METODE ITERASI BARU BEBAS DERIVATIF UNTUK MENEMUKAN SOLUSI PERSAMAAN NONLINEAR

Eka Ceria[1*], Agusni[2], Zulkarnain[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Laboratorium Matematika Terapan, Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

eka_ceria2@yahoo.com

ABSTRACT

This article discusses a new derivative-free iterative method to find the solutions of nonlinear equations. Analytically it is shown that the order of convergence of the method is two. The advantage of this iterative method is that it can be used to obtain real roots and complex roots. In terms of this ability, the method is equivalent to Muller's method. Numerical tests show that the iterative method is superior and efficient in terms of the number of iterations required to obtain a root.

Keywords: *nonlinear equations, quadratic convergence, derivative-free iterative method, complex roots, Muller's method .*

ABSTRAK

Artikel ini membahas metode iterasi baru bebas derivatif untuk menemukan solusi persamaan nonlinear. Secara analitik ditunjukkan bahwa metode iterasi ini mempunyai orde konvergensi kuadratik. Keunggulan metode iterasi ini disamping dapat menghampiri akar real juga dapat digunakan untuk menghampiri akar kompleks. Secara kemampuan metode ini setara dengan metode Muller. Dari uji komputasi terlihat bahwa metode iterasi yang didiskusikan lebih unggul dan efisien dari metode pembanding dalam hal jumlah iterasi yang diperlukan untuk mendapatkan akar.

Kata kunci: *persamaan nonlinear, konvergen kuadratik, metode iterasi bebas derivatif, akar kompleks, metode Muller.*

1. PENDAHULUAN

Dalam matematika, persoalan menemukan solusi dari suatu persamaan nonlinear

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

selalu menjadi perhatian. Persamaan-persamaan tersebut sering muncul dalam bentuk yang tidak sederhana, yang kadangkala tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik, sehingga dapat diselesaikan menggunakan metode numerik. Metode numerik merupakan salah satu metode yang sangat banyak kegunaannya dalam bidang ilmu matematika, khususnya untuk mendapatkan solusi persamaan (1). Salah satu metode numerik yang sering digunakan untuk menemukan solusi persamaan (1) adalah metode Newton yang memiliki orde konvergensi kuadratik [1, h. 78] dengan bentuk iterasi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f'(x_n) \neq 0 \quad \text{dan} \quad n = 0, 1, 2, \cdots .$$

Banyak peneliti berusaha untuk menemukan metode iterasi baru dengan menghindari munculnya turunan di formula iterasi, diantaranya adalah metode Muller [1, h. 108-109], dengan bentuk iterasi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2C_n}{B_n \pm \sqrt{B_n^2 - 4A_nC_n}},$$

dengan

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{(x_{n-1} - x_n)(f(x_{n-2}) - f(x_n)) - (x_{n-2} - x_n)(f(x_{n-1}) - f(x_n))}{(x_{n-2} - x_n)(x_{n-1} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1})} \\ B_n &= \frac{(x_{n-2} - x_n)^2(f(x_{n-1}) - f(x_n)) - (x_{n-1} - x_n)^2(f(x_{n-2}) - f(x_n))}{(x_{n-2} - x_n)(x_{n-1} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1})} \\ C_n &= f(x_n). \end{aligned}$$

Metode Muller memiliki orde konvergensi 1.84 (superlinear).

Metode iterasi lain yang menghindari munculnya turunan adalah metode yang dikemukakan oleh Yun-Petkovic [5]. Metode ini memiliki orde konvergensi kuadratik, dengan bentuk iterasi

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{2h_n}{f(b_n) - f(a_n)}\right) f(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots , \tag{2}$$

dimana

$$\begin{aligned} a_n &= x_n - h_n, \quad b_n = x_n + h_n, \\ h_n &= x_n - x_{n-1}, \quad \text{untuk} \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

dengan nilai awal

$$x_0 = \frac{a+b}{2} \qquad \text{dan} \qquad h_0 = \frac{b-a}{2}.$$

Pada artikel ini di bagian dua dibahas metode iterasi baru bebas derivatif untuk menemukan solusi persamaan nonlinear yang merupakan review dari artikel Beong In Yun [4], dengan judul *"Solving nonlinear equations by a new derivative free iterative method"*, kemudian dilanjutkan di bagian tiga dengan melakukan uji komputasi terhadap 10 fungsi uji.

2. METODE ITERASI BARU

Misalkan f kontinu pada $[a, b]$ dan x_n adalah akar hampiran untuk α dari persamaan $f(x) = 0$. Misalkan $a_n = x_n - h_n$ dan $b_n = x_n + h_n$ untuk $h_n > 0$. Konstruksi $Q(x_n; x)$ dan $Q(\alpha; x)$ dua interpolasi polinomial kuadrat Lagrange $f(x)$ dititik $x = a_n, x_n, b_n$ dan $x = a_n, \alpha, b_n$, sebagai berikut

$$\begin{aligned} Q(x_n; x) = {} & \frac{(x - x_n)(x - a_n)}{(b_n - x_n)(b_n - a_n)} f(b_n) + \frac{(x - b_n)(x - a_n)}{(x_n - b_n)(x_n - a_n)} f(x_n) \\ & + \frac{(x - x_n)(x - b_n)}{(a_n - x_n)(a_n - b_n)} f(a_n), \end{aligned} \tag{3}$$

dan

$$Q(\alpha; x) = \frac{(x - \alpha)(x - a_n)}{(b_n - \alpha)(b_n - a_n)} f(b_n) + \frac{f(x - \alpha)(x - b_n)}{(a_n - \alpha)(a_n - b_n)} f(a_n). \tag{4}$$

Selanjutnya dengan mengintegralkan persamaan (3) pada $[a_n, b_n]$, setelah disederhanakan diperoleh

$$\begin{aligned} I_n = {} & \frac{f(b_n)}{6(b_n - x_n)(b_n - a_n)} \Big(2b_n^3 - 3a_n b_n^2 - 3x_n b_n^2 - 3x_n b_n^2 + 6a_n b_n x_n + a_n^3 - 3a_n^2 x_n \Big) \\ & + \frac{f(x_n)}{6(x_n - b_n)(x_n - a_n)} \Big(- b_n^3 + 3a_n b_n^2 + a_n^3 - 3a_n^2 b_n \Big) + \frac{f(a_n)}{6(a_n - x_n)(a_n - b_n)} \\ & \Big(- b_n^3 + 3x_n b_n^2 - 2a_n^3 + 3a_n^2 b_n + 3a_n^2 x_n - 6x_n a_n b_n \Big), \end{aligned} \tag{5}$$

kemudian dengan mensubtitusi $a_n = x_n - h_n$ dan $b_n = x_n + h_n$ ke persamaan (5), setelah disederhanakan diperoleh

$$I_n = \frac{b_n - a_n}{6} (f(b_n) + 4f(x_n) + f(a_n)).$$

Selanjutnya dengan mengintegralkan persamaan (4) pada $[a_n, b_n]$ diperoleh

$$\begin{aligned} I_\alpha = {} & \frac{f(b_n)}{6(b_n - \alpha)(b_n - a_n)} \Big((b_n - a_n)^2 (a_n + 2b_n - 3\alpha) \Big) + \frac{f(a_n)}{6(a_n - \alpha)(a_n - b_n)} \\ & \Big((b_n - a_n)(a_n - b_n)(2a_n + b_n - 3\alpha) \Big), \end{aligned} \tag{6}$$

kemudian dengan menyederhanakan persamaan (6) diperoleh

$$I_\alpha = \frac{(b_n - a_n)}{6(b_n - \alpha)(a_n - \alpha)} \Big((\alpha - a_n)(a_n + 2b_n - 3\alpha) f(b_n) - (b_n - \alpha(2a_n + b_n - 3\alpha) f(a_n) \Big). \tag{7}$$

Pada persamaan (7) asumsikan $\alpha = x_{n+1}$ dan misalkan bahwa $I_n = I_\alpha$, setelah disederhanakan diperoleh

$$\begin{aligned}(2f(a_n) + 4f(x_n) + 2f(b_n))x_{n+1}^2 + ((b_n + a_n)(f(a_n) + 4f(x_n) + f(b_n))\\ - (4a_n + 2b_n)f(b_n) + (-4b_n - 2a_n)f(a_n))x_{n+1} + (-b_n a_n(f(a_n)\\ + 4f(x_n) + f(b_n)) + b_n(2a_n + b_n)f(a_n) + a_n(a_n + 2b_n)f(b_n) = 0,\end{aligned} \tag{8}$$

kemudian persamaan (8) dapat disederhanakan menjadi

$$Kx_{n+1}^2 + Lx_{n+1} + M = 0, \tag{9}$$

dengan

$$\begin{aligned}K &= 2(f(a_n) - 2f(x_n) + f(b_n))\\ L &= -4(f(a_n) - 2f(x_n) + f(b_n))\frac{a_n + b_n}{2} + (b_n - a_n)(f(b_n) - f(a_n))\\ M &= -b_n a_n(f(a_n) + 4f(x_n) + f(b_n)) + (2a_n b_n + b_n^2)f(a_n) + (a_n^2 + 2a_n b_n)f(b_n).\end{aligned}$$

Sekarang akan ditemukan akar dari persamaan (9) yaitu x_{n+1}. Jadi, dengan menggunakan rumus persamaan kuadrat [2, h. 13] maka diperoleh akar persamaan (9) yaitu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b_n - a_n}{4(f(a_n) + f(b_n) - 2f(x_n))}(f(b_n) - f(a_n) \pm \sqrt{D_n}), \tag{10}$$

dimana

$$\begin{aligned}x_n &= \frac{a_n + b_n}{2},\\ D_n &= (f(b_n) - f(a_n))^2 - 8f(x_n)(f(a_n) + f(b_n) - 2f(x_n)), && (11)\\ a_n &= x_n - h_n, \quad b_n = x_n + h_n, \qquad n \geq 0, && (12)\\ h_n &= |x_n - x_{n-1}|, \qquad n \geq 1.\end{aligned}$$

Kemudian dengan merasionalkan pembilang pada persamaan (10) diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2(b_n - a_n)f(x_n)}{(f(b_n) - f(a_n) \pm \sqrt{D_n})}, \qquad n \geq 0, \tag{13}$$

dengan nilai awal

$$x_0 = \frac{a + b}{2} \qquad dan \qquad h_0 = \frac{b - a}{2}.$$

Sehingga persamaan (10) ekivalen dengan persamaan (13) yang merupakan metode iterasi baru bebas derivatif untuk menemukan solusi persamaan nonlinear. Untuk persamaan (13) dengan tanda $\pm$ pada bagian penyebut diambil sehingga memberikan nilai terbesar bagi penyebut yaitu jika $D_n > 0$ maka pilih tanda $+$, dan jika $D_n < 0$ pilih tanda $-$.

Teorema 1 (Orde Konvergensi Metode Yun-Petkovic) [5]
Misalkan fungsi f terdiferensialkan dua kali pada interval $[a, b]$ dan misalkan $f'''(x)$ ada pada (a, b). Asumsikan α adalah akar sederhana dari $f(x) = 0$ dengan $f'(x) \neq 0$ pada $[a, b]$. Maka metode iterasi pada persamaan (2) memiliki orde konvergensi kuadratik setelah x_n cukup dekat dengan α.

Bukti: Bukti Teorema 1 ini dapat dilihat pada [5]

Teorema 2 (Orde Konvergensi Metode Iterasi Baru) [4]
Asumsikan bahwa f kontinu dan terdiferensialkan tiga kali dan $f'(x) \neq 0$ dalam lingkungan U_α. Maka metode Iterasai Baru yang diberikan oleh persamaan (10) atau persamaan (13) memiliki orde konvergensi kuadratik setelah x_n cukup dekat dengan α dan $[a_n, b_n] \subset U_\alpha$.

Bukti: Untuk membuktikan Teorema 2 digunakan Teorema 1. Karena $f'(x) \neq 0$ pada $[a_n, b_n]$, dalam persamaan (10) asumsikan bahwa $f(a_n) < f(b_n)$. Oleh karena itu, untuk meminimumkan besarnya pembilang dari persamaan (10), ambil

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b_n - a_n}{4(f(a_n) + f(b_n) - 2f(x_n))}(f(b_n) - f(a_n) - \sqrt{D_n}), \tag{14}$$

dengan $b_n - a_n = 2h_n$. Kemudian dengan menggunakan beda terbagi Newton orde pertama dan beda terbagi Newton orde kedua diperoleh

$$f(b_n) - f(a_n) = 2h_n f[a_n, b_n], \tag{15}$$

dan

$$\begin{aligned} f(a_n) + f(b_n) - 2f(x_n) =& (f(a_n) - f(x_n)) + (f(b_n) - f(x_n)) \\ =& - h_n \frac{f(a_n) - f(x_n)}{a_n - x_n} + h_n \frac{f(b_n) - f(x_n)}{b_n - x_n} \\ =& - h_n f[a_n, x_n] + h_n f[x_n, b_n] \\ =& 2h_n^2 \frac{f[a_n, x_n] - f[b_n, x_n]}{x_n - b_n} \\ f(a_n) + f(b_n) - 2f(x_n) =& 2h_n^2 f[a_n, x_n, b_n]. \end{aligned} \tag{16}$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (15) dan (16) ke persamaan (14) maka diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b_n - a_n}{8h_n^2 f[a_n, x_n, b_n]}(2h_n f[a_n, b_n] - \sqrt{D_n}). \tag{17}$$

Selanjutnya dengan mensubtitusi persamaan (15) dan (16) ke persamaan (11) maka diperoleh

$$\begin{aligned} D_n &= (2h_n f[a_n, b_n])^2 - 8f(x_n)(2h_n^2 f[a_n, x_n, b_n]) \\ &= 4h_n^2 (f[a_n, b_n]^2 - 4f(x_n) f[a_n, x_n, b_n]) \\ D_n &= 4h_n^2 \left(\left(f[a_n, b_n] - 2f(x_n) \frac{f[a_n, x_n, b_n]}{f[a_n, b_n]} \right)^2 - 4f(x_n)^2 \left(\frac{f[a_n, x_n, b_n]}{f[a_n, b_n]} \right)^2 \right). \end{aligned} \tag{18}$$

Karena x_n cukup dekat dengan α maka $f(x_n)^2 \approx 0$. Maka persamaan (18) dapat ditulis menjadi

$$D_n = 4h_n^2\left(f[a_n,b_n] - 2f(x_n)\frac{f[a_n,x_n,b_n]}{f[a_n,b_n]}\right)^2. \tag{19}$$

Selanjutnya asumsikan x_n cukup dekat dengan α maka

$$f[a_n,b_n] > 2f(x_n)\frac{f[a_n,x_n,b_n]}{f[a_n,b_n]},$$

karena dari asumsi $f(a_n) < f(b_n)$ maka $f[a_n,b_n] > 0$. Sehingga akar dari persamaan (19) adalah

$$\sqrt{D_n} = 2h_n\left(f[a_n,b_n] - 2f(x_n)\frac{f[a_n,x_n,b_n]}{f[a_n,b_n]}\right). \tag{20}$$

Kemudian dengan mensubtitusikan persamaan (20) ke persamaan (17) diperoleh

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n - \frac{b_n - a_n}{8h_n^2 f[a_n,x_n,b_n]}\Bigg(2h_n f[a_n,b_n] - 2h_n\Bigg(f[a_n,b_n] \\
&\qquad -2f(x_n)\frac{f[a_n,x_n,b_n]}{f[a_n,b_n]}\Bigg)\Bigg) \\
&= x_n - \frac{b_n - a_n}{2h_n f[a_n,b_n]} f(x_n) \\
x_{n+1} &= x_n - \left(\frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)}\right) f(x_n). \qquad (21)
\end{aligned}$$

Persamaan (21) secara asimtotik sama dengan metode iterasi yang diberikan oleh persamaan (2) yang memiliki orde konvergensi kuadratik, dengan demikian metode iterasi yang diberikan oleh persamaan (13) atau persamaan (10) mempunyai orde konvergensi kuadratik.

3. UJI KOMPUTASI

Pada bagian ini dilakukan uji komputasi yang bertujuan untuk membandingkan banyak iterasi dari metode Newton (MN), metode Muller (MM), metode Yun-Petkovic (MYP) dan metode Iterasi Baru (MIB) dalam menemukan akar dari persamaan nonlinear. Adapun fungsi-fungsi yang digunakan adalah

1. $f_1(x) = 1 - \left(\sin\left(\frac{\pi x}{5}\right) - x\right)^2, \quad 0 \le x \le 5.$
2. $f_2(x) = 1 + (x-2)e^{-x}, \quad -2 \le x \le 2.$
3. $f_3(x) = e^{\sin x} - x - 1, \quad 1 \le x \le 4.$
4. $f_4(x) = 200x^9 + 5x^2 + x + 100, \quad -1 \le x \le 1.$

5. $f_5(x) = -\dfrac{1}{100x^4} + \sqrt{x} + \dfrac{1}{2}, \quad 0 \le x \le 2.$

6. $f_6(x) = \tan^{-1}(300x) - \dfrac{1}{200}, \quad -1 \le x \le 4.$

7. $P_4(x) = 16x^4 - 40x^3 + 5x^2 + 20x + 6, \quad 0 \le x \le 5.$

8. $P_5(x) = (x - 1.64)(x - 1.641)(x - 1.7)(x + 2)^2, \quad -3 \le x \le 3.$

9. $P_6(x) = (x^2 + 9)(x - 3)^4, \quad -1 \le x \le 5.$

10. $P_9(x) = 200x^9 + 5x^2 + x + 100, \quad -1 \le x \le 1.$

Dalam menemukan solusi numerik dari contoh-contoh fungsi nonlinear dan polinomial di atas digunakan program Maple 13, untuk contoh $1 - 6$ menggunakan 600 digits dan toleransi $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-500}$, sedangkan untuk contoh $7 - 10$ menggunakan 60 digits dan toleransi $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-50}$. Tebakan awal yang digunakan dalam setiap metode berbeda-beda, yaitu :

1. Untuk metode Newton, tebakan awalnya adalah
   $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$, yaitu nilai titik tengah dari interval yang diberikan.

2. Untuk metode Muller, tebakan awalnya adalah
   $x_{-2} = a$, yaitu nilai titik kiri dari interval yang diberikan,
   $x_{-1} = \dfrac{a+b}{2}$, yaitu nilai titik tengah dari interval yang diberikan,
   $x_0 = b$, yaitu nilai titik kanan dari interval yang diberikan.

3. Untuk metode Yun-Petkovic dan metode Iterasi Baru, tebakan awalnya adalah
   $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$, yaitu nilai titik tengah dari interval yang diberikan.

Dalam menentukan solusi numerik juga ditentukan kriteria pemberhentian jalannya program komputasi yang sama untuk setiap metode, yaitu

1. Jika nilai mutlak fungsi lebih kecil dari toleransi yang diberikan.

2. Jika jumlah iterasi mencapai maksimum iterasi yang ditetapkan.

Hasil uji komputasi disajikan dalam bentuk tabel berikut.

Tabel 1: Perbandingan Komputasi nilai $|f_i(x)|$ pada MN, MM, MYP dan MIB untuk persamaan $f_i(x) = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

f_i	n	Metode			
		MN	MM	MYP	MIB
f_1	7	$3.45890e-68$	$1.83047e-20$	$1.95012e-43$	$2.92041e-97$
	8	$4.79899e-136$	$2.43998e-37$	$2.09752e-86$	$2.97228e-196$
	9	$9.23786e-272$	$1.46553e-68$	$2.42686e-172$	$2.10415e-390$
	10	$3.42307e-543$	$5.43304e-126$	$3.24868e-344$	$0.00000e+00$
	11	$-$	$1.61259e-231$	$0.00000e+00$	$-$
	12	$-$	$1.06576e-425$	$-$	$-$
	13	$-$	$1.47995e-783$	$-$	$-$
f_2	7	$9.53029e-73$	$6.15755e-16$	$1.76865e-40$	$3.46478e-66$
	8	$3.84683e-145$	$3.74371e-29$	$1.89353e-80$	$6.69913e-133$
	9	$6.26751e-290$	$2.52766e-53$	$2.17093e-160$	$8.85736e-265$
	10	$1.66372e-579$	$6.41746e-98$	$2.85337e-320$	$4.37799e-530$
	11	$-$	$6.68834e-180$	$1.00000e-599$	$-$
	12	$-$	$1.19491e-330$	$-$	$-$
	13	$-$	$0.00000e+00$	$-$	$-$
f_3	6	$2.94159e-32$	$1.12732e-13$	$9.01257e-25$	$4.87264e-27$
	7	$6.35377e-64$	$1.08247e-25$	$4.62728e-49$	$2.52848e-54$
	8	$2.96436e-127$	$1.60972e-46$	$1.22193e-97$	$5.59524e-108$
	9	$6.45255e-254$	$1.83081e-85$	$8.52531e-195$	$3.33403e-216$
	10	$3.05725e-507$	$2.97331e-157$	$4.15049e-389$	$9.72828e-432$
	11	$-$	$8.16703e-289$	$1.00000e-599$	$1.00000e-599$
	12	$-$	$4.14361e-531$	$-$	$-$
f_4	9	$4.15000e+16$	$7.75962e-02$	$5.49283e-26$	$2.39625e-65$
	10	$1.43772e+16$	$5.79126e-05$	$1.85824e-53$	$3.23863e-133$
	11	$4.98084e+15$	$1.47220e-10$	$2.12717e-108$	$2.05527e-267$
	12	$1.72556e+15$	$1.47220e-10$	$2.78725e-218$	$2.38249e-537$
	14	$2.07102e+1$	$1.21481e-74$	$1.00000e-598$	$-$
	16	$2.48565e+13$	$1.24546e-256$	$-$	$-$
	18	$2.98328e+12$	$4.42140e-598$	$-$	$-$
	51	$1.00000e-597$	$-$	$-$	$-$

Tabel 2: Perbandingan Komputasi nilai $|f_i(x)|$ pada MN, MM, MYP dan MIB untuk persamaan $f_i(x) = 0$, $i = 5, 6$.

f_i	n	Metode			
		MN	MM	MYP	MIB
f_5	7	$3.47073e+00$	$1.56268e+00$	$1.65725e+00$	$3.06628e-34$
	8	$3.90872e+00$	$1.48528e+00$	$1.90859e+00$	$8.12800e-68$
	9	$4.16712e+00$	$1.52877e+00$	$1.90475e+00$	$3.38249e-135$
	10	$4.59116e+00$	$1.50626e+00$	$2.10964e+00$	$9.89086e-270$
	11	$4.86622e+00$	$1.45693e+00$	$2.11144e+00$	$5.00885e-539$
	12	$5.28021e+00$	$1.54111e+00$	$2.28657e+00$	$-$
	13	$5.56713e+00$	$1.53711e+00$	$2.29118e+00$	$-$
	N	1000+	1000+	1000+	$-$
f_6	2	$1.56580e+00$	$1.56577e+00$	$1.56358e+00$	$1.56206e+00$
	3	$1.57580e+00$	$1.56579e+00$	$1.57241e+00$	$1.55490e+00$
	4	$1.56580e+00$	$1.56580e+00$	$1.56359e+00$	$1.51557e+00$
	5	$1.57580e+00$	$1.56580e+00$	$1.57238e+00$	$1.54562e+00$
	6	$1.56580e+00$	$1.56580e+00$	$1.56360e+00$	$1.44751e+00$
	7	$1.57580e+00$	$1.56580e+00$	$1.57235e+00$	$1.51437e+00$
	21	$Fail$	$1.56580e+00$	$1.57214e+00$	$1.76971e-527$
	N	$Fail$	Div	1000+	$-$

Dari Tabel 1 dapat dilihat bahwa jumlah iterasi dari MN, MYP dan MIB tidak mengalami perbedaan yang signifikan, hal ini terjadi karena orde konvergensi dari masing-masing metode tersebut sama yaitu memiliki orde konvergensi kuadratik. Sedangkan MM sangat lambat karena memiliki orde konvergensi 1.84 (*superlinear*).

Dari Tabel 2 terlihat bahwa untuk beberapa kasus tertentu seperti contoh $5-6$ MIB lebih unggul dibandingkan dengan MN, MM dan MYP, karena MIB dapat menyelesaikan persamaan nonlinear tersebut sedangkan MN, MM dan MYP gagal dan melebihi maksimum iterasi.

Selain dapat menemukan akar sederhana, persamaan (13) juga dapat menemukan akar kompleks. Untuk menemukan akar kompleks digunakan teknik *implicit deflation* [3]. Misalkan akan dicari akar dari polinomial $P_z(x)$ dengan derajat $z \geq 2$, untuk mencari akar pertama yaitu dengan menerapkan metode Iterasi Baru pada $P_z(x)$ sehingga diperoleh akar x_1. Selanjutnya definisikan

$$F_1(x) = \frac{P_z(x)}{(x - x_1)}, \tag{22}$$

dengan menerapkan kembali metode Iterasi Baru pada persamaaan (22) maka diperoleh akar x_2. Kemudian definisikan fungsi

$$F_2(x) = \frac{P_z(x)}{(x - x_1)(x - x_2)}, \tag{23}$$

dengan menerapkan kembali metode Iterasi Baru pada persamaan (23) maka didapat akar x_3. Selanjutnya jika telah ditemukan akar $x_1, x_2, \cdots, x_{z-1}$ maka akar berikutnya x_z ditemukan dengan fungsi

$$F_{z-1}(x) = \frac{P_z(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{z-1})}, \tag{24}$$

persamaan (24) merupakan bentuk umum teknik *implicit deflation*, teknik *implicit deflation* ini digunakan untuk $z \geq 2$.Komputasi dalam menemukan akar kompleks hanya menggunakan metode Muller dan metode Iterasi Baru.

Tabel 3: Perbandingan Komputasi nilai x_z untuk MM dan MIB dalam menemukan akar kompleks

P_z	z	MM		MIB	
		x_z	N_z	x_z	N_z
P_4	1	1.241677445	14	1.970446079	9
	2	1.970446079	9	1.241677445	8
	3	$-0.356061762 + 0.162758383i$	1	$-0.356061762 - 0.162758383i$	1
	4	$-0.356061762 - 0.162758383i$	1	$-0.356061762 + 0.162758383i$	1
	$\sum N_z$		25		19
P_5	1	1.700000000	19	1.639999999	15
	2	-2.000000000	21	-2.000000000	18
	3	1.641000000	16	-2.000000000	12
	4	1.640000000	1	1.641000000	2
	5	-1.999999999	15	1.700000000	2
	$\sum N_z$		72		49
P_6	1	2.999999999	155	2.999999999	82
	2	3.000000000	134	2.999999999	79
	3	2.999999999	84	2.999999999	53
	4	2.999999999	103	2.999999999	59
	5	$-3.000000000i$	3	$-3.000000000i$	3
	6	$3.000000000i$	3	$3.000000000i$	3
	$\sum N_z$		482		279
P_9	1	$-0.159453391 - 0.907624721i$	14	-0.929309497	9
	2	$0.458045569 + 0.802712118i$	15	$0.458045569 - 0.802712118i$	12
	3	-0.929309497	13	$-0.706910836 + 0.598040970i$	14
	4	$0.872973406 - 0.321033203i$	10	$0.872973407 + 0.321033203i$	10
	5	$0.872973406 + 0.321033202i$	11	$-0.706910836 - 0.598040970i$	10
	6	$-0.706910836 - 0.598040970i$	12	$0.458045569 + 0.802712118i$	9
	7	$-0.159453391 + 0.907624721i$	11	$0.872973406 - 0.321033203i$	8
	8	$0.4580455692 - 0.802712118i$	1	$-0.159453391 - 0.907624721i$	1
	9	$-0.706910836 + 0.598040970i$	1	$-0.159453391 + .907624721i$	1
	$\sum N_z$		88		74

Dari Tabel 3 terlihat bahwa MIB unggul dibandingkan dengan MM dalam menemukan akar kompleks. Hal ini ditunjukkan dari hasil komputasi pada Tabel 3 bahwa total jumlah iterasi MIB lebih sedikit dibandingkan dengan total jumlah iterasi MM.

Berdasarkan uji komputasi, secara umum bahwa metode Newton dan metode Iterasi Baru lebih unggul dibandingkan dengan metode Muller dan metode Yun-Petkovic tetapi untuk beberapa kasus tertentu metode Iterasi Baru lebih unggul dibandingkan metode Newton, karena metode Newton masih memuat bentuk turunan dalam formulanya, sehingga jika terdapat nilai turunan cukup dekat ke nol, metode Newton akan menghasilkan *rounding error* yang besar atau bahkan tidak dapat diterapkan, sedangkan metode Iterasi Baru tidak memerlukan turunan dalam formulanya. Selain itu, dengan tebakan awal yang real metode Iterasi Baru ini dapat menemukan akar-akar persamaan yang *real* maupun kompleks. Dalam menemukan akar kompleks metode Iterasi Baru lebih unggul dibandingkan dengan metode Muller.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Mathews, J. H. 1987. *Numerical Methods for Mathematics Science and Engineering*, 2^{nd} Ed. Prentice Hall Inc., New Jersey.

[2] Spiegel, M. R., Lipschutz, S. & Liu, J. 2009. *Schaum's Mathematical Handbook of Formulas and Tables, 3^{rd} Ed.* McGraw-Hill Companies, Inc., New York.

[3] Tso, T. Y. 1997. The Derivation of Two Parallel Zero-Finding Algorithms of Polynomials. *Journal of Taiwan Normal University: Mathematics, Science & Technology*, **Vol. 42**. h. 1-6.

[4] Yun, B. I. 2011. Solving Nonlinear Equations by a New Derivative Free Iterative Method. *Computational and Applied Mathematics*, **217**. h. 5768-5773.

[5] Yun, B. I. & Petkovic, M. S. 2011. a Quadratically Convergent Iterative Method for Nonlinear Equations *Journal Korean Mathematics. Soc*, **48**, No. 3, h. 487-497.