonlinear $f(x) = 0$, dimana $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah sebuah fungsi skalar pada interval buka D. Misalkan $\psi(x)$ dan $\phi(x)$ adalah dua fungsi iterasi dengan orde konvergensi masing-masing p dan q (p, q bilangan bulat dan $p > q$). Jika hasil dari iterasi ke-$n+1$ dari $\psi(x)$ dan $\phi(x)$ adalah u_{n+1} dan v_{n+1}, maka orde konvergensi dari formula iterasi

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{f'(v_{n+1})} \tag{5}$$

adalah $p + q$.

Bukti. Terdapat fungsi iterasi $\psi(x)$ dan $\phi(x)$ yang masing-masing menghasilkan $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dan $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ yang konvergen ke α dengan orde konvergensi berturut-turut p dan q dimana $p > q$. Jadi, $u_{n+1} = \psi(u_n)$ dan $v_{n+1} = \phi(v_n)$. Pertama, $\psi(u_n)$ diekspansikan di sekitar $x = \alpha$ menggunakan deret Taylor sampai suku ke-$2p$ kemudian dengan cara yang sama pada Lema 1 diperoleh

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \alpha = A(u_n - \alpha)^p + A_1(u_n - \alpha)^{p+1} + A_2(u_n - \alpha)^{p+2} + \cdots + A_p(u_n - \alpha)^{2p} \\ + O((u_n - \alpha)^{2p+1}, \end{aligned} \tag{6}$$

dengan $A = \dfrac{\psi^p(\alpha)}{p!}$ dan $A_i = \dfrac{\psi^{p+i}(\alpha)}{(p+i)!}$, $i = 1, 2, \cdots, p$ dan $A \neq 0$. Selanjutnya, $\phi(v_n)$ diekspansikan di sekitar $x = \alpha$ sampai suku ke-q sehingga diperoleh

$$v_{n+1} - \alpha = B(v_n - \alpha)^q + O((v_n - \alpha)^{q+1}), \tag{7}$$

dengan memisalkan $B = \dfrac{\phi^q(\alpha)}{q!} \neq 0$.

Kemudian dengan menggunakan ekspansi Taylor $f(u_{n+1})$ yang diekspansikan di sekitar $x = \alpha$ sampai turunan ke-2 diperoleh

$$f(u_{n+1}) = f(\alpha) + f'(\alpha)(u_{n+1} - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(u_{n+1} - \alpha)^2 + O((u_{n+1} - \alpha)^3),$$

lalu, dengan menetapkan $f(\alpha) = 0$ diperoleh

$$f(u_{n+1}) = f'(\alpha)\big((u_{n+1} - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}(u_{n+1} - \alpha)^2 + O((u_{n+1} - \alpha)^3)\big). \tag{8}$$

Kemudian, dengan mensubstitusikan persamaan (6) ke persamaan (8) dan memisalkan $C = \dfrac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$ diperoleh

$$\begin{aligned} f(u_{n+1}) =& f'(\alpha)\Bigg(A(u_n - \alpha)^p + A_1(u_n - \alpha)^{p+1} + A_2(u_n - \alpha)^{p+2} + \cdots \\ &+ (A_p + \frac{C}{2}A^2)(u_n - \alpha)^{2p} + O((u_n - \alpha)^{2p+1})\Bigg). \end{aligned} \tag{9}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan ekspansi Taylor diperoleh

$$f'(v_{n+1}) = f'(\alpha)\big(1 + C(v_{n+1} - \alpha)\big) + O((v_{n+1} - \alpha))^2. \tag{10}$$

Kemudian, dengan mensubstitusikan persamaan (7) ke persamaan (10) didapatkan

$$f'(v_{n+1}) = f'(\alpha)\big(1 + BC(v_n - \alpha)^q + O((v_n - \alpha)^{q+1})\big). \tag{11}$$

Karena x_n, u_n, dan v_n konvergen ke α maka untuk $n \to \infty$ asumsikan $e_n = x_n - \alpha = u_n - \alpha = v_n - \alpha$ sehingga persamaan (9) dan (11) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} f(u_{n+1}) =& f'(\alpha)\Big(Ae_n^p + A_1 e_n^{p+1} + A_2 e_n^{p+2} + \cdots + (A_p + \frac{C}{2}A^2)e_n^{2p} + \\ &+ Oe_n^{2p+1}\Big), \end{aligned} \tag{12}$$

$$f'(v_{n+1}) = f'(\alpha)\big(1 + BCe_n^q + O(e_n^{q+1})\big). \tag{13}$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (12) dan (13) ke persamaan (5) diperoleh

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \alpha &+ Ae_n^p + A_1 e_n^{p+1} + A_2 e_n^{p+2} + \cdots + A_p e_n^{2p} + O(e_n^{p+1}) \\ &- f'(\alpha)\Big(Ae_n^p + A_1 e_n^{p+1} + A_2 e_n^{p+2} + \cdots + (A_p + \frac{C}{2}A^2)e_n^{2p} \\ &+ O(e_n^{2p+1})\Big) \times \Big(f'(\alpha)(1 + CBe_n^q + Oe_n^{q+1})\Big)^{-1}. \end{aligned} \tag{14}$$

Selanjutnya dengan menggunakan formula deret geometri

$$\frac{1}{1+r} = 1 - r + r^2 - \cdots ,$$

dan mengambil $r = BCe_n^q + O(e_n^{q+1})$ maka persamaan (14) menjadi

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \alpha + Ae_n^p + A_1 e_n^{p+1} + A_2 e_n^{p+2} + \cdots + A_p e_n^{2p} + O(e_n^{p+1}) \\ &\quad - \Big(Ae_n^p + A_1 e_n^{p+1} + A_2 e_n^{p+2} + \cdots + A_p e_n^{2p} + \frac{C}{2}A^2 e_n^{2p} \\ &\quad + O(e_n^{2p+1})\Big)\Big(1 - BCe_n^q + B^2C^2e_n^{2q} + O(e_n^{2q+1})\Big), \\ &= \alpha + ABCe_n^{p+q} + O(e_n^{p+q+1}) \quad \text{untuk} \quad n \to \infty. \\ e_{n+1} &= ABCe_n^{p+q} + O(e_n^{p+q+1}). \end{aligned} \tag{15}$$

Jadi, terbukti metode yang ditunjukkan persamaan (5) berorde konvergensi $p+q$. ■

Teorema 3 berikut ini menjamin bahwa metode iterasi yang didefinisikan pada persamaan (5) berorde sebarang bilangan bulat jika terdapat dua metode berorde p dan q dengan p dan q bilangan bulat.

Teorema 3 [3] Jika terdapat sebuah akar sederhana α dari persamaan nonlinear $f(x) = 0$, dimana $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi skalar pada interval buka D, dan $f(x)$ mempunyai turunan secukupnya pada D maka diperoleh metode iterasi dari persamaan (5) berorde konvergensi sebarang bilangan bulat.

Bukti. Berdasarkan persamaan (5) diperoleh suatu metode iterasi berorde sebarang bilangan bulat jika terdapat dua metode iterasi berorde p dan q dimana $p,\ q \in \mathbb{N}$ dengan $p > q$. Dapat dikatakan bahwa metode iterasi yang didefinisikan pada persamaan (5) berorde $p + q = n$ dengan n adalah sebarang bilangan bulat. Kemudian, dengan menggunakan prinsip induksi matematika akan dibuktikan bahwa Teorema 3 benar.

Pertama, telah dikenalkan pada bab sebelumnya bahwa terdapat metode iterasi berorde 2, 3 dan 4. Metode iterasi dengan orde $n = 5$ diperoleh dari dua metode berorde p dan q dengan $p > q \geq 2$ atau $p = 3$ dan $q = 2$ sehingga Teorema 3 benar untuk $n = 5$. Selanjutnya, asumsikan untuk $n = k \geq 5$, $k \in \mathbb{N}$ maka $p + q = k$ adalah benar. Kemudian, untuk $n = k + 1 \geq 5$ diperoleh

$$\begin{aligned} p + q =& k + 1 \\ p + q + 1 =& k + 1 + 1 \\ p + 1 + q =& n + 1. \end{aligned}$$

Jadi, metode iterasi berorde $n + 1$ diperoleh dari metode berorde $p + 1$ dan q dan terbukti bahwa metode iterasi yang dideskripsikan pada persamaan (5) berorde sebarang bilangan bulat. ■

Berikut ini dikonstruksi dua metode iterasi bertipe Newton untuk menyelesaikan persamaan nonlinear.

(1) Formula iterasi bertipe Newton orde lima
Berdasarkan Lema 1, Lema 2 dan Teorema 3 maka dengan menggunakan metode Newton pada persamaan (1) dan metode orde tiga Potra [6] pada persamaan (2) kemudian mensubstitusikannya ke persamaan (5) diperoleh metode iterasi orde lima berikut

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= x_n - \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= z_n - \frac{f(z_n)}{f'(y_n)}. \end{aligned} \tag{16}$$

(2) Formula iterasi bertipe Newton orde delapan
Formula iterasi ini dikonstruksi dari metode orde tiga [6] dan metode iterasi baru bertipe Newton berorde lima dari persamaan (16) dan menerapkannya ke per-

samaan (5) diperoleh metode iterasi orde delapan berikut

$$
\begin{aligned}
y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\
z_n &= x_n - \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)}, \\
w_n &= z_n - \frac{f(z_n)}{f'(y_n)}, \\
x_{n+1} &= w_n - \frac{f(w_n)}{f'(z_n)}.
\end{aligned} \tag{17}
$$

3. METODE ITERASI UNTUK SISTEM PERSAMAAN NONLINEAR

Metode iterasi untuk sistem persamaan nonlinear pada bagian ini merupakan bentuk aplikasi dari metode iterasi bertipe Newton berorde konvergensi sebarang bilangan bulat untuk persamaan nonlinear. Teorema 4 di bawah ini untuk merupakan bentuk analisis metode iterasi berorde sebarang bilangan bulat untuk sistem persamaan nonlinear.

Teorema 4 [3] Misalkan $F : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ terdiferensial Frechet t-kali pada himpunan konveks D yang memuat akar $\boldsymbol{\alpha}$ dari $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Jika terdapat dua fungsi iterasi $\psi(\mathbf{x})$ dan $\phi(\mathbf{x})$ dengan orde kekonvergenan masing - masing p dan q (p dan q bilangan bulat dan $p > q$). Hasil iterasi ke $n+1$ dari $\psi(\mathbf{x})$ dan $\phi(\mathbf{x})$ adalah $\mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1}$, maka orde konvergensi formula iterasi

$$
\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1} - \big(F'(\mathbf{v}_{n+1})\big)^{-1}\big(F(\mathbf{u}_{n+1})\big) \tag{18}
$$

adalah $p + q$.

Bukti. Sistem persamaan nonlinear $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ dimana $F(\mathbf{x}) = f_i[x_1, x_2, \cdots, x_k]$ dengan $i = 1, 2, \cdots, k$ konvergen ke $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k]^T$. Jika terdapat fungsi iterasi $\psi(\mathbf{u})$ dan $\phi(\mathbf{v})$ yang merupakan fungsi bernilai vektor untuk menyelesaikan $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ maka masing-masing fungsi iterasi ψ dan ϕ menghasilkan barisan vektor $\{\mathbf{u}_n\}_{n=0}^{\infty}$ dan $\{\mathbf{v}_n\}_{n=0}^{\infty}$ dengan $\mathbf{u}_n = [u_{1n}, u_{2n}, \cdots, u_{kn}]^T$ dan $\mathbf{v}_n = [v_{1n}, v_{2n}, \cdots, v_{kn}]^T$. Jadi, $\mathbf{u}_{n+1} = \psi(\mathbf{u}_n)$ dan $\mathbf{v}_{n+1} = \psi(\mathbf{v}_n)$. Selanjutnya, pembuktian dari teorema ini diperoleh dengan cara yang sama dengan bukti Lema 2. ∎

Berikut ini diaplikasikan metode bertipe Newton yang didefinisikan pada Teorema 4 untuk mengkonstruksi formula iterasi berorde lima untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinear. Metode ini dibentuk dari metode Newton untuk sistem persamaan nonlinear [5, h. 140] dan metode orde tiga Darvishi [1] sehingga diperoleh metode iterasi bertipe Newton untuk sistem persamaan nonlinear berorde lima berikut.

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_n &= \mathbf{x}_n - \big(F'(\mathbf{x}_n)\big)^{-1}\big(F(\mathbf{x}_n)\big),\\ \mathbf{u}_n &= \mathbf{x}_n - \big(F'(\mathbf{x}_n)\big)^{-1}\big(F(\mathbf{x}_n) + F(\mathbf{v}_n)\big),\\ \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{u}_n - \big(F'(\mathbf{v}_n)\big)^{-1}\big(F(\mathbf{u}_n)\big),\end{aligned} \tag{19}$$

dengan $F^{'}$ adalah matriks Jacobian dari sistem persamaan nonlinear tersebut.

4. PERBANDINGAN NUMERIK

Pada bagian ini dilakukan perbandingan numerik antara metode iterasi bertipe Newton untuk kasus persamaan nonlinear dan sistem persamaan nonlinear terhadap beberapa metode pembanding, untuk melihat jumlah iterasi yang diperlukan setiap metode untuk mencapai akar pendekatan.

4.1 Kasus Persamaan Nonlinear

Berikut ini dilakukan perbandingan numerik antara metode Newton (NM), metode iterasi bertipe Newton orde lima (MOL) pada persamaan (16) dan metode iterasi bertipe Newton orde delapan (MOD) pada persamaan (17) untuk menyelesaikan sembilan persamaan nonlinear. Semua komputasi menggunakan program Matlab dengan kriteria pemberhentian iterasi sebagai berikut :

1. Jika nilai mutlak fungsi lebih kecil dari toleransi 1.0×10^{-14}.
2. Jika selisih nilai mutlak antara dua iterasi yang berdekatan bernilai lebih kecil dari toleransi yang diberikan.

Berdasarkan uji komputasi pada Tabel 1, dapat disimpulkan bahwa MOL dan MOD lebih unggul dibandingkan dengan NM dalam hal jumlah iterasi yang diperlukan untuk memperoleh akar pendekatan. MOL dan MOD memerlukan jumlah iterasi yang lebih sedikit dibandingkan dengan NM untuk semua fungsi pada setiap tebakan awal yang berbeda. Selain itu, MOL dan MOD relatif lebih stabil daripada NM ketika tebakan awal diambil lebih jauh dari akar.

4.2 Kasus Sistem Persamaan Nonlinear

Untuk kasus sistem persamaan nonlinear berikut dilakukan simulasi numerik untuk melihat perbandingan dari metode Newton untuk sistem persamaan nonlinear (NMS), metode orde tiga Darvishi (MOTS), dan metode baru orde lima (MOLS) pada persamaan (19) terhadap dua sistem persamaan nonlinear. Kriteria pemberhentian iterasi sama dengan pada kasus persamaan nonlinear.

Contoh 1 Tentukan akar pendekatan dari sistem persamaan nonlinear berikut :

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 1, \\ 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_3 &= 0, \\ 3x_1^2 - 4x_2^2 + x_3^2 &= 0, \end{aligned}$$

dengan tebakan awal $x_0 = [0.5, 0.5, 0.5]^T$ dan toleransi 1.0×10^{-14}.

Contoh 2 Tentukan akar pendekatan dari sistem persamaan nonlinear berikut :

$$\begin{aligned} x_1^2 + 3\log x_1 - x_2^2 &= 0, \\ 2x_1^2 - x_1x_2 - 5x_1 + 1 &= 0, \end{aligned}$$

dengan tebakan awal $x_0 = [1.5,\ 0]^T$ dan toleransi 1.0×10^{-14}.

Tabel 1: Perbandingan Numerik Metode Newton dan Metode Baru Bertipe Newton

Fungsi	Akar pendekatan	x_0	NM	MOL	MOD
$f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10$	1.365230013414097	3	6	3	3
		10	9	4	3
$f_2(x) = \sin(x)^2 - x^2 + 1$	1.404491648215341	10	8	4	3
		15	8	4	3
$f_3(x) = x^2 - e^x - 3x + 2$	0.257530285439861	3	6	3	2
		10	13	6	6
$f_4(x) = xe^{x^2} - \sin(x)^2$	-1.207647827130919	-1	5	3	2
$+3\cos(x) + 5$		-5	30	15	12
$f_5(x) = e^{x^2+7x-30} - 1$	3.000000000000000	4	19	9	8
		5	35	17	14
$f_6(x) = \ln(x) + \sqrt{x} - 5$	8.309432694231573	20	6	3	3
		15	5	3	2
$f_7(x) = \sin(x)e^x - 2x - 5$	-2.523245230732555	-1	4	2	2
		0	5	2	2
$f_8(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{x} - 3$	9.633595562832696	20	5	3	2
		25	6	3	2
$f_9(x) = x^3 - 10$	2.154434690031884	3	5	3	2
		10	9	4	3

Tabel 2: Hasil Komputasi Beberapa Metode Iterasi Contoh 1

Metode	n	x_1	x_2	x_3
MOLS	0	0.500000000000000	0.500000000000000	0.500000000000000
	1	0.696448843864469	0.628319947168216	0.342567396978022
	2	0.698288609971492	0.628524297960214	0.342564189689569
	3	0.698288609971514	0.628524297960214	0.342564189689569
MOTS	0	0.500000000000000	0.500000000000000	0.500000000000000
	1	0.676250000000000	0.623000000000000	0.343250000000000
	2	0.698276805058875	0.628524079591708	0.342564189760303
	3	0.698288609971512	0.628524297960214	0.342564189689570
NM	0	0.500000000000000	0.500000000000000	0.500000000000000
	1	0.750000000000000	0.650000000000000	0.350000000000000
	2	0.700091575091575	0.628888419273035	0.342582417582418
	3	0.698290931715408	0.628524403430205	0.342564189799643
	4	0.698288609975374	0.628524297960223	0.342564189689569
	5	0.698288609971514	0.628524297960214	0.342564189689569

Tabel 3: Hasil Komputasi Beberapa Metode Iterasi Contoh 2

Metode	n	x_1	x_2
MOLS	0	1.500000000000000	0.000000000000000
	1	1.130272909949347	−1.302845782238588
	2	1.319216001938406	−1.600899173170174
	3	1.319205803329892	−1.603556555187414
MOTS	0	1.500000000000000	0.000000000000000
	1	1.450205653511357	−1.555545744845718
	2	1.320199088981654	−1.604718032960449
	3	1.319205804247141	−1.603556557551876
	4	1.319205803329892	−1.603556555187415
NM	0	1.500000000000000	0.000000000000000
	1	0.806720935135101	−1.795519376576599
	2	1.631383234754615	−2.124070741932193
	3	1.366728041815741	−1.716322788648612
	4	1.320405291443372	−1.608866218515106
	5	1.319205229843023	−1.603564378990663
	6	1.319205803322461	−1.603556555195104
	7	1.319205803329892	−1.603556555187415

Pada Tabel 2 dan Tabel 3, kolom pertama menunjukkan metode yang digunakan, kolom n untuk iterasi, dan kolom x_i dengan $i = 1,\ 2, \cdots$ menyatakan variabel ke-i dari x. Dari simulasi numerik terhadap dua contoh sistem persamaan nonlinear tersebut, secara keseluruhan MOLS lebih cepat meraih akar pendekatan daripada MOTS dan NM dimana untuk kedua contoh tersebut MOLS memerlukan lebih sedikit iterasi daripada MOTS dan NM. Meskipun pada Contoh 1 MOTS dan MOLS sama-sama memerlukan tiga iterasi, akan tetapi MOLS telah mendekati akar yaitu nilai x_2 dan x_3 pada iterasi ke-2. Jadi dapat disimpulkan bahwa MOLS lebih unggul dari MOTS dan NM.

UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan terima kasih diberikan kepada Dr. Imran M., M.Sc. yang telah membimbing dan memberikan arahan dalam penulisan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Darvishi, M. T. & A. Barati. 2007. A Third-Order Newton-type Method to Solve Systems of Nonlinear Equations. *Applied Mathematics and Computation*, 187 : 630–635.

[2] King, R. F. 1973. A Family of Fourth Order methods for Nonlinear Equations. *SIAM Journal on Numerycal Analysis*, 5(10) : 876–879.

[3] Li, Z. C. Peng, T. Zhou, & J. Gao. 2011. A New Newton-type Method for Solving Nonlinear Equations with Any Integer Order of Convergence. *Journal of Computational Information System 7*, 7: 2371–2378.

[4] Neumaier, A. 2001. *Introduction to Numerical Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge.

[5] Ortega, J. M. 1990. *Numerical Analysis: A Second Course.* SIAM, Philadelphia.

[6] Potra, F. A. & V. Ptak. 1984. Nondiscrete Induction and Iterative Processes. *Research Notes in Mathematics*, Vol 203. Pitman, Boston.

[7] Traub, J. F. 1964. *Iterative Methods for the Solution of Equations.* Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.