FORMULASI UMUM METODE ITERASI DENGAN ORDE KONVERGENSI ENAM

D. K. Putri[1*], M. Imran[2], Zulkarnain[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Laboratorium Matematika Terapan, Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

[*]dewikhai@ymail.com

ABSTRACT

This article discusses the General Formulation of Iterative Method, which requires three function evaluations and one derivative function evaluation. Analytically it is showed, using the Taylor expansion and geometric series, that the General Formulation of Iterative Method has a convergence of order six. Furthermore, by choosing the values of certain parameters in the General Formulation of Iterative Method, several well-known iterative methods, which have three function evaluations and one derivative function evaluation, are obtained. Comparison between the proposed method and well-known methods are done by looking at the number of iterations and number of function evaluation. In addition, comparisons are also made through Basins of Attraction of the methods discussed.

Keywords: *iterative methods, sixth order, unification iterative methods, infinite series, nonlinear equation.*

ABSTRAK

Pada artikel ini dibahas Formulasi Umum Metode Iterasi yang setiap iterasinya memerlukan perhitungan tiga fungsi dan satu turunan fungsi. Secara analitik dengan menggunakan ekspansi Taylor dan deret geometri ditunjukkan bahwa Formulasi Umum Metode Iterasi ini memiliki orde konvergensi enam. Selanjutnya, dengan memilih nilai parameter tertentu yang ada di Formulasi Umum Metode Iterasi diperoleh beberapa metode iterasi yang sudah dikenal yang mempunyai perhitungan tiga fungsi dan satu turunan fungsi. Dalam melakukan perbandingan metode yang diperkenalkan dengan metode yang sudah dikenal dilakukan dengan melihat jumlah iterasi dan jumlah perhitungan fungsi dari metode yang dibandingkan. Perbandingan juga dilakukan melalui *Basins of Attraction* dari metode yang dibahas.

Kata kunci: *metode iterasi, orde konvergensi enam, formulasi umum metode iterasi, deret tak hingga, persamaan nonlinear.*

1. PENDAHULUAN

Dalam bidang matematika riset tentang mendapatkan solusi dari persamaan non-linear $f(x) = 0$, berkembang pesat dengan cara memodifikasi metode yang sudah tersedia seperti metode Ostrowski yang memiliki orde konvergensi empat [8, h.253]. Grau dan Diaz-Barrero [5] memodifikasi metode ini, dengan menambah evaluasi perhitungan fungsi pada titik lain, sehingga orde kekonvergenannya meningkat menjadi enam yang bentuk iterasinya diberikan oleh

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{(1)}(x_n)}, \tag{1}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f^{(1)}(x_n)} \frac{f(x_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)}, \tag{2}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f^{(1)}(x_n)} \frac{f(x_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)}. \tag{3}$$

Banyak metode iterasi yang berorde enam yang telah dikemukakan, diantaranya yang dikemukakan oleh Sharma dan Guha [9] yang menyajikan metode iterasi tiga langkah dengan bentuk iterasi

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{(1)}(x_n)}, \tag{4}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f^{(1)}(x_n)} \frac{f(x_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)}, \tag{5}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f^{(1)}(x_n)} \frac{f(x_n) + af(y_n)}{f(x_n) + (a-2)f(y_n)}, \tag{6}$$

dimana $a \in \mathbb{R}$. Kemudian Neta [7] menyajikan metode iterasi dengan menggunakan metode Newton pada langkah pertama dan metode Newton-Like pada langkah kedua dan ketiga, yang menghasilkan bentuk iterasi

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{(1)}(x_n)}, \tag{7}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f^{(1)}(x_n)} \frac{f(x_n) + Af(y_n)}{f(x_n) + (A-2)f(y_n)}, \tag{8}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f^{(1)}(x_n)} \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f(x_n) - 3f(y_n)}. \tag{9}$$

Chun dan Ham [4] menyajikan metode iterasi tiga langkah untuk menyelesaikan persamaan nonlinear, yang bentuk iterasi metode diberikan oleh

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{(1)}(x_n)}, \tag{10}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f^{(1)}(x_n)} \frac{f(x_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)}, \tag{11}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f^{(1)}(x_n)} H(u_n), \tag{12}$$

dimana $u_n = f(y_n)/f(x_n)$ dan H adalah sebarang fungsi yang memenuhi $H(0) = 1$, $H^{(1)}(0) = 2$ dan $H^{(2)}(0) < \infty$. Selanjutnya Chun dan Neta [3] melakukan modifikasi pada metode Kung dan Traub dengan menambah evaluasi perhitungan fungsi pada titik lain sehingga orde konvergensi meningkat, dengan bentuk iterasi

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{(1)}(x_n)}, \tag{13}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f^{(1)}(x_n)} \frac{1}{\left[1 - \frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right]^2}, \tag{14}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f^{(1)}(x_n)} \frac{1}{\left[1 - \frac{f(y_n)}{f(x_n)} - \frac{f(z_n)}{f(x_n)}\right]^2}. \tag{15}$$

Metode Sharma dan Guha, metode Neta, metode Grau dan Diaz-Barrero, metode Chun dan Ham dan metode Chun dan Neta yang masing-masing metode memerlukan tiga perhitungan fungsi dan satu turunan fungsi sehingga dapat dinyatakan dalam satu Formulasi Umum. Formulasi Umum dari ke lima metode iterasi inilah yang menjadi bahasan artikel ini, yang merupakan kajian detail dari artikel Sanjay K Khattri dan Ioannis K Argyros [6].

2. FORMULASI UMUM METODE ITERASI DENGAN ORDE KONVERGENSI ENAM

Formulasi Umum dari metode Sharma dan Guha, metode Neta, metode Grau dan Diaz-Barrero, metode Chun dan Ham, dan metode Chun dan Neta, yang telah dikemukakan pada bagian sebelumnya dapat dinyatakan sebagai berikut

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{(1)}(x_n)}, \tag{16}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f^{(1)}(x_n)} \left(1 + \sum_{j=1}^{m} a_j \left(\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right)^j\right), \tag{17}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f^{(1)}(x_n)} \left(1 + \sum_{k=1}^{l} b_k \left(\frac{\mu_1 f(y_n) + \mu_2 f(z_n)}{f(x_n)}\right)^k\right), \tag{18}$$

dimana $a_j, b_k, \mu_1, \mu_2, m$ dan l adalah parameter independen. Parameter a_j, b_k, μ_1, μ_2 adalah bilangan real dan parameter m dan l adalah bilangan bulat positif. Nilai parameter ini ditetapkan oleh Teorema Orde Konvergensi 1. Melalui Formulasi Umum ini, dengan memilih nilai tertentu dari parameter yang ada akan diperoleh metode Sharma dan Guha, metode Neta, metode Grau dan Diaz-Barrero, metode Chun dan Ham, dan metode Chun dan Neta.

Teorema 1 (Orde Konvergensi)
Misalkan $\alpha \in I$ akar sederhana dari fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ yang terdiferensial secukupnya

pada interval buka I. Jika x_0 cukup dekat dengan α, maka persamaan (16)-(18) memiliki orde konvergensi enam jika dan hanya jika $a_1 = 2$ dan $b_1 = \frac{2}{\mu_1}$ dengan persamaan *error*

$$e_{n+1} = \frac{c_2(c_3c_1 - 5c_2^2 + a_2c_2^2)(-6c_2^2 + c_2^2b_2\mu_1^2 + c_3c_1)}{c_1^5}e_n^6 + O(e_n^7),$$

dimana $e_n = x_n - \alpha$ dan $c_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}$ dengan $k \geq 1$.

Bukti: Misalkan α adalah akar sederhana dari persamaan $f(x) = 0$, maka $f(\alpha) = 0$ dan $f'(\alpha) \neq 0$. Misalkan juga $e_n = x_n - \alpha$, kemudian dengan menggunakan ekspansi Taylor [1, h. 189] untuk $f(x_n)$ dan $f'(x_n)$ disekitar $x_n = \alpha$ sampai orde enam dan mengabaikan orde yang lebih tinggi diperoleh

$$f(x_n) = c_1e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + c_5e_n^5 + c_6e_n^6 + O(e_n^7), \tag{19}$$

dan

$$f^{(1)}(x_n) = c_1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + 5c_5e_n^4 + 6c_6e_n^5 + 7c_7e_n^6 + O(e_n^7), \tag{20}$$

dengan $c_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}, k \geq 1$.

Jika persamaan (19) dibagi dengan persamaan (20), dan dengan menggunakan Deret Geometri [10, h. 500] maka setelah dilakukan penyederhanaan diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{f(x_n)}{f^{(1)}(x_n)} = {} & e_n - \frac{c_2}{c_1}e_n^2 + \left(\frac{2c_2^2}{c_1^2} - \frac{2c_1c_3}{c_1^2}\right)e_n^3 + \left(\frac{7c_1c_2c_3}{c_1^3} - \frac{3c_1^2c_4}{c_1^3} - \frac{4c_2^3}{c_1^3}\right)e_n^4 \\ & + \left(\frac{6c_1^2c_3^2}{c_1^4} + \cdots + \frac{8c_2^4}{c_1^4}\right)e_n^5 + \left(\frac{13c_1^3c_2c_5}{c_1^5} + \cdots - \frac{16c_2^5}{c_1^5}\right)e_n^6 \\ & + O(e_n^7),\end{aligned} \tag{21}$$

dengan mensubsitusi persamaan (21) ke persamaan (16) didapat

$$\begin{aligned}y_n = {} & \alpha + \frac{c_2}{c_1}e_n^2 + \left(-\frac{2c_2^2}{c_1^2} + \frac{2c_1c_3}{c_1^2}\right)e_n^3 + \left(-\frac{7c_1c_2c_3}{c_1^3} + \frac{3c_1^2c_4}{c_1^3} + \frac{4c_2^3}{c_1^3}\right)e_n^4 \\ & + \left(\frac{4c_1^3c_5}{c_1^4} + \cdots + \frac{20c_1c_2^2c_3}{c_1^4}\right)e_n^5 + \left(\frac{5c_1^4c_6}{c_1^5} + \cdots + \frac{16c_2^5}{c_1^5}\right)e_n^6 + O(e_n^7).\end{aligned} \tag{22}$$

Kemudian dengan menggunakan persamaan (22) dilakukan ekspansi Taylor dari $f(y_n)$ disekitar $y_n = \alpha$ sebagaimana prosedur untuk menemukan $f(x_n)$ diperoleh

$$\begin{aligned}f(y_n) = {} & c_2e_n^2 + \left(-\frac{2c_2^2}{c_1} + \frac{2c_1c_3}{c_1}\right)e_n^3 + \left(-\frac{7c_1c_2c_3}{c_1^2} + \frac{3c_1^2c_4}{c_1^2} + \frac{5c_2^3}{c_1^2}\right)e_n^4 + \left(\frac{4c_1^3c_5}{c_1^3}\right. \\ & \left. + \cdots + \frac{24c_1c_2^2c_3}{c_1^3}\right)e_n^5 + \left(\frac{34c_1^2c_2^2c_4}{c_1^4} + \cdots + \frac{5c_1^4c_6}{c_1^4}\right)e_n^6 + O(e_n^7).\end{aligned} \tag{23}$$

Selanjutnya dihitung $\left(1+\sum_{j=1}^{m} a_j \left(\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right)^j\right)$ dengan menggunakan persamaan (19) dan persamaan (23) dan hanya mengambil sampai suku e_n^6, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&\frac{f(y_n)}{f^{(1)}(x_n)}\left(1+\sum_{j=1}^{m} a_j\left(\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right)^j\right)\\
&\quad=\left(\frac{c_2}{c_1}\right)e_n^2+\left(\frac{2c_1c_3}{c_1^2}-\frac{4c_2^2}{c_1^2}+\frac{a_1c_2^2}{c_1^2}\right)e_n^3+\left(\frac{3c_1^2c_4}{c_1^3}+\cdots+\frac{a_2c_2^3}{c_1^3}\right)e_n^4\\
&\qquad+\left(\frac{4c_1^3c_5}{c_1^4}+\cdots+\frac{a_3c_2^4}{c_1^4}\right)e_n^5+\left(\frac{5c_1^4c_6}{c_1^5}+\cdots+\frac{104c_2^5}{c_1^5}\right)e_n^6\\
&\qquad+O(e_n^7).
\end{aligned}\tag{24}$$

Bila persamaan (22) dan (24) disubstitusi ke persamaan (17), kemudian disederhanakan diperoleh

$$\begin{aligned}
z_n=\alpha&+\left(\frac{2c_2^2}{c_1^2}-\frac{a_1c_2^2}{c_1^2}\right)e_n^3+\left(\frac{7c_1c_2c_3}{c_1^3}+\cdots+\frac{7a_1c_2^3}{c_1^3}\right)e_n^4+\left(\frac{10c_1^2c_2c_4}{c_1^4}+\cdots\right.\\
&\left.+\frac{30c_2^4}{c_1^4}\right)e_n^5+\left(\frac{188c_1c_2^3c_3}{c_1^5}+\cdots+\frac{74a_2c_1c_2^3c_3}{c_1^5}\right)e_n^6+O(e_n^7).
\end{aligned}\tag{25}$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (25) dilakukan dilakukan ekspansi Taylor dari $f(z_n)$ disekitar $z_n=\alpha$, didapat

$$\begin{aligned}
f(z_n)=&\left(\frac{2c_2^2}{c_1}-\frac{a_1c_2^2}{c_1}\right)e_n^3+\left(\frac{7c_1c_2c_3}{c_1^2}+\cdots+\frac{7a_1c_2^3}{c_1^2}\right)e_n^4+\left(\frac{10c_1^2c_2c_4}{c_1^3}+\cdots\right.\\
&\left.+\frac{38a_1c_1c_2^2c_3}{c_1^3}\right)e_n^5+\left(\frac{a_1^2c_2^5}{c_1^4}+\cdots+\frac{13a_3c_2^5}{c_1^4}\right)e_n^6+O(e_n^7).
\end{aligned}\tag{26}$$

Kemudian dihitung $\left(1+\sum_{k=1}^{l} b_k\left(\mu_1\frac{f(y_n)}{f(x_n)}+\mu_2\frac{f(z_n)}{f(x_n)}\right)^k\right)$ dengan menggunakan persamaan (19), (23), (26) dan hanya mengambil sampai suku e_n^6, diperoleh

$$\begin{aligned}
&\frac{f(z_n)}{f^{(1)}(x_n)}\left(1+\sum_{k=1}^{l} b_k\left(\mu_1\frac{f(y_n)}{f(x_n)}+\mu_2\frac{f(z_n)}{f(x_n)}\right)^k\right)\\
&\quad=\left(\frac{2c_2^2}{c_1^2}-\frac{a_1c_2^2}{c_1^2}\right)e_n^3+\left(\frac{2b_1\mu_1c_2^3}{c_1^3}+\cdots+\frac{9a_1c_2^3}{c_1^3}\right)e_n^4+\left(\frac{10c_1^2c_2c_4}{c_1^4}+\cdots\right.\\
&\qquad\left.+\frac{6c_1^2c_3^2}{c_1^4}\right)e_n^5+\left(\frac{a_1^2c_2^5}{c_1^5}+\cdots+\frac{15a_2b_1\mu_1c_2^5}{c_1^5}\right)e_n^6+O(e_n^7).
\end{aligned}\tag{27}$$

Bila persamaan (25) dan persamaan (27) disubstitusikan ke persamaan (18), maka setelah penyederhanaan diperoleh

$$\begin{aligned}
x_{n+1}=\alpha&+\left(\frac{4c_2^3}{c_1^3}+\cdots+\frac{a_1b_1\mu_1c_2^3}{c_1^3}\right)e_n^4+\left(\frac{20c_1c_2^2c_3}{c_1^4}+\cdots+\frac{18a_1c_2^4}{c_1^4}\right)e_n^5\\
&+\left(\frac{108c_2^5}{c_1^5}+\cdots+\frac{a_3b_1\mu_1c_2^5}{c_1^5}\right)e_n^6+O(e_n^7)
\end{aligned}\tag{28}$$

Berdasarkan Definisi orde konvergensi [11] agar Formulasi Umum Metode Iterasi memiliki orde konvergensi enam maka koefisien e_n^4 dan e_n^5 pada persamaan (28) harus sama dengan nol. Sehingga parameter yang memenuhi adalah

$$a_1 = 2 \text{ dan } b_1 = \frac{2}{\mu_1}. \tag{29}$$

Kemudian dengan mensubstitusikan parameter (29) pada persamaan (28) dan dengan mengingat $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$, sehingga diperoleh persamaan *error*

$$e_{n+1} = \frac{c_2(c_3c_1 - 5c_2^2 + a_2c_2^2)(-6c_2^2 + c_2^2b_2\mu_1^2 + c_3c_1)}{c_1^5}e_n^6 + O(e_n^7). \tag{30}$$

Maka Formulasi Umum Metode Iterasi terbukti memiliki orde konvergensi enam. □

Jadi dengan mensubstitusikan nilai a_1 dan b_1 di persamaan (29) ke persamaan (16)-(18), diperoleh Formulasi Umum Metode Iterasi dengan orde konvergensi enam sebagai berikut

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{(1)}(x_n)}, \tag{31}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f^{(1)}(x_n)}\left(1 + 2\left(\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right) + \sum_{j=2}^{m} a_j\left(\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right)^j\right), \tag{32}$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f^{(1)}(x_n)}\Bigg(1 &+ \frac{2}{\mu_1}\left(\frac{\mu_1 f(y_n) + \mu_2 f(z_n)}{f(x_n)}\right) \\ &+ \sum_{k=2}^{l} b_k\left(\frac{\mu_1 f(y_n) + \mu_2 f(z_n)}{f(x_n)}\right)^k\Bigg), \end{aligned} \tag{33}$$

dengan parameter a_j, b_k (untuk $j \geq 2$ dan $k \geq 2$) dan μ_1, μ_2 adalah parameter independen yang bernilai real dan parameter m dan l adalah bilangan bulat positif.

3. KASUS KHUSUS FORMULASI UMUM

Pada bagian ini diberikan nilai khusus untuk parameter-parameter pada Formulasi Umum Metode Iterasi pada persamaan (31)-(33), yang menghasilkan metode iterasi yang sudah dikenal dan metode iterasi baru dengan orde konvergensi enam.

1. Jika dipilih parameter

$$a_j = 2^j \quad \text{untuk} \quad j \geq 2, m = \infty, \mu_1 = 1, \tag{34}$$

$$b_k = 2(2-a)^{k-1} \quad \text{untuk} \quad k \geq 2, l = \infty, \mu_2 = 0, \tag{35}$$

dimana $a \in \mathbb{R}$, dan dengan menggunakan Deret Geometri [10, h. 500] maka diperoleh metode Sharma dan Guha [9].

2. Jika dipilih parameter

$$a_j = 2(-(A-2))^{j-1} \quad \text{untuk} \quad j \geq 2, m = \infty, \mu_1 = 1, \tag{36}$$

$$b_k = 2(-(-3))^{k-1} \quad \text{untuk} \quad k \geq 2, l = \infty, \mu_2 = 0, \tag{37}$$

dimana $A \in \mathbb{R}$, maka dengan prosedur yang sama seperti kasus khusus pertama diperoleh metode Neta [7].
3. Jika dipilih parameter

$$a_j = 2^j \quad \text{untuk} \quad j \geq 2, m = \infty, \mu_1 = 1, \tag{38}$$
$$b_k = 2^k \quad \text{untuk} \quad k \geq 2, l = \infty, \mu_2 = 0, \tag{39}$$

diperoleh metode Grau dan Diaz-Barrero [5] dengan menggunakan cara yang sama seperti kasus khusus pertama.
4. Jika dipilih parameter

$$a_j = 2^j \quad \text{untuk} \quad j \geq 2, m = \infty, \mu_1 = 1, \tag{40}$$
$$b_k = \omega_k \quad \text{untuk} \quad k \geq 2, l = \infty, \mu_2 = 0, \tag{41}$$

maka diperoleh metode Chun dan Ham [4].
5. Jika dipilih parameter

$$a_j = (j+1) \quad \text{untuk} \quad j \geq 2, m = \infty, \mu_1 = 1, \tag{42}$$
$$b_k = (k+1) \quad \text{untuk} \quad k \geq 2, l = \infty, \mu_2 = 1. \tag{43}$$

maka diperoleh metode Chun dan Neta [3].
6. Jika dipilih parameter

$$a_j = 2(2)^{j-1} \quad \text{untuk} \quad j \geq 2, m = \infty, \mu_1 = 1, \tag{44}$$
$$b_k = 2(3)^{k-1} \quad \text{untuk} \quad k \geq 2, l = \infty, \mu_2 = 0, \tag{45}$$

maka diperoleh metode iterasi Tiga Langkah dengan orde konvergensi enam.

4. PERBANDINGAN KOMPUTASI

Pada bagian ini dilakukan perbandingan komputasi yang bertujuan untuk membandingkan jumlah iterasi dari metode Sharma Guha (MSG), metode Neta (MNETA), metode Grau Diaz-Barrero (MGD), metode Chun dan Ham (MCH), metode Chun dan Neta (MCN), dan metode Tiga Langkah (MTL) dalam menemukan akar pendekatan dari persamaan nonlinear. Persamaan nonlinear yang digunakan dalam perbandingan adalah:

$f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10, \quad \alpha = 1.365230013414097$
$f_2(x) = x^2 - e^x - 3x + 2, \quad \alpha = 0.257530285439861$
$f_3(x) = xe^{x^2} - \sin^2(x) + 3\cos(x) + 5, \quad \alpha = -1.207647827130919$
$f_4(x) = x^4 + \sin\dfrac{\pi}{x^2} - 5, \quad \alpha = 1.414213562373095$
$f_5(x) = e^x \sin(x) + \log(1 + x^2), \quad \alpha = 0.000000000000000$
$f_6(x) = \sqrt{2 + x^2}\sin\dfrac{\pi}{x^2} + \dfrac{1}{x^4 + 1} - \dfrac{17\sqrt{3} + 1}{17}, \quad \alpha = -2.000000000000000$

Perbandingan ke enam contoh di atas menggunakan program Matlab R2010a dengan kriteria pemberhentian adalah $|f(x_n)| < \mathit{toleransi}$, $|x_{n+1} - x_n| < \mathit{toleransi}$, dimana *toleransi* $= 1.0 \times 10^{-15}$. Jumlah iterasi maksimum yang diizinkan adalah 200.

Tabel 1 merupakan perbandingan komputasi (Jumlah iterasi, NFE) dari enam metode yang berbeda. Jumlah iterasi 200+ menyatakan bahwa jumlah iterasi dari metode melebihi maksimum iterasi, jumlah iterasi $*$ menyatakan bahwa iterasi tidak berhenti untuk maksimum iterasi sedangkan Div (Divergen) menyatakan bahwa iterasi yang dihasilkan tidak menuju ke satu akar.

Secara keseluruhan berdasarkan Tabel 1, dalam hal jumlah iterasi dan jumlah perhitungan fungsi dari ke enam metode tidak mengalami perbedaan yang signifikan, hal ini terjadi karena orde konvergensi dan perhitungan fungsi masing-masing metode sama. Namun secara umum MGD, MCN dan MTL lebih unggul dari metode pembanding yang lain.

5. *BASINS OF ATTRACTION*

Pada bagian ini dibahas cara lain untuk membandingkan metode iterasi. Perbandingan diantara metode dilakukan dengan menggunakan *Basins of Attraction* yang menghasilkan gambar fraktal yang mempermudah untuk melihat jumlah iterasi yang diperoleh untuk berbagai tebakan awal.

Misalkan persamaan $f(x) = 0$ adalah persamaan nonlinear dan mempunyai akar α. Misalkan x_0 adalah tebakan awal dan proses iterasi didefinisikan dengan

$$x_{n+1} = T_f(x_n),$$

maka menghasilkan titik-titik $x_1 = T_f(x_0), x_2 = T_f(x_1), \cdots, x_n = T_f(x_{n-1}) = T_f^2(x_{n-2}) = T_f^n(x_0)$ yang akan konvergen atau tidak konvergen ke pembuat nol dari $f(x)$. Jika $\lim_{n\to\infty} T_f^n(x_0) = \alpha$ maka α dikatakan titik *Attraction* untuk fungsi T_f.

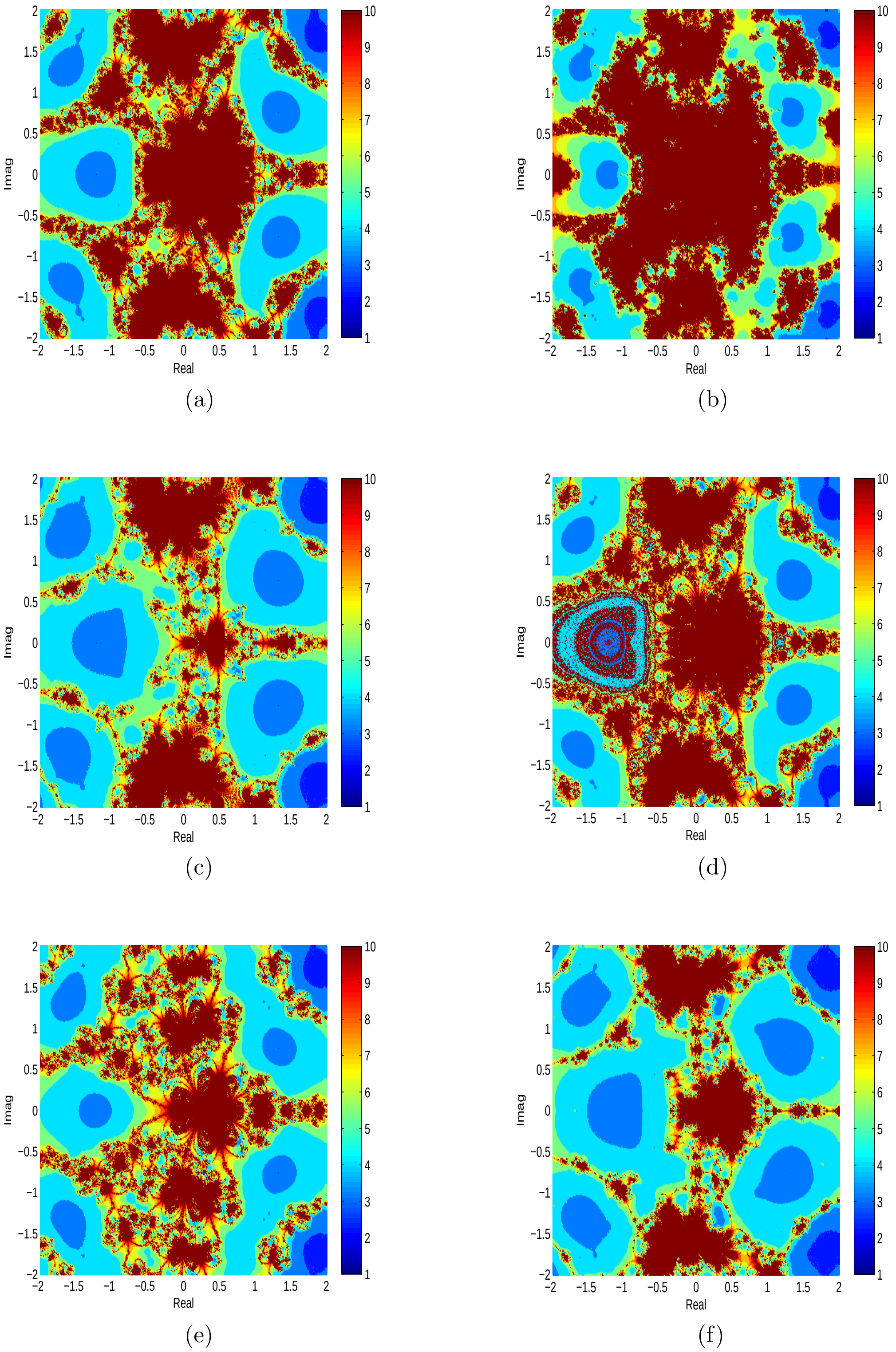
Jadi definisi *Basins of Attraction* secara umum adalah himpunan titik-titik dari proses iterasi yang konvergen ke akar sebenarnya atau dapat ditulis [2]

$$A(\alpha) = \{x : \lim_{n\to\infty} T_f^n(x) = \alpha\}.$$

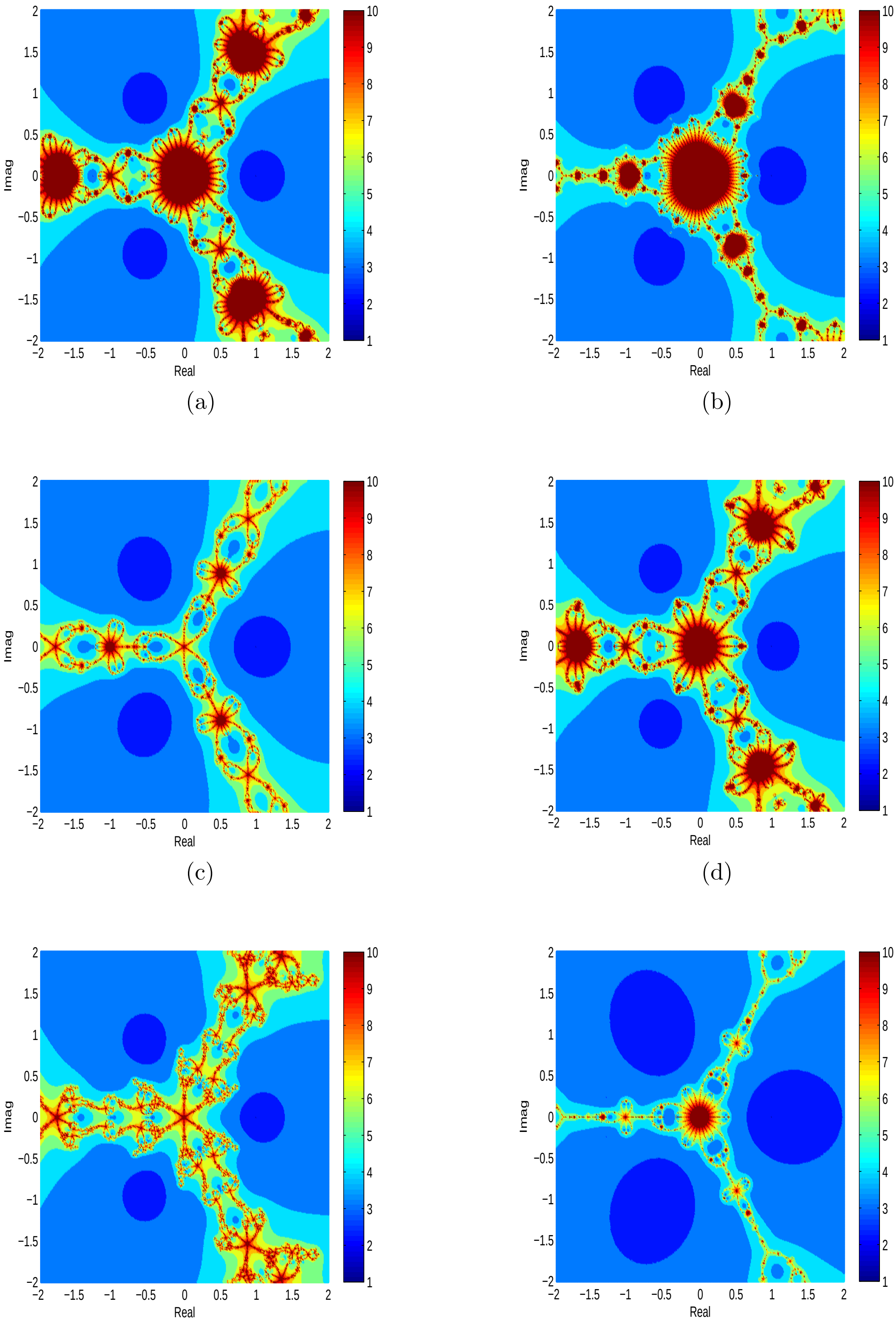
Untuk membuat gambar *Basins of Attraction*, pertama diambil sebuah persegi yang berukuran $[-2, 2] \times [-2, 2]$ dan kemudian persegi tersebut dibagi menjadi grid 100×100. Setiap titik pada grid tersebut mewakili sebuah bilangan real atau bilangan kompleks yang dijadikan sebagai tebakan awal untuk metode iterasi yang digunakan. Kriteria pemberhentian metode iterasi adalah $|f(x_n)| <$ *toleransi*, $|x_{n+1}-x_n| <$ *toleransi* , dimana *toleransi* $= 1.0\times10^{-15}$ dan jumlah iterasi maksimum adalah 10.

Gambar 1 dan 2 masing-masing menunjukkan output dari program komputer Matlab R2010a, yang merupakan gambar *Basins of Attraction* untuk fungsi $f(x) = xe^{x^2} - \sin^2(x) + 3\cos(x) + 5$ dan $f(x) = x^3 - 1$ dimana dipilih tebakan awal bilangan kompleks.

Berdasarkan rata-rata jumlah iterasi (μ) dan persentase titik divergen (ω) pada Gambar *Basins of Attraction* antara MSG, MNETA,MGD, MCH, MCN dan MTL, dapat dilihat bahwa MTL unggul dibandingkan metode lain karena mempunyai rata-rata jumlah iterasi μ dan persentase titik divergen ω terkecil.



Gambar 1: *Basins of Attraction* $f(x) = xe^{x^2} - \sin^2(x) + 3\cos(x) + 5$ dengan $x_0 \in \mathbb{C}$. (a) MSG,$\mu = 6.67$ dan $\omega = 37.41$(b) MNETA,$\mu = 7.52$ dan $\omega = 52.87$(c) MGD,$\mu = 5.54$ dan $\omega = 19.91$ (d) MCH,$\mu = 6.91$ dan $\omega = 40.75$(e) MCN,$\mu = 6.16$ dan $\omega = 25.28$(f) MTL,$\mu = 5.38$ dan $\omega = 19.43$



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

Gambar 2: *Basins of Attraction* $f(x) = x^3 - 1$ dengan $x_0 \in \mathbb{C}$. (a) MSG,$\mu = 4.43$ dan $\omega = 9.87$(b) MNETA,$\mu = 3.94$ dan $\omega = 6.82$(c) MGD,$\mu = 3.65$ dan $\omega = 1.29$ (d) MCH,$\mu = 4.31$ dan $\omega = 6.65$(e) MCN,$\mu = 4.01$ dan $\omega = 2.16$(f) MTL,$\mu = 3.12$ dan $\omega = 0.72$

Tabel 1: (Jumlah Iterasi, NFE) dari Beberapa Metode Iterasi

$f(x)$	x_0	MSG	MNETA	MGD	MCH	MCN	MTL
f_1	100	$(6,24)$	$(5,20)$	$(6,24)$	$(6,24)$	$(6,24)$	$(5,20)$
f_2	100	$(41,164)$	$(200+,800+)$	$(38,152)$	$(41,164)$	$(41,164)$	$(56,224)$
f_3	-1.0	$(3,12)$	$(4,16)$	$(3,12)$	$(*,-)$	$(3,12)$	$(3,12)$
f_4	1.0	$(3,12)$	$(3,12)$	$(2,8)$	$(2,8)$	$(2,8)$	$(3,12)$
f_5	1.0	$(3,12)$	$(3,12)$	$(3,12)$	$(3,12)$	$(3,12)$	$(3,12)$
f_6	-1.5	(Div, $-$)	$(6,24)$	$(3,12)$	(Div, $-$)	$(3,12)$	$(3,12)$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bartle, R. G. & D. R. Shebert. 2010. *Introduction to Real Analysis, 4th* Ed. John Wiley & Sons, Inc., New York.

[2] Basto, M., L.P. Basto., V. Semiao., & F.L. Calheiros. 2013. Contrasts in the Basins of Attraction Structurally Identical Iterative Root Finding Methods. *Applied Mathematics and Computation*, **219**:7997-8008.

[3] Chun, C. & B. Neta. 2012. A New Sixth-Order Scheme for Nonlinear Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **25**:185-189.

[4] Chun, C. & Y. Ham. 2007. Some Sixth-Order Variants of Ostrowski Root Finding Methods. *Applied Mathematics and Computation*, **193**:389-394.

[5] Grau, M. & J.L. Diaz-Barrero. 2006. An Improvement to Ostrowski Root Finding Method. *Applied Mathematics and Computation*, **173**:450-456.

[6] Khattri, S.K. & I.K. Argyros. 2013. Unification of Sixth-Order Iterative Methods. *Mathematical Sciences*, **7**:5.

[7] Neta, B. 1979. A Sixth-Order Family of Methods for Nonlinear Equation. *International Journal Computers and Mathematic with applications*, **7**:157-161.

[8] Ostrowski, A.M. 1966. *Solutions of Equation and System Equations*, 2nd Ed. Academic. New York.

[9] Sharma, J.R. & R.K. Guha. 2007. A family of modified Ostrowski methods with accelerated sixth order convergence. *Applied Mathematics and Computation*, **190**:111-115.

[10] Stewart, J. 2003. *Kalkulus Ed ke-5:Jilid 2.* Terj. dari *Calculus, 5th* Ed, oleh Sungkono, C. Salemba Teknika, Jakarta.

[11] Weerakoon, S. & T.G.I. Fernando. 2000. A Variant of Newton's Method with Accelerated Third-Order Convergence. *Applied Mathematics Letters*, **13**:87-93.