

TEKNIK ITERASI VARIASIONAL UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NONLINEAR

Koko Saputra^{1*}, Supriadi Putra², Zulkarnain²

¹ Mahasiswa Program Studi S1 Matematika

² Laboratorium Matematika Terapan, Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*kokosaputra2531@gmail.com

ABSTRACT

This article discusses the variational iteration technique to solve nonlinear equations. This iterative technique is obtained by estimating the second derivative that appears in the variational iteration method. Then by choosing certain functions in the form of exponents, three iterative methods of order three are found. Because the three methods require two evaluations of the function and one evaluation of the derivative function, then the efficiency index of the three methods that have been suggested is 1.442, greater than the efficiency index of Newton's method that is 1,414.

Keywords: *variational iteration, iterative method, order of convergence, Newton method, Taylor expansion.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas teknik iterasi variasional, untuk menyelesaikan persamaan nonlinear. Teknik iterasi ini diperoleh dengan menaksir turunan kedua yang muncul di metode iterasi variasional dan memilih beberapa fungsi tertentu yang berbentuk eksponen, sehingga ditemukan tiga metode iterasi yang memiliki orde konvergensi kubik. Karena setiap metode yang ditemukan ini memerlukan dua kali evaluasi fungsi dan satu kali evaluasi turunan fungsi, maka indek efisiensi ketiga metode yang dikemukakan ini adalah 1.442, lebih besar dari pada indek efisiensi metode Newton, yaitu 1.414.

Kata kunci: *iterasi variasional, metode iterasi, orde konvergensi, metode Newton, ekspansi Taylor.*

1. PENDAHULUAN

Perkembangan dunia yang semakin maju membuat persoalan semakin kompleks, tidak terkecuali persoalan yang melibatkan persoalan matematika. Salah satu persoalan yang sering muncul adalah bagaimana menyelesaikan persamaan nonlinear

$$f(x) = 0. \quad (1)$$

Dalam matematika, terdapat banyak teknik ataupun metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan (1), salah satunya dengan menggunakan metode Newton, dengan bentuk iterasi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

dengan $f(x_n) \neq 0$, metode ini merupakan metode iterasi dengan tebakan awal x_0 . Metode Newton memiliki orde konvergensi kuadratik apabila tebakan awal cukup dekat ke akar (α) [1, h. 55].

Dalam perkembangannya, metode Newton banyak mengalami modifikasi yang bertujuan untuk mempercepat iterasi dan meningkatkan orde konvergensi. Salah satu modifikasi dari metode Newton adalah modifikasi yang telah dikembangkan oleh He [2], yang merupakan modifikasi dari metode Newton dengan persamaan koreksi. Metode yang dihasilkan disebut metode iterasi He, dalam proses iterasinya metode ini menggunakan nilai turunan kedua dari fungsi f . Selanjutnya, Noor [3] memodifikasi metode iterasi yang telah dikembangkan oleh He dengan melakukan pendekatan menggunakan ekspansi Taylor yang bertujuan untuk menghindari bentuk turunan kedua yang terdapat pada metode iterasi He. Metode yang dihasilkan disebut metode iterasi Noor yang memuat fungsi sembarang $g(x)$. Kemudian dengan melihat beberapa kasus dari fungsi sembarang $g(x)$ yang terdapat pada metode iterasi Noor, diperoleh metode iterasi baru dengan orde konvergensi kubik.

Pada artikel ini, di bagian dua dibahas proses terbentuknya metode iterasi baru yang merupakan review dari artikel [3] yang berjudul "*Variational Iteration Technique for Solving Nonlinear equations*". Pada bagian tiga dilakukan analisa kekonvergenan dari metode yang diusulkan, kemudian dilanjutkan dengan melakukan uji komputasi menggunakan program Maple 13.

2. TEKNIK ITERASI VARIASIONAL

Pada bagian ini diberikan beberapa definisi dasar untuk pembahasan selanjutnya, kemudian dilanjutkan dengan proses terbentuknya beberapa metode iterasi baru.

Definisi 1 (Orde Konvergensi) [5]. Misalkan barisan bilangan real $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergen ke α dan nyatakan $e_n = x_n - \alpha$ untuk $n \geq 0$. Jika terdapat konstanta positif $p > 0$, maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^p} = C \neq 0,$$

maka barisan tersebut dikatakan konvergen ke α dengan orde kekonvergenan p . Konstanta C disebut konstanta kesalahan asimtotik (*asymptotic error constant*). Jika $p = 2$ dan 3 , maka orde kekonvergenan dengan barisan bilangan real berturut-turut dikenal dengan istilah *kuadratik* dan *kubik*.

Definisi 2 (Persamaan Error) [5]. Apabila notasi $e_n = x_n - \alpha$ merupakan notasi untuk *error* pada iterasi ke- n , maka

$$e_{n+1} = Ce_n^p + O(e_n^{p+1}). \quad (3)$$

Persamaan (3) disebut sebagai persamaan *error*, dengan p merupakan orde konvergensi dari metode iterasi.

Definisi 3 [6, h. 12]. Misalkan p adalah orde suatu metode iterasi dan m adalah banyaknya fungsi yang dievaluasi pada setiap iterasinya, maka indek efisiensi dari metode iterasi itu adalah $p^{\frac{1}{m}}$.

2.1 Metode Iterasi He

Diberikan persamaan koreksi dengan bentuk

$$x_{n+1} = x_n + \lambda f(x_n), \quad (4)$$

dengan λ merupakan pengali Lagrange. Untuk memperoleh nilai optimal dari persamaan (4) digunakan

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n} = 0, \quad (5)$$

sehingga diperoleh

$$\lambda = -\frac{1}{f'(x_n)}.$$

Kemudian, dengan mensubstitusikan nilai λ ke persamaan (4), sehingga diperoleh metode Newton. Untuk meningkatkan orde konvergensi, He [2] menambahkan fungsi sembarang $g(x_n)$ ke dalam persamaan (4), perhatikan persamaan berikut

$$x_{n+1} = \phi(x_n) + \lambda(f(x_n)g(x_n))^r, \quad (6)$$

dengan $\phi(x_n)$ adalah fungsi iterasi metode Newton dan r adalah orde dari $\phi(x_n)$. Selanjutnya dari persamaan (6) dapat dicari nilai λ , yaitu

$$\lambda = -\frac{\phi'(x_n)}{r[f(x_n)g(x_n)]^{r-1}(f'(x_n)g(x_n) + f(x_n)g'(x_n))},$$

kemudian, dengan mensubstitusikan nilai λ ke persamaan (6), maka diperoleh

$$x_{n+1} = \phi(x_n) - \frac{\phi'(x_n)(f(x_n)g(x_n))}{r[f'(x_n)g(x_n) + f(x_n)g'(x_n)]}. \quad (7)$$

Kemudian, dengan menurunkan $\phi(x_n)$ terhadap x_n diperoleh

$$\phi'(x_n) = \frac{f''(x_n)f(x_n)}{[f'(x_n)]^2}, \quad (8)$$

selanjutnya, dengan mensubstitusikan persamaan (2) dan (8) ke persamaan (7), setelah disederhanakan diperoleh

$$\left. \begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{[f(x_n)]^2 g(x_n) f''(x_n)}{r [f'(x_n)]^2 [f'(x_n)g(x_n) + f(x_n)g'(x_n)]} \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Persamaan (9) merupakan metode Iterasi He, metode ini menggunakan turunan kedua dalam proses perhitungannya, oleh karena itu Noor mengembangkan metode iterasi bebas dari bentuk turunan kedua.

2.2 Metode Iterasi Noor

Untuk menghindari bentuk turunan kedua yang terdapat pada metode iterasi He yang terdapat pada persamaan (9), dilakukan pendekatan dengan menggunakan ekspansi Taylor untuk $f(y_n)$ disekitar $y_n = x_n$ sampai pangkat dua dan dengan mengabaikan pangkat yang lebih tinggi, dan setelah disederhanakan diperoleh

$$f(y_n) = \frac{1}{2} \frac{[f(x_n)]^2 f''(x_n)}{[f'(x_n)]^2}. \quad (10)$$

Perhatikan kembali persamaan (9), dengan menggunakan bentuk persamaan (10) dan $r = 2$, maka persamaan (9) dapat dituliskan dalam bentuk

$$\left. \begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{f(y_n)g(x_n)}{(g'(x_n)f(x_n) + g(x_n)f'(x_n))} \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Persamaan (11) dikenal dengan metode Iterasi Noor. Metode ini memiliki orde konvergensi kubik dan setiap iterasinya memerlukan tiga kali evaluasi fungsi dan dua kali evaluasi turunan fungsi, sehingga dengan menggunakan Definisi 3 maka indeks efisiensinya adalah 1.245.

2.3 Teknik Iterasi Variasional Metode Noor

Metode Iterasi Noor pada persamaan (11) adalah ide pokok untuk memperoleh metode iterasi untuk menyelesaikan persamaan nonlinear dengan menggunakan beberapa kasus dari fungsi sembarang $g(x_n)$ diantaranya,

1. $g(x_n) = \pm e^{-\beta x_n}$

$$2. g(x_n) = \pm e^{\left(\frac{\beta}{f'(x_n)}\right)}$$

$$3. g(x_n) = \pm e^{\left(\frac{\beta f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}$$

Berikut ini akan ditunjukkan proses terbentuknya metode iterasi baru, dengan menggunakan kasus ke-1, yaitu

$$g(x_n) = \pm e^{-\beta x_n}. \quad (12)$$

Persamaan (12) dapat ditulis dalam 2 bentuk, yaitu

$$g(x_n) = e^{-\beta x_n}, \quad (13)$$

dan

$$g(x_n) = -e^{-\beta x_n}. \quad (14)$$

Apabila persamaan (13) diturunkan terhadap x_n diperoleh

$$g'(x_n) = -\beta (e^{-\beta x_n}). \quad (15)$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan persamaan (13) dan (15) ke persamaan (11), setelah disederhanakan diperoleh

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n) - \beta f(x_n)}. \quad (16)$$

Kemudian, apabila persamaan (14) diturunkan terhadap x_n diperoleh

$$g'(x_n) = \beta (e^{-\beta x_n}). \quad (17)$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan persamaan (14) dan (17) ke persamaan (11), maka akan diperoleh

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n) - \beta f(x_n)}, \quad (18)$$

atau

$$\left. \begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n) - \beta f(x_n)}, \end{aligned} \right\} n = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

Persamaan (19) merupakan metode iterasi yang dikenal dengan Teknik Iterasi Variasional Tipe 1.

Apabila persamaan (15) ataupun persamaan (17) disubstitusikan ke persamaan (11) akan memberikan hasil yang sama seperti yang terdapat pada persamaan (16) dan (18). Selanjutnya untuk kasus ke-2 dan ke-3 digunakan persamaan dalam

bentuk positif, karena akan menghasilkan bentuk yang sama seperti yang terdapat pada kasus ke-1.

Selanjutnya, dengan menggunakan kasus ke-2, yaitu

$$g(x_n) = e^{\frac{\beta}{f'(x_n)}}. \quad (20)$$

Apabila persamaan (20) diturunkan terhadap x_n diperoleh

$$g'(x_n) = -\frac{\beta f''(x_n)}{[f'(x_n)]^2} e^{\left(\frac{\beta}{f'(x_n)}\right)}. \quad (21)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (20) dan (21) ke persamaan (11), setelah disederhanakan diperoleh

$$\left. \begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{f(y_n)f(x_n)}{f'(x_n)f(x_n) - 2\beta f(y_n)}, \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Persamaan (22) merupakan metode iterasi yang dikenal dengan Teknik Iterasi Variasional Tipe 2.

Kemudian, dengan menggunakan kasus ke-3 yaitu

$$g(x_n) = e^{\left(\frac{\beta f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}. \quad (23)$$

Apabila persamaan (23) diturunkan terhadap x_n diperoleh

$$g'(x_n) = \frac{\beta([f'(x_n)]^2 - f''(x_n)\beta f(x_n))}{[f'(x_n)]^2} e^{\left(\frac{\beta f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}, \quad (24)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (23) dan (24) ke persamaan (11), setelah disederhanakan diperoleh

$$\left. \begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n) + \beta[f(x_n) - 2f(y_n)]}, \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Persamaan (25) merupakan metode iterasi yang dikenal dengan Teknik Iterasi Variasional Tipe 3.

Selanjutnya, akan dilakukan analisa kekonvergenan Teknik Iterasi Variasional Tipe 1, Teknik Iterasi Variasional Tipe 2 dan Teknik Iterasi Variasional Tipe 3.

3. ANALISA KEKONVERGENAN

Teorema 4 Asumsikan bahwa fungsi $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ untuk interval buka D yang memiliki akar sederhana $\alpha \in D$. Misalkan f adalah fungsi mulus yang berada dilingkungan akar, maka Teknik Iterasi Variasional Tipe 1 yang diberikan oleh persamaan (19) memiliki orde konvergensi kubik.

Bukti: Misalkan α adalah akar dari persamaan nonlinear $f(x) = 0$, maka $f'(\alpha) \neq 0$ dan $e_n = x_n - \alpha$. Dengan menggunakan ekspansi Taylor untuk $f(x_n)$ disekitar $x_n = \alpha$, diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(\alpha) + f'(\alpha)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(\alpha - x_n)^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}(\alpha - x_n)^3 + O(e_n^4) \\ &= f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!}f'''(\alpha)e_n^3 + O(e_n^4). \end{aligned} \quad (26)$$

Karena $f(\alpha) = 0$, maka setelah disederhanakan persamaan (26) menjadi

$$f(x_n) = f'(\alpha) \left(e_n + \frac{1}{2!} \frac{f''(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha)} + \frac{1}{3!} \frac{f'''(\alpha)e_n^3}{f'(\alpha)} + O(e_n^4) \right). \quad (27)$$

Misalkan

$$C_j = \left(\frac{1}{j!} \right) \frac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}, j = 2, 3, \dots, \quad (28)$$

maka persamaan (27) dapat ditulis dalam bentuk

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)). \quad (29)$$

Kemudian dengan menggunakan ekspansi Taylor terhadap $f'(x_n)$ disekitar $x_n = \alpha$, maka setelah disederhanakan diperoleh

$$f'(x_n) = f'(\alpha) (1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)). \quad (30)$$

Apabila persamaan (29) dibagi dengan persamaan (30), setelah disederhanakan diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)}{1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)}. \quad (31)$$

Selanjutnya dengan menggunakan identitas geometri

$$\frac{1}{1+s} = 1 - s + s^2 - s^3 + O(s^4), \quad (32)$$

dengan $s = 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)$, maka setelah disederhanakan persamaan (31) dapat ditulis menjadi

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - C_2e_n^2 + (2C_2^2 - 2C_3)e_n^3 + O(e_n^4). \quad (33)$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan persamaan (33) ke persamaan (19), setelah disederhanakan diperoleh

$$y_n = \alpha + C_2 e_n^2 + 2(C_3 - C_2^2) e_n^3 + O(e_n^4). \quad (34)$$

Kemudian dengan melakukan ekspansi Taylor untuk $f(y_n)$ disekitar $y_n = \alpha$ diperoleh

$$f(y_n) = f'(\alpha)(C_2 e_n^2 - (2C_2^2 - 2C_3) e_n^3) + O(e_n^4). \quad (35)$$

Perhatikan kembali persamaan (19), dengan menggunakan persamaan (29), (30) dan (35) diperoleh

$$\frac{f(y_n)}{f'(x_n) - \beta f(x_n)} = C_2 e_n^2 + (\beta C_2 - 4C_2^2 + 2C_3) e_n^3 + O(e_n^4), \quad (36)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (34) dan (36) ke persamaan (19) diperoleh

$$x_{n+1} = \alpha + (2C_2^2 - \beta C_2) e_n^3 + O(e_n^4),$$

karena $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$, maka persamaan (36) menjadi

$$e_{n+1} = (2C_2^2 - \beta C_2) e_n^3 + O(e_n^4). \quad (37)$$

Persamaan (37) merupakan persamaan *error* untuk Teknik Iterasi Variasional Tipe 1. Berdasarkan Definisi 2 maka metode ini memiliki orde konvergensi kubik. ■

Teorema 5 Dengan menggunakan asumsikan seperti pada Teorema 4, maka Teknik Iterasi Variasional Tipe 2 seperti yang diberikan oleh persamaan (22) memiliki orde konvergensi kubik.

Bukti: Perhatikan kembali persamaan (22). Dengan menggunakan persamaan (29), (30) dan (35) diperoleh

$$\frac{f(y_n)f(x_n)}{f'(x_n)f(x_n) - 2\beta f(y_n)} = C_2 e_n^2 + \left(\frac{2\beta C_2^2}{f'(\alpha)} - 3C_2^2 \right) e_n^3 + O(e_n^4), \quad (38)$$

kemudian, dengan mensubstitusikan persamaan (34) dan (38) ke persamaan (22), setelah disederhanakan diperoleh

$$x_{n+1} = \alpha + \left(2C_3 + C_2^2 - \frac{2\beta C_2^2}{f'(\alpha)} \right) e_n^3 + O(e_n^4),$$

karena $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$, maka

$$e_{n+1} = \left(2C_3 + C_2^2 - \frac{2\beta C_2^2}{f'(\alpha)} \right) e_n^3 + O(e_n^4). \quad (39)$$

Berdasarkan Definisi 2, maka Teknik Iterasi variasional Tipe 2 yang diberikan oleh persamaan (22) memiliki orde konvergensi kubik. ■

Teorema 6 Dengan menggunakan asumsi seperti pada Teorema 4, maka Teknik Iterasi Variasional Tipe 3 seperti yang diberikan oleh persamaan (25) memiliki orde konvergensi kubik.

Bukti: Perhatikan kembali persamaan (25). Dengan menggunakan persamaan (29), (30) dan (35) diperoleh

$$\frac{f(y_n)}{f'(x_n) + \beta(f(x_n) - 2f(y_n))} = C_2 e_n^2 + (2C_3 - 4C_2^2 - \beta C_2) e_n^3 + O(e_n^4). \quad (40)$$

kemudian, dengan mensubstitusikan persamaan (34) dan (40) ke persamaan (25), setelah disederhanakan diperoleh

$$x_{n+1} = \alpha + (2C_2^2 + \beta C_2) e_n^3 + O(e_n^4),$$

karena $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$, maka

$$e_{n+1} = (2C_2^2 + \beta C_2) e_n^3 + O(e_n^4). \quad (41)$$

Berdasarkan Definisi 2, maka metode iterasi pada persamaan (25) memiliki orde konvergensi kubik. ■

4. UJI KOMPUTASI

Berikut ini akan dilakukan uji komputasi untuk membandingkan kecepatan dalam menemukan akar antara metode Newton (MN), Teknik Iterasi Variasional Tipe 1 (TIV1), Teknik Iterasi Variasional Tipe 2 (TIV2) dan Teknik Iterasi Variasional Tipe 3 (TIV3). Adapun fungsi-fungsi yang digunakan adalah

1. $f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10$
2. $f_2(x) = \sin^2(x) + x^2 - 1$
3. $f_3(x) = x^2 - e^x - 3x + 2$
4. $f_4(x) = \cos(x) - x$
5. $f_5(x) = x e^{x^2} - \sin^2 x + 3 \cos(x) + 5$
6. $f_6(x) = e^{x^2+7x-30} - 1$

Dalam menentukan solusi numerik dari contoh-contoh fungsi nonlinear di atas, digunakan program Maple 13 dengan memakai 128 digit dan toleransi $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-32}$, dengan tebakan awal yang sama untuk masing-masing fungsi yang telah diberikan. Dalam menentukan solusi numerik juga ditentukan kriteria pemberhentian jalannya program komputasi yang sama untuk semua metode, yaitu :

1. Jika selisih nilai mutlak antara dua iterasi yang berdekatan bernilai lebih kecil dari toleransi yang diberikan.
2. Jika nilai mutlak fungsi lebih kecil dari toleransi yang diberikan.
3. Jika jumlah iterasi mencapai maksimum iterasi yang ditetapkan.

Hasil komputasi dapat dilihat pada tabel berikut ini.

Tabel 1: Perbandingan Komputasi untuk MN, TIV1, TIV2 dan TIV3

β	f_i	x_0	x_n	MN	TIV1	TIV2	TIV3
1.0	f_1	0.7	1.3652300134140968	7	4	6	6
	f_2	2.3	0.7390851332151606	5	5	4	5
	f_3	0.0	0.2575302854398608	5	4	3	4
	f_4	1.7	0.7390851332151606	6	5	4	4
	f_5	-1.0	-1.2076478271309189	7	5	5	4
	f_6	3.5	3.0000000000000000	13	9	9	9
0.5	f_1	0.7	1.3652300134140968	7	5	7	6
	f_2	2.3	0.7390851332151606	5	5	4	5
	f_3	0.0	0.2575302854398608	5	4	3	3
	f_4	1.7	0.7390851332151606	6	4	4	4
	f_5	-1.0	-1.2076478271309189	7	5	5	5
	f_6	3.5	3.0000000000000000	13	9	9	9

Tabel 1, β merupakan parameter dengan dua nilai yang berbeda, sedangkan x_n merupakan akar hampiran dari fungsi. Secara umum ke empat metode yang dibahas berhasil menemukan akar yang diharapkan, akan tetapi metode baru yang diusulkan diantaranya Teknik Iterasi Variasional Tipe 1, Teknik Iterasi Variasional Tipe 2 dan Teknik Iterasi Variasional Tipe 3 lebih cepat menemukan akar yang diharapkan dibandingkan dengan metode Newton. Hal ini ditunjukkan dari jumlah iterasi metode baru lebih sedikit dibandingkan metode Newton.

Dari Tabel 1 terlihat bahwa, parameter berpengaruh terhadap jumlah iterasi yang dihasilkan, baik itu untuk Teknik Iterasi Variasional Tipe 1, Teknik Iterasi Variasional Tipe 2 maupun untuk Teknik Iterasi Variasional Tipe 3. Hal ini dapat dilihat pada f_1 untuk $\beta = 1.0$ maupun untuk $\beta = 0.5$. Akan tetapi, pengaruh parameter akan sangat kecil sekali, bahkan mungkin tidak ada apabila tebakan awal diambil cukup dekat ke akar, contohnya dapat dilihat pada fungsi f_6 . Kemudian, dari analisa kekonvergenan yang telah dilakukan pada bagian sebelumnya dapat dilihat bahwa, ketiga metode yang diusulkan memiliki orde konvergensi kubik. Ketiga metode ini memerlukan dua kali evaluasi fungsi dan satu kali evaluasi turunan fungsi pada setiap iterasinya, sehingga indeks efisiensi dari ketiga metode yang diusulkan adalah 1.442. Sedangkan metode Newton memiliki orde konvergensi kuadrat dengan satu kali evaluasi fungsi dan satu kali evaluasi turunan fungsi pada setiap iterasinya, sehingga indeks efisiensi dari metode Newton adalah 1.414.

Secara umum keempat metode yang dibahas berhasil menemukan akar yang diharapkan, akan tetapi metode baru yang diusulkan lebih unggul dari pada metode Newton, baik itu dilihat dari jumlah iterasi, indeks efisiensi maupun jika dilihat dari orde konvergensi metode itu sendiri.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Faires, J.D. & R.L. Burden. 2002. *Numerical Methods, Third Edition*. Brooks Cole, New York.
- [2] He, J.H. 2007. Variational Iteration Method-Some Recent Results and New Interpretations. *Applied Mathematics Computation*, **207**: 3-17.
- [3] Noor, M.A. 2007. Variational Iteration Technique for Solving Nonlinear Equations. *Applied Mathematics Computation*, **321**: 247-131.
- [4] Ostrowski, A.M. 1966. *Solution of Equations and Systems of Equations, Third Edition*. Academic Press, New York.
- [5] Sharma, J.R., R.K. Guha & R. Sharma. 2011. Some Modified Newton's Methods with fourth-order Convergence. *Applied Science Research*, **1**:240-247.
- [6] Traub, J.F. 1964. *Iterative Methods for the Solution of Equations*, Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs. New Jersey.