FAMILI DARI METODE NEWTON-*LIKE* DENGAN ORDE KONVERGENSI EMPAT

Nurazmi[1*], Supriadi Putra[2], Musraini M[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Laboratorium Matematika Terapan, Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*azmi3424@gmail.com

ABSTRACT

This article discusses the families of Newton-*Like* methods derived from a combination of the secant method with Newton's method based on the trapezoidal rule and inverse function to find a root of nonlinear equations. Analytically, it is shown that the iterative methods have the order of convergence four and for each iteration, they require four function evaluations, so the efficiency index is 1.414 which is the same as Newton's method. Furthermore, computational results show that the iterative method is superior to the comparison methods in terms of the number of iterations to obtain the estimated roots.

Keywords: *newton method, secant method, order of convergence, trapezoidal rule, inverse function.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas famili metode Newton-*Like* yang diperoleh dari kombinasi metode Secant dengan metode Newton berdasarkan aturan trapesium dan fungsi invers untuk mencari akar persamaan nonlinear. Secara analitik ditunjukkan bahwa metode iterasi ini mempunyai orde kekonvergenan empat dan untuk setiap iterasinya memerlukan empat perhitungan fungsi, sehingga indeks efisiensinya adalah 1.414, yaitu sama dengan metode Newton. Selanjutnya hasil komputasi menunjukkan bahwa metode iterasi yang didiskusikan lebih unggul dari metode pembanding dari segi jumlah iterasi dari untuk mendapatkan akar taksiran.

Kata kunci: *aturan trapesium, fungsi invers, metode newton, metode secant, orde konvergensi.*

1. PENDAHULUAN

Persoalan matematika yang sering dijumpai dalam menyelesaikan akar persamaan nonlinear, dapat ditulis dalam bentuk

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Metode numerik yang populer digunakan untuk menyelesaikan persamaan (1) adalah metode Newton dan metode Secant. Adapun bentuk iterasi metode Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \quad \text{dengan } f'(x_n) \neq 0. \tag{2}$$

Metode Newton memiliki orde konvergensi kuadratik [1, h. 86]. Sedangkan bentuk iterasi metode Secant adalah

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots. \tag{3}$$

Metode Secant memiliki orde konvergensi 1.618 (*Super linear*) [1, h. 86]. Secara umum metode Newton lebih unggul dibandingkan dengan metode Secant, karena metode Newton memiliki orde konvergensi lebih tinggi dibandingkan metode Secant, sehingga metode Newton lebih cepat mencari akar persamaan (1) daripada metode Secant.

Para ahli berlomba mencari metode yang paling efektif dan paling efisien. Sehingga metode Newton banyak mengalami modifikasi, seperti yang telah dikembangkan oleh beberapa penulis sebelumnya diantaranya: Weerakoon dan Fernando [8], yang merupakan modifikasi metode Newton dengan Aturan Trapesium, sehingga didapat metode iterasi berikut

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(x_n^*)}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \qquad (4)\\ \text{dengan } x_n^* &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{aligned}$$

Selain itu H.H.H Homeier [4] juga memodifikasi metode Newton dengan menggunakan fungsi invers, sehingga didapat metode iterasi berikut

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(x_n^*)}\right), \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \qquad (5)\\ \text{dengan } x_n^* &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \end{aligned}$$

Persamaan (4) dan (5) memiliki orde konvergensi kubik. Selanjutnya Divya Jain [5] mengkombinasikan penggunaan metode iterasi yang telah dikembangkan oleh Weerakoon-Fernando [8] dan H.H.H Homeier [4] dengan metode Secant. Sehingga diperoleh famili dari metode Newton-*like* yaitu metode Secant Trapesium Newton dan metode Secant Invers Newton.

Pada artikel ini di bagian dua dibahas famili dari metode iterasi Newton-*like* baru yang memiliki orde konvergensi empat yang merupakan review dari artikel Divya Jain [5], dengan judul *"Families of Newton-like methods with fourth-order convergence"*, kemudian dilanjutkan di bagian tiga melakukan analisa kekonvergenan dan di bagian empat melakukan uji komputasi.

2. FAMILI DARI METODE NEWTON-*LIKE* DENGAN ORDE KONVERGENSI EMPAT

Pada bagian ini diberikan beberapa definisi dasar untuk pembahasan selanjutnya, kemudian dilanjutkan dengan proses terbentuknya beberapa metode iterasi baru.

Definisi 1 (Orde Konvergensi) [6]. Misalkan α adalah akar sederhana dari persamaan nonlinear $f(x) = 0$, dan barisan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ adalah barisan yang dihasilkan oleh suatu metode iterasi yang konvergen ke α. Jika terdapat konstanta positif $C \neq 0$ dan $p \geq 0$ sehingga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = C, \tag{6}$$

maka p disebut orde konvergensi dari metode iterasi tersebut.

Jika $p = 2$, $p = 3$, dan $p = 4$, maka barisan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dikatakan mempunyai orde konvergensi kuadratik, kubik, dan empat.

Definisi 2 (Persamaan Galat) [6]. Apabila notasi $e_n = x_n - \alpha$ merupakan notasi untuk galat pada iterasi ke$-n$, maka

$$e_{n+1} = Ce_n^p + o\left(e_n^{p+1}\right). \tag{7}$$

Persamaan (7) disebut sebagai persamaan galat, dengan p merupakan orde konvergensi dari metode iterasi.

Definisi 3 [8] Misalkan α adalah akar dari suatu persamaan nonlinear $f(x)$, dan x_{n-1}, x_n, x_{n+1} adalah tiga iterasi berturut-turut yang cukup dekat ke akar α. Jadi orde konvergensi secara komputasi COC dapat diaproksimasikan dengan rumus

$$\text{COC} \approx \frac{\ln |(x_{n+1} - \alpha)/(x_n - \alpha)|}{\ln |(x_n - \alpha)/(x_{n-1} - \alpha)|}. \tag{8}$$

Definisi 4 [7, h. 12]. Misalkan p adalah orde suatu metode iterasi dan w adalah banyaknya fungsi yang dievaluasi pada setiap iterasinya, maka indeks efisiensi dari metode iterasi itu adalah $p^{\frac{1}{w}}$.

2.1 Metode Secant Trapesium Newton

Penurunan metode Secant Trapesium Newton dimulai dengan menggunakan modifikasi metode Newton seperti yang telah dikembangkan oleh Weerakoon dan

Fernando [8] persamaan (4). Selanjutnya persamaan (4) dikombinasi dengan metode secant persamaan (3), yaitu memberi bentuk alternatif metode secant sebagai berikut

$$x_{n+1} = \bar{x}_n - f(\bar{x}_n)\frac{\bar{x}_n - x_n}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}, \tag{9}$$

Apabila nilai $\bar{x}_n$ pada persamaan (9) diperoleh dengan menggunakan metode Weerakoon persamaan (4), maka diperoleh metode baru iterasi tiga langkah dari kombinasi antara, metode Secant, aturan Trapesium dan metode Newton sebagai berikut

$$x_n^* = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{10}$$

$$\bar{x}_n = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n^*) + f'(x_n)}, \tag{11}$$

$$x_{n+1} = \bar{x}_n - f(\bar{x}_n)\frac{\bar{x}_n - x_n}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}, \tag{12}$$

metode iterasi persamaan (10), (11) dan (12) merupakan famili dari metode Newton-*like* yang disebut dengan metode Secant Trapesium Newton.

2.2 Metode Secant Invers Newton

Dengan cara yang sama untuk menurunkan Metode Secant Invers Newton dimulai dengan menggunakan modifikasi metode Newton seperti yang telah dikembangkan oleh H.H.H Homeier [4] yaitu persamaan (5) . Selanjutnya persamaan (5) dikombinasi dengan bentuk alternatif metode secant persamaan (9). Apabila $\bar{x}_n$ pada persamaan (9) digantikan dengan metode Homeier persamaan (5) diperoleh iterasi tiga langkah dari kombinasi antara metode Secant, fungsi invers dan metode Newton sebagai berikut

$$x_n^* = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{13}$$

$$\bar{x}_n = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(x_n^*)}\right), \tag{14}$$

$$x_{n+1} = \bar{x}_n - f(\bar{x}_n)\frac{\bar{x}_n - x_n}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}, \tag{15}$$

metode iterasi persamaan (13), (14) dan (15) merupakan famili dari metode Newton-*like* yang disebut dengan metode Secant invers Newton.

3. ANALISA KEKONVERGENAN

Teorema 5 (Orde Konvergensi Metode Secant Trapesium Newton)
Misalkan $\alpha \in I$ akar sederhana dari fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ yang terdiferensial secukupnya pada interval buka I. Jika x_0 cukup dekat dengan α, maka persamaan (10), (11) dan (12) memiliki orde konvergensi empat dengan persamaan galat yaitu

$$e_{n+1} = (\frac{1}{2}C_2C_3 + C_2^3)e_n^4 + o(e_n^5). \tag{16}$$

dimana $e_n = x_n - \alpha$ dan $C_j = \dfrac{1}{j!}\dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $j = 2, 3, \cdots$

Bukti: Misalkan α adalah akar dari persamaan $f(x) = 0$, maka $f(\alpha) = 0$, dengan e_n dan $\bar{e}_n$ masing-masing adalah galat di x_n dan $\bar{x}_n$, dimana $x_n = \alpha + e_n$ dan $\bar{x}_n = \alpha + \bar{e}_n$. Untuk membukti metode Secant Trapesium Newton berorde empat, dapat menggunakan persamaan galat dari metode Weerakoon [8] persamaan (4) sebagai berikut

$$\bar{e}_n = (C_2^2 + \frac{1}{2}C_3)e_n^3 + o(e_n^4). \tag{17}$$

Dengan menggunakan ekspansi Taylor untuk $f(x_n)$ di sekitar $x_n = \alpha$ diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x_n - \alpha)^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}(x_n - \alpha)^3 + o(e_n^4) \\ &= f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!}f'''(\alpha)e_n^3 + o(e_n^4) \\ f(x_n) &= f(\alpha) + f'(\alpha)\left(e_n + \frac{1}{2!}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}e_n^2 + \frac{1}{3!}\frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)}e_n^3\right) + o(e_n^4). \end{aligned} \tag{18}$$

Karena $f(\alpha) = 0$, dengan $C_j = \dfrac{1}{j!}\dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $j = 2, 3$ maka persamaan (18) menjadi

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3) + o(e_n^4) \tag{19}$$

Berikut ini akan dicari $f(\bar{x}_n)$, dengan menggunakan ekspansi taylor untuk $f(\bar{x}_n)$ disekitar $\bar{x}_n = \alpha$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} f(\bar{x}_n) =& f(\alpha) + f'(\alpha)(\bar{x}_n - \alpha) + \frac{1}{2!}f''(\alpha)(\bar{x}_n - \alpha)^2 \\ &+ \frac{1}{3!}f^{(3)}(\alpha)(\bar{x}_n - \alpha)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(\alpha)(\bar{x}_n - \alpha)^4 \\ &+ o(\bar{x}_n - \alpha)^5. \end{aligned} \tag{20}$$

Menggunakan $\bar{x}_n = \alpha + (C_2^2 + \frac{1}{2}C_3)e_n^3 + o(e_n^5)$, yang diperoleh dari $\bar{x}_n = \alpha + \bar{e}_n$ dari persamaan (17) maka setelah disederhanakan persamaan (20) menjadi

$$f(\bar{x}_n) = f'(\alpha)\left((C_2^2 + \frac{1}{2}C_3)e_n^3\right) + o(e_n^5). \tag{21}$$

Selanjutnya akan dihitung $\dfrac{1}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}$, dari persamaan (19) dan (21) diperoleh

$$\frac{1}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} = \frac{1}{-f'(\alpha)e_n\left(1 + C_2e_n + (\frac{1}{2}C_3 - {C_2}^2){e_n}^2 + o(e_n^5)\right)}. \tag{22}$$

Persamaan (22) dapat diselesaikan, dengan menggunakan identitas geometri

$$\frac{1}{1+r} = 1 - r + r^2 - r^3, \tag{23}$$

dengan $r = C_2e_n + (\frac{1}{2}C_3 - C_2^2)e_n^2 + o(e_n^5)$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+r} =&1 - C_2e_n - \frac{1}{2}C_3e_n^2 + C_2C_3e_n^3 + 2C_2^3e_n^3 + \frac{1}{4}C_2^3e_n^4 + C_2^2e_n^4 \\ &+ C_2^4e_n^4 + o(e_n^5) \\ =&1 + (\frac{1}{4}C_2^3 + C_2^2 + C_2^4)e_n^4 + (C_2C_3 + 2C_2^3)e_n^3 - \frac{1}{2}C_3e_n^2 - C_2e_n + o(e_n^5).\end{aligned}$$

Sehingga persamaan (22) menjadi

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} =&\frac{1}{-f'(\alpha)e_n}\Big((1 + \frac{1}{4}C_2 + C_2^2 + C_2^4)e_n^4 + (C_2C_3 + 2C_2^3)e_n^3 \\ &- \frac{1}{2}C_3e_n^2 - C_2e_n + o(e_n^5)\Big).\end{aligned} \tag{24}$$

Berikut ini ditentukan $\bar{x}_n - x_n$ dimana $x_n = \alpha + e_n$ dan $\bar{x}_n = \alpha + \bar{e}_n$ sehingga diperoleh

$$\bar{x}_n - x_n = (C_2^2 + \frac{C_3}{2})e_n^3 - e_n. \tag{25}$$

Dengan menggunakan persamaan (21) dan (25) diperoleh

$$f(\bar{x}_n)(\bar{x}_n - x_n) = f'(\alpha)(\frac{1}{2}C_3 + C_2^2)e_n^4. \tag{26}$$

Persamaan (24) dikalikan dengan persamaan (26) melakukan bentuk

$$\frac{f(\bar{x}_n)(\bar{x}_n - x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} =(-\frac{1}{2}C_2C_3 - C_2^3)e_n^4 + (\frac{1}{2}C_3 + C_2^2)e_n^3 + o(e_n^5). \tag{27}$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (27) dan $\bar{x}_n = \alpha + \bar{e}_n$, maka persamaan (9) menjadi

$$x_{n+1} = \alpha + \bar{e}_n + (\frac{1}{2}C_2C_3 + C_2^3)e_n^4 - (\frac{1}{2}C_3 + C_2^2)e_n^3 + o(e_n^5),$$

atau

$$x_{n+1} = \alpha + (\frac{1}{2}C_2C_3 + C_2^3){e_n}^4 + o({e_n}^5). \tag{28}$$

Karena $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$ maka

$$e_{n+1} = (\frac{1}{2}C_2C_3 + C_2^3)e_n^4 + o(e_n^5). \tag{29}$$

Persamaan (29) merupakan persamaan galat untuk metode Secant Trapesium Newton. Menggunakan Definisi 2 maka metode Secant Trapesium Newton memiliki orde konvergensi empat. ■

Karena pada setiap iterasinya, metode Secant Trapesium Newton melakukan evaluasi fungsi sebanyak empat kali dan memiliki orde konvergensi empat, maka menggunakan Definisi 4 indeks efisiensinya adalah $4^{\frac{1}{4}} = 1.414$.

Teorema 6 (Orde Konvergensi Metode Secant Invers Newton)
Misalkan $\alpha \in I$ akar sederhana dari fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ yang terdiferensial secukupnya pada interval buka I. Jika x_0 cukup dekat dengan α, maka persamaan (13), (14) dan (15) memiliki orde konvergensi empat dengan persamaan galat yaitu

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}C_2C_3e_n^4 + o(e_n^5).$$

dimana $e_n = x_n - \alpha$ dan $C_j = \dfrac{1}{j!}\dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $j = 2, 3, \cdots$

Bukti: Misalkan α adalah akar dari persamaan $f(x) = 0$, maka $f(\alpha) = 0$, dengan e_n dan $\bar{e}_n$ masing-masing adalah galat di x_n dan $\bar{x}_n$, dimana $x_n = \alpha + e_n$ dan $\bar{x}_n = \alpha + \bar{e}_n$. Untuk membukti metode Secant Invers Newton berorde empat, dapat menggunakan persamaan galat dari metode Homeier [4] sebagai berikut

$$\bar{e}_n = \frac{1}{2}C_3e_n^3 + o(e_n^4). \tag{30}$$

Ekspansi dari $f(\bar{x}_n)$ untuk $\bar{x}_n = \alpha$ diberikan oleh persamaan (20). Menggunakan $\bar{x}_n = \alpha + \dfrac{1}{2}C_3e_n^3 + o(e_n^5)$, yang diperoleh dari $\bar{x}_n = \alpha + \bar{e}_n$ dari persamaan (30) maka setelah disederhanakan persamaan (20) menjadi

$$f(\bar{x}_n) = f'(\alpha)\left(\frac{1}{2}C_3e_n^3\right) + o(e_n^5). \tag{31}$$

Selanjutnya akan dihitung $\dfrac{1}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}$, dari persamaan (19) dan (31) diperoleh

$$\frac{1}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} = \frac{1}{-f'(\alpha)e_n\left(1 + C_2e_n + \frac{1}{2}C_3e_n^2 + o(e_n^5)\right)}. \tag{32}$$

Persamaan (32) dapat diselesaikan menggunakan identitas geometri persamaan (23), dengan misalkan nilai $r = C_2e_n + \dfrac{1}{2}C_3e_n^2 + o(e_n^5)$ diperoleh

$$\frac{1}{1+r} = 1 + C_2e_n + \left(C_2^2 + \frac{1}{2}C_3\right)e_n^2 + C_2C_3e_n^3 + \frac{1}{4}C_3^2e_n^4 + o(e_n^5).$$

Sehingga persamaan (32) menjadi

$$\frac{1}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} = \frac{1}{-f'(\alpha)e_n}\bigg(1+C_2e_n + (C_2^2 + \frac{1}{2}C_3)e_n^2 + C_2C_3e_n^3 + \frac{1}{4}C_3^2e_n^4 + o(e_n^5)\bigg). \tag{33}$$

Berikut ini akan ditentukan $\bar{x}_n - x_n$ dimana $x_n = \alpha + e_n$ dan $\bar{x_n} = \alpha + \bar{e}_n$ diperoleh

$$\bar{x}_n - x_n = \frac{1}{2}C_3 e_n^3 - e_n + o(e_n^5). \tag{34}$$

Dengan menggunakan persamaan (21) dan (34) diperoleh

$$f(\bar{x}_n)(\bar{x}_n - x_n) = f'(\alpha)\frac{1}{2}C_3 e_n^4 + o(e_n^5). \tag{35}$$

Persamaan (33) dikalikan dengan Persamaan (35) melakukan bentuk

$$\frac{f(\bar{x}_n)(\bar{x}_n - x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} = \frac{1}{2}C_3 e_n^3 + \frac{1}{2}C_2 C_3 e_n^4 + o(e_n^5). \tag{36}$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (36) dan $\bar{x}_n = \alpha + \bar{e}_n$, maka persamaan (9) menjadi

$$x_{n+1} = \alpha + \bar{e}_n - \frac{1}{2}C_3 e_n^3 + \frac{1}{2}C_2 C_3 e_n^4 + o(e_n^5).$$

Karena $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$ maka

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}C_2 C_3 e_n^4 + o(e_n^5). \tag{37}$$

Persamaan (37) merupakan persamaan galat untuk metode Secant Invers Newton. Menggunakan Definisi 2 maka metode Secant Invers Newton memiliki orde konvergensi empat. ∎

Pada setiap iterasinya Metode Secant Invers Newton melakukan evaluasi fungsi sebanyak empat kali dan memiliki orde konvergensi empat, maka menggunakan Definisi 4 indeks efisiensinya adalah $4^{\frac{1}{4}} = 1.414$.

4. UJI KOMPUTASI

Berikut ini akan dilakukan uji komputasi untuk membandingkan banyak iterasi dari metode Newton (MN) persamaan (2), metode Weerakoon (MW) persamaan (4), Homeier (MH) persamaan (5), metode Secant Trapesium Newton (MSTN) persamaan (10), (11), (12) dan metode Secant Invers Newton (MSIN) persamaan (13), (14), (15) dalam menemukan akar dari persamaan nonlinear. Dalam melakukan perbandingan ini, persamaan nonlinear yang digunakan adalah:

$f_1 = x^3 + 4x^2 - 10$	$\alpha = 1.3652300134140968$
$f_2 = \sin^2(x) - x^2 + 1$	$\alpha = 1.4044916482153412$
$f_3 = x^2 - e^x - 3x + 2$	$\alpha = 0.2575302854398608$
$f_4 = \cos(x) - x$	$\alpha = 0.7390851332151606$
$f_5 = x^3 - 10$	$\alpha = 2.1544346900318837$
$f_6 = cos(x) - xe^x + x^2$	$\alpha = 0.6391540963320076$

Perbandingan ke enam contoh di atas menggunakan program MAPLE 13 dengan kriteria pemberhentian untuk setiap adalah

1. Jika selisih nilai mutlak antara dua iterasi yang berdekatan bernilai lebih kecil dari toleransi yang diberikan.
2. Jika nilai mutlak fungsi lebih kecil dari tolerasnsi yang diberikan.
3. Jika jumlah iterasi mencapai maksimum iterasi.

Tabel 1: Perbandingan Uji Komputasi untuk MN, MW, MH, MSTN, dan MSIN

$f(x)$	x_0	(Jumlah Iterasi, COC, NF)				
		MN	MW	MH	MSTN	MSIN
f_1	1.0	$(5, 2.00, 10)$	$(4, 3.00, 12)$	$(3, 3.00, 9)$	$(3, 3.99, 12)$	$(3, 3.99, 12)$
f_2	1.0	$(6, 2.00, 12)$	$(4, 3.00, 12)$	$(4, 3.00, 13)$	$(3, 3.98, 12)$	$(3, 3.99, 12)$
f_3	1.0	$(5, 2.00, 10)$	$(4, 3.00, 12)$	$(4, 3.00, 12)$	$(3, 4.00, 12)$	$(3, 4.00, 12)$
f_4	1.0	$(5, 2.00, 10)$	$(3, 3.00, 9)$	$(3, 3.00, 9)$	$(3, 4.00, 12)$	$(3, 4.00, 12)$
f_5	2.0	$(5, 2.00, 10)$	$(3, 3.00, 9)$	$(3, 3.00, 9)$	$(3, 4.00, 12)$	$(3, 4.00, 12)$
f_6	1.0	$(6, 2.00, 12)$	$(6, 2.99, 12)$	$(4, 3.00, 12)$	$(3, 4.00, 12)$	$(3, 4.00, 12)$

Secara umum kelima metode yang dibahas berhasil menemukan akar yang diharapkan. Akan tetapi metode baru yang diusulkan relatif lebih unggul dari pada metode Newton, metode Weerakoon dan metode Homeier. Dapat dilihat pada Tabel 1 bahwa dua metode iterasi baru yang diusulkan memiliki jumlah iterasi lebih sedikit dari pada metode pembanding.

Dari perhitungan COC pada Tabel 1 dapat dilihat orde konvergensi secara komputasi dari metode Secant Trapesium Newton dan Metode Secant Invers Newton menunjukkan orde konvergensi empat. Dapat disimpulkan metode baru yang diusulkan diantaranya metode Secant Trapesium Newton dan metode Secant Invers Newton, lebih cepat dalam menemukan akar sehingga jumlah iterasi yang diperlukan lebih sedikit dibandingkan dengan metode Newton, metode Weerakoon dan Homeier. Hal ini sesuai dengan Teorema 5 dan Teorema 6.

Dari segi banyaknya fungsi yang dievaluasi (NF) pada setiap metode iterasi, berdasarkan Tabel 1 dapat dilihat dua metode iterasi baru yang dibahas memiliki NF relatif lebih besar dari pada metode pembanding, akan tetapi orde konvergensinya lebih besar dari pada metode pembandingnya.

UCAPAN TERIMA KASIH

Ungkapan terima kasih penulis ucapkan kepada Bapak Supriadi Putra, M.Si. selaku pembimbing I dan ibu Musraini M., M.Si. selaku pembimbing II, yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan tenaga dalam memberi bimbingan, arahan, dorongan, dan kesabaran dalam membimbing penulis menyelesaikan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Conte, S. D. 1980. *Elementary Numerical Analysis, Third Edition*, McGraw Hill Book Company., New York.

[2] Dennis, J.E & R. B. Schnabel. 1983. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Pretince Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.

[3] Gautschi, W. 2011. *Numerical Analysis, Second Edition*. Birkhauser, New York.

[4] Homeier, H.H.H. 2005. On Newton-type Methods with Cubic Convergence. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **176**:425-432.

[5] Jain, Divya. 2013. Families of Newton-like Methods with Fourth-Order Convergence. *International Journal of Computer Mathematics*, **90**:1072-1082.

[6] Sharma, J.R., R.K. guha & R. sharma. 2011. Some Modified Newton's Method with Fourth-Order Convergence. *Applied Science Research*, **2**:240-247.

[7] Traub, J.F. 1964. *Iterative Methods for the Solution of Equations*. Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.

[8] Weerakoon, S & T.G.I. Fernando. 2000. A Variant of Newton's Method with Accelerated Third Order Convergence.*Applied Mathematics Letters*, **13**: 87-93.