GENERALISASI METODE GAUSS-SEIDEL UNTUK MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Andri Ramadhan[1*], Syamsudhuha[2], Asli Sirait[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Laboratorium Matematika Terapan, Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*andri.r0405@yahoo.co.id

ABSTRACT

This article presents a generalized Gauss-Seidel method for solving system of linear equations. This article is a review of Salkuyeh's paper [Numerical Mathematics, A Journal of Chinese Universities, 16: 164-170, 2007]. Some examples are presented at the end of discussion.

Keywords: *System of Linear Equation, Strictly Diagonally Dominant, Gauss-Seidel Method, and Generalized Gauss-Seidel Method.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas generalisasi metode Gauss-Seidel untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Artikel ini merupakan kajian ulang dari artikel Salkuyeh [Numerical Mathematics, A Journal of Chinese Universities, 16: 164-170, 2007]. Beberapa contoh diberikan di akhir pembahasan.

Kata kunci: *Sistem Persamaan Linear, Dominan Diagonal Secara Tepat, Metode Gauss-Seidel, dan Generalisasi Metode Gauss-Seidel.*

1. PENDAHULUAN

Sistem persamaan linear merupakan salah satu model dan masalah matematika yang banyak diterapkan dalam berbagai ilmu. Suatu sistem persamaan linear terdiri atas sejumlah berhingga persamaan linear dalam sejumlah berhingga variabel.

Sistem Persamaan Linear dalam bentuk persamaan perkalian matriks dapat ditulis

$$Ax = b, \tag{1}$$

dengan asumsikan bahwa matriks A adalah matriks nonsingular, dan semua elemen diagonalnya tidak ada yang nol. Maka matriks A diberi pemisah (*splitting*) yaitu

$$A = D - E - F,$$

dengan D adalah matriks diagonal dari A, E adalah matriks segitiga bawah dari A,dan F adalah matrik segitiga atas dari A. Maka metode Gauss-Seidel untuk persamaan (1) didefinisikan sebagai berikut

$$x^{(k+1)} =(D-E)^{-1}Fx^{(k)} + (D-E)^{-1}b \tag{2}$$

Metode iterasi Gauss-Seidel dengan nilai aproksimasi akan konvergen pada sebarang tebakan awal x_0. Dengan syarat A matriks simetris positif. Namun metode iterasi Gauss-Seidel konvergennya masih dinilai lambat.

Dengan latar belakang tersebut, penulis tertarik untuk membahas jurnal yang ditulis oleh Davod Khojasteh Salkuyeh dengan judul *Generalized Jacobi and Gauss-Seidel Methods for Solving Linear Sistem of Equations*[1]. Penelitian ini bertujuan untuk menemukan solusi sistem persamaan linear dengan generalisasi metode Gauss-Seidel.

2. GENERALISASI METODE GAUSS-SEIDEL

Misalkan $A = (a_{ij})$ sebuah matriks simetris dan $D_m = (d_{ij})$, $E_m = (e_{ij})$, dan, $F_m = (f_{ij})$ digeneralisasikan menurut suatu parameter dengan $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ untuk $\forall i, j = 1, 2, \ldots n$, sehingga,

$$A = D_m - E_m - F_m. \tag{3}$$

Berikut ilustrasikan bentuk matriks Gauss-Seidel yang telah digeneralisasikan.

$$D_m = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m+1} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0 \\ a_{m+1,1} & & \ddots & & a_{n-m,n} \\ 0 & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n,n-m} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$E_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{m+2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ -a_{n,1} & \cdots & -a_{n-m-1,n} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a1,m+2 & \cdots & -a_{1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{n-m-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Generalisasi metode Gauss-Sidel untuk persamaan(3) dapa didefinisikan sebagai berikut

$$x^{(k+1)} = (D_m - E_m)^{-1} F_m x^{(k)} + (D_m - E_m)^{-1} b, \tag{4}$$

dengan matriks $T_{GGS}^{(m)} = (D_m - E_m)^{-1} F$ berperan sebagai matriks iterasi dari generalisasi metode Gauss-Seidel.

3. KONVERGENSI

Definisi 1 [1, h. 166]
Matriks $A = (a_{ij})$ berukuran $n \times n$ dikatakan *strictly diagonally dominant(SDD)* jika

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1 j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Teorema 2 [4]
Jika matriks $A \in R^{(n\times n)}$ DDST maka A non singular
Bukti: lihat[4]

Lema 3 [5, h. 96]
Misalkan $A = D - E - F$ dan $A(\lambda) = \lambda D - E - F$. Jika A adalah matriks bersifat DDST dan semua $|\lambda| \geq 1$ maka $A_G(\lambda)$ juga bersifat DDST.
Bukti: lihat[5, h. 96]

Definisi 4 [3, h. 269]
Misalkan $\|\cdot\|$ menyatakan suatu norm vektor. Barisan vektor $x^{(k)}$ dikatakan konvergen ke suatu vektor $x \in R$ jika dan hanya jika $\left\|x^{(k)} - \widehat{x}\right\| \to 0$ ketika $k \to \infty$.

Teorema 5 [2, h. 511]
Misalkan $A = M - N \in R^{(n\times n)}$ suatu matriks yang non singular dan $b \in R^n$. Jika M non singular dan $\rho(M^{-1}N) < 1$ maka iterasi $x^{(k)}$ yang didefinisikan oleh $Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$ konvergen ke $\widehat{x} = A^{-1}b$ untuk sebarang tebakan awal $x^{(0)}$.
Bukti: lihat[2, h. 511]

Teorema 6 [5, h. 95]
Misalkan $A = D - E - F \in R^{(n\times n)}$ dan $G = (D - E)^{-1} + F$ merupakan matriks iterasi metode Gauss-Seidel. Jika A adalah matriks yang bersifat DDST maka: i. Matriks $D - E$ non singular
ii. $\rho(G) < 1$.
Bukti: lihat[5, h. 95]

Karena matriks $D_m - E_m$ nonsingular dan $\rho(G) < 1$ menurut Teorema 5, iterasi metode Gauss-Seidel ke solusi $x = A^{-1}b$ untuk sebarang tebakan awal nol

Akan dibuktikan konvergensi generalisasi metode Gauss-Seidelmengikuti Teorema 6. Misal λ nilaieigen dari matriks $G_m \in R^{n\times n}$ pada persamaan (4). Oleh karna itu,λ memenuhi persamaan karekteristik

$$det(\lambda I - G_m) = 0$$

$$\begin{aligned}
det(\lambda I - G_m) =& det(\lambda I - (D_m - E_m)^{-1}F_m) \\
=& det(\lambda(D_m - E_m)^{-1}(D_m - E_m) - (D_m - E_m)F_m) \\
=& det((D_m - E_m)^{-1}(\lambda(D_m - E_m) - F_m)) \\
=& det((D_m - E_m)^{-1})det(\lambda(D_m - E_m) - F_m) \\
=& det((D_m - E_m)^{-1})det(A_{G_m}(\lambda)) \\
=& 0
\end{aligned}$$

Karena matriks $D_m - E_m$ bersifat DDST, maka matriks $(D_m - E_m)^{-1}$ juga bersifat DDST dan menurut Teorema 2, $D_m - E_m$ non singular. Karena $D_m - E_m$ non singular maka terdapat matriks $(D_m - E_m)^{-1}$ dengan $det[D_m - Em] \neq 0$.
Agar $det(\lambda I - G_m) = 0$, haruslah $det(A_{G_m})(\lambda) = 0$ atau $A_{G_m}(\lambda)$ singular karena $det([D_m - E_m]) \neq 0$. Dengan kata lain, jika $|\lambda|\, 1$ maka matriks $A_{G_m}(\lambda)$ bersifat DDST dan karena $A_{G_m}(\lambda)$ non singular. Karena dalam kasus matriks $A_{G_m}(\lambda)$ singular maka menurut Lema 3 $A_{G_m}(\lambda)$ tidak bersifat DDST. Keadaa $A_{G_m}(\lambda)$ tidak bersifat DDST hanya terpenuhi jika $|\lambda| < 1$ atau $\rho(G_m) < 1$.

Contoh 1 Misal diberikan suatu sistem persamaan linear sebagai berikut

$$\begin{aligned}
10x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 =& 3 \\
-2x_1 + 10x_2 - x_3 - x_4 =& 15 \\
-x_1 - x_2 + 10x_3 - 2x_4 =& 27 \\
-x_1 - x_2 - 2x_3 + 10x_4 =& -9
\end{aligned}$$

Carilah sosusi SPL tersebut dengan metode Gauss-Seidel dan dengan generalisasi metode Gauss-Seidel dengan tebakan awal $x^0 = [0, 0, 0, 0]^T$ dan error $\varepsilon = 0{,}0002$.

Penyelesaian Contoh dengan Metode Gauss-Seidel
Sistem persamaan linear diatas dapat ditulis dalam bentuk $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & 10 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 10 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & 10 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \\ 27 \\ -9 \end{bmatrix},$$

karena A bersifat DDST maka sistem persamaan linear ini dapat diselesaikan secara numerik dengan metode Gauss-Seidel Dengan menulis $A = D - E - F$ di peroleh

$$D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(D-E)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,10 & 0 & 0 & 0 \\ 0,02 & 0,10 & 0 & 0 \\ 0,01 & 0,01 & 0,10 & 0 \\ 0,01 & 0,01 & 0,02 & 0,10 \end{bmatrix},$$

$$(D-E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & 0,20 & 0,10 & 0,10 \\ 0 & 0,04 & 0,12 & 0,12 \\ 0 & 0,02 & 0,02 & 0,22 \\ 0 & 0,03 & 0,02 & 0,07,1 \end{bmatrix}, \quad (D-E)^{-1}b = \begin{bmatrix} 0,3 \\ 1,56 \\ 2,89 \\ -0,12 \end{bmatrix},$$

Gunakan persamaan metode Gauss-Seidel

$$x^{(k+1)} = (D-E)^{-1}Fx^{(k)} + (D-E)^{-1}b$$

Tabel 1: Iterasi Contoh Kasus Memakai Metode Gauss-Seidel

n	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,3000	1,5600	2,8860	−0,1368
2	0,8869	0,6923	0,3706	0,4120
3	0,5167	1,6816	3,0022	−0,0797
4	0,9286	1,9780	2,9747	−0,0144
5	0,9916	1,9944	2,9957	−0,0023
6	0,9982	1,9990	2,9993	−0,0004
7	0,9997	1,9998	2,9999	0,0001
8	0,9999	2,0000	3,0000	0,0000
9	1,0000	2,0000	3,0000	0,0000

Dari Tabel 1, dapat disimpulkan, proses iterasi dihentikan setelah iterasi sebanyak 9 kali, karena $\left\| x_i^{(9)} - x_i^{(8)} \right\| < 0,0002$,$\forall i = 1,2,3,4$.

Penyelesaian Contoh dengan Generalisasi Metode Gauss-Seidel

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan generalisasi metode Gauss-Seidel, dapat dipilih nilai dari parameter $m \in \{1,2,3\}$ sedemikian hingga

$$x^{(k+1)} = (D_m - E_m)^{-1}F_m x^{(k)} + (D_m - E_m)^{-1}b$$

Untuk $m = 1$

$$x^{(k+1)} = (D_1 - E_1)^{-1} F_1 x^{(k)} + (D_1 - E_1)^{-1} b$$

dengan

$$D_1 = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 10 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 10 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(D_1 - E_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,02 & 0 & 0 \\ 0,02 & 0,11 & 0,01 & 0 \\ 0,02 & 0,02 & 0,11 & 0,02 \\ 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,10 \end{bmatrix},$$

$$(D_1 - E_1)^{-1} F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,10 & 0,13 \\ 0 & 0 & 0,02 & 0,13 \\ 0 & 0 & 0,02 & 0,03 \\ 0 & 0 & 0,02 & 0,03 \end{bmatrix}, \quad (D_1 - E_1)^{-1} b = \begin{bmatrix} 0,69 \\ 1,93 \\ 2,95 \\ -0,05 \end{bmatrix},$$

Tabel 2: Iterasi Contoh Kasus Memakai Generalisasi Metode Gauss-Seidel $m = 1$

n	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,6865	1,9325	2,9524	−0,1368
2	0,9890	0,7468	0,7319	0,4120
3	0,8550	2,0429	2,9872	−0,0797
4	0,9971	1,9981	2,9994	−0,0144
5	0,9999	1,9999	3,0000	−0,0023
6	1,0000	2,0000	3,0000	−0,0004

Dari Tabel 2, dapat disimpulkan, proses iterasi dihentikan setelah iterasi sebanyak 6 kali, karena $\left\| x_i^{(6)} - x_i^{(5)} \right\| < 0,0002$,$\forall i = 1,2,3,4$.
Untuk $m = 2$

$$x^{(k+1)} = (D_2 - E_2)^{-1} F_2 x^{(k)} + (D_2 - E_2)^{-2} b$$

dengan

$$D_2 = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 10 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 10 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(D_2 - E_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,11 & 0,02 & 0,01 & 0,005 \\ 0,02 & 0,11 & 0,02 & 0,01 \\ 0,02 & 0,02 & 0,11 & 0,02 \\ 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,11 \end{bmatrix},$$

$$(D_2 - E_2)^{-1}F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,11 \\ 0 & 0 & 0 & 0,02 \\ 0 & 0 & 0 & 0,02 \\ 0 & 0 & 0 & 0,02 \end{bmatrix}, \quad (D_2 - E_2)^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Tabel 3: Iterasi Contoh Kasus Memakai Generalisasi Metode Gauss-Seidel $m = 2$

n	x_1	x_2	x_3	x_4
0	$0,0000$	$0,0000$	$0,0000$	$0,0000$
1	$1,000$	$2,0000$	$3,0000$	$0,0000$
2	$1,000$	$1,0000$	$1,0000$	$0,0000$
3	$1,000$	$2,0000$	$3,0000$	$0,0000$
4	$1,000$	$2,0000$	$3,0000$	$0,0000$

Dari Tabel 3, dapat disimpulkan, proses iterasi dihentikan setelah iterasi sebanyak 4 kali, karena $\left\| x_i^{(4)} - x_i^{(3)} \right\| < 0,0002$,$\forall i = 1, 2, 3, 4$.
Untuk $m = 3$

$$x^{(k+1)} = (D_3 - E_3)^{-1}F_3x^{(k)} + (D_3 - E_3)^{-1}b$$

dengan

$$D_3 = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 10 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 10 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & 10 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(D_3 - E_3)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,11 & 0,02 & 0,02 & 0,01 \\ 0,02 & 0,11 & 0,02 & 0,01 \\ 0,02 & 0,02 & 0,11 & 0,02 \\ 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,11 \end{bmatrix},$$

$$(D_3 - E_3)^{-1}F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (D_3 - E_3)^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= (D_3 - E_3)^{-1}F_3x^{(k)} + (D_3 - E_3)^{-1}b \\ x^{(k+1)} &= 0 + (D_3 - E_3)^{-1}b \\ x^{(k+1)} &= (D_3 - E_3)^{-1}b \\ x^{(k+1)} &= A^{-1}b \end{aligned}$$

karena $F_3 = 0$ sehingga nilai $(D_3 - E_3)^{-1}F_3x^{(k)} = 0$ solusi dihasilkan tanpa proses iterasi.

4. KESIMPULAN

Diketauhi sebuah sistem persamaan linear $Ax = b$ yang bersifat (SDD) maka barisan vektor yang dibangkitkan oleh iterasi metode Gauss-Seidel konvergen ke vektor x untuk sebarang tebakan awal dengan syarat spektral radius matriks iterasi metode Gauss-Seidel lebih kecil dari satu dan barisan vektor yang dibangkitkan oleh iterasi generalisasi metode Gauss-Seidel jugag konvergen ke vektor x untuk sebarang tebakan awal dengan syarat spektral radius generalisasi metode Gauss-Seidel lebih kecil dari satu.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Salkuyeh, D.K. 2007. Generalized Jacobi and Gauss-Seidel Methods for Solving Linear Sistem of Equations. *Numerical Mathematics, A Journal of Chinese Universities*, **16**: 164-170.

[2] Golub, G.H. 1989. *Matrix Computation*. The Hopkins University Press, London.

[3] Horn, R.A. & C.R. Johnson. 1985. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press. Cambridge.

[4] Ambrosio, A. 2005. *Properties of Diagonally Dominant Matrix*. http://planetmath.org/encyclopedia/PropertiesOfDiagonallyDominantMatrix.html. diakses 09 mei 2014.

[5] Bagnara, R. & C.R. Johnson. 1985. A Unified Proof for the Convergence of Jacobi and Gauss-seidel Methods. *Society for Industrial and Appplied Mathematics*. Vol. 37(1): 93-97.