MODEL MATEMATIKA UNTUK MENGUKUR TINGKAT KEBASAHAN PADA SAAT HUJAN TURUN

Cristina Anjela Tamba[1*], Leli Deswita[2], Supriadi Putra[2]

[1]Mahasiswi Jurusan Matematika
[2]Laboratorium Matematika Terapan, Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*cristinaanjela@yahoo.co.id

ABSTRACT

This article discusses the mathematical models for measuring the degree of wetness caused by rain, which is a review of the Dank Hailman and Bruce Torrents article [Mathematics Magazine, 82: 266-277 (2009)]. Mathematical models are made with three different body shapes, namely a rectangular shape, round shape, and ellipsoidal shape. From each model, the optimum speed can be determined, which minimizes the degree of wetness of the body.

Keywords: *mathematical models, rectangular, spherical, ellipsoidal, total wetness, optimal speed.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas model matematika untuk mengukur tingkat kebasahan yang diakibatkan hujan, yang merupakan review dari artikel Dank Hailman dan Bruce Torrents [Mathematics Magazine, 82: 266-277 (2009)]. Model matematika yang dibuat dengan tiga bentuk tubuh yang berbeda, yaitu bentuk tubuh persegi panjang, bentuk tubuh bulat, dan bentuk tubuh ellipsoidal. Dari masing-masing model dapat ditentukan kecepatan optimal, yang meminimalkan tingkat kebasahan tubuh.

Kata kunci: *model matematika, persegi panjang, bentuk bulat, ellipsoidal, total basah, kecepatan optimal.*

1. PENDAHULUAN

Model matematika dapat ditentukan dari suatu gejala atau fenomena fisis. Salah satu gejala fisis yang dapat dibentuk model matematikanya adalah hujan. Hujan dapat menyebabkan tubuh menjadi basah. Tingkat kebasahan pada tubuh dapat dihitung dengan formulasi model matematika. Tingkat kebasahan atau total basah dilambangkan dengan $T(s)$. Beberapa penulis sebelumnya telah membahas mengenai total basah pada saat hujan turun, diantaranya B. L. Schwartz dan M. A. B.

Deakin [5], J. J. Holden, S. E. Belcher, A. Horvath, dan I. Pytharoulis [3], T. C. Peterson, dan T. W. R. Wallis [4], dan Herb Bailey [1].

Pada artikel ini membahas total basah yang dibuat sesuai dengan bentuk tubuh, yaitu tubuh berbentuk persegi panjang, tubuh berbentuk bulat, dan tubuh berbentuk *ellipsoidal*. Pembahasan dimulai dengan memperkenalkan volume dari proyeksi *ellipsoidal* pada bagian 2, kemudian pada bagian 3 diberikan model matematika untuk mengukur tingkat kebasahan dan pada bagian akhir diberikan perbandingan tingkat kebasahan pada setiap bentuk tubuh.

2. VOLUME DARI POYEKSI *ELLIPSOIDAL*

Berikut ini akan diberikan teorema untuk mencari volume proyeksi *ellipsoidal* [2].

Teorema 1 Misalkan $\varepsilon \subset R^n$ adalah ellipsoid umum yang didefinisikan dengan

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1,$$

dan misalkan vektor $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ termuat dalam ε. Kemudian proyeksi $\pi_v(\varepsilon)$ dari ellipsoid memiliki volume

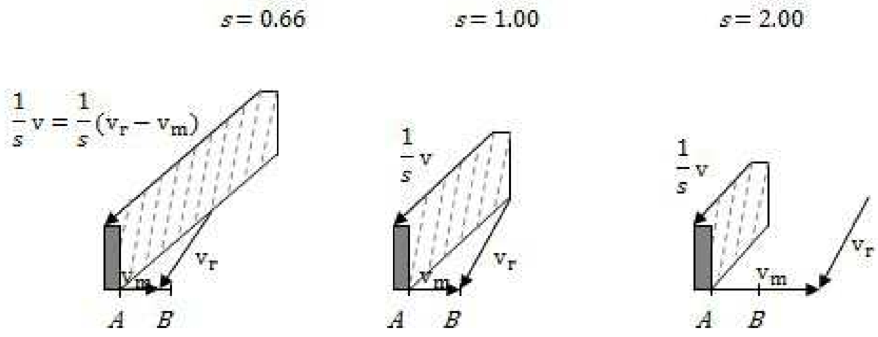
$$\frac{U_{n-1}}{\|v\|} a_1 a_2 \ldots a_n.$$

3. MODEL MATEMATIKA UNTUK MENGUKUR TINGKAT KEBASAHAN

Dalam menentukan total basah pada saat hujan turun maka digunakan beberapa asumsi yaitu bentuk tubuh, selama bergerak tidak menggunakan payung atau pelindung lainnya, kecepatan bergerak s konstan, kecepatan hujan turun l, dipengaruhi oleh angin dari belakang w_t, dan angin dari samping w_c. Beberapa bentuk tubuh yang diasumsikan yaitu tubuh berbentuk persegi panjang, tubuh berbentuk bulat, dan tubuh berbentuk *ellipsoidal*.

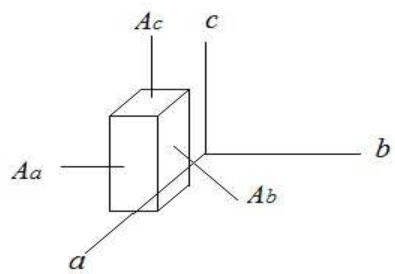
Model persegi panjang

Formulasi model persegi panjang adalah model matematika untuk mengukur tingkat kebasahan pada saat hujan turun apabila tubuh berbentuk persegi panjang. Misalkan posisi awal tubuh berbentuk persegi panjang adalah A yang bergerak dengan kecepatan s konstan menuju B. Jarak dari A ke B adalah satu satuan. Beberapa hal yang juga mempengaruhi perpindahan adalah dengan adanya v_r yaitu vektor kecepatan hujan dan v_m yaitu vektor kecepatan manusia sehingga diperoleh wilayah hujan. Kecepatan yang digunakan berbeda-beda yaitu $s = 0.66$, $s = 1.00$, dan $s = 2.00$ sehingga wilayah hujan juga berubah sesuai dengan kecepatan yang dapat dilihat seperti gambar di berikut ini.



Gambar 1: Gambar tubuh berbentuk persegi panjang dalam dua dimensi

Waktu yang diperlukan selama bergerak adalah $\frac{1}{s}$. Vektor kecepatan yang digunakan adalah v_m dan v_r. Dalam dua dimensi $v_m = (s, 0)$, dan dalam tiga dimensi $v_m = (s, 0, 0)$, dimana $v_r = (w_t, w_c, -l)$. Tinggi daerah hujan adalah $\frac{\|v\|}{s}$. Berikut ini adalah gambar tubuh berbentuk persegi panjang dalam tiga dimensi.



Gambar 2: Gambar tubuh berbentuk persegi panjang dalam tiga dimensi

Berdasarkan Gambar 2 A_a adalah luas permukaan pada sumbu a, yaitu luas permukaan bidang depan atau belakang dengan panjang b dan lebar c sehingga $A_a = bc$. Dengan demikian $A_b = ac$ dan $A_c = ab$. Sehingga total basah untuk tubuh berbentuk persegi panjang dalam tiga dimensi adalah dengan mencari penjumlahan dari banyaknya hujan yang membasahi luas permukaan bidang A_a, A_b, A_c [1]. R_a dinyatakan sebagai banyaknya hujan yang mengenai luas permukaan A_a yaitu $R_a = \frac{1}{s}\|(w_t - s)\|\, A_a$, R_b dinyatakan sebagai banyaknya hujan yang mengenai luas permukaan A_b yaitu $R_b = \frac{1}{s}\|w_c\|\, A_b$ dan R_c dinyatakan sebagai banyaknya hujan yang mengenai luas permukaan A_c yaitu $R_c = \frac{1}{s}\|l\|\, A_c$. Jadi total basah untuk tubuh berbentuk persegi panjang dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{1}{s}\|(w_t - s)\|\, A_a + \frac{1}{s}\|w_c\|\, A_b + \frac{1}{s}\|l\|\, A_c \\ &= \frac{1}{s}\left(\sqrt{A_a^2(w_t - s)^2} + \sqrt{A_b^2 w_c^2} + \sqrt{A_c^2 l^2}\right). \end{aligned}$$

Karena memiliki empat bidang vertikal sehingga model total basah untuk tubuh berbentuk persegi panjang adalah

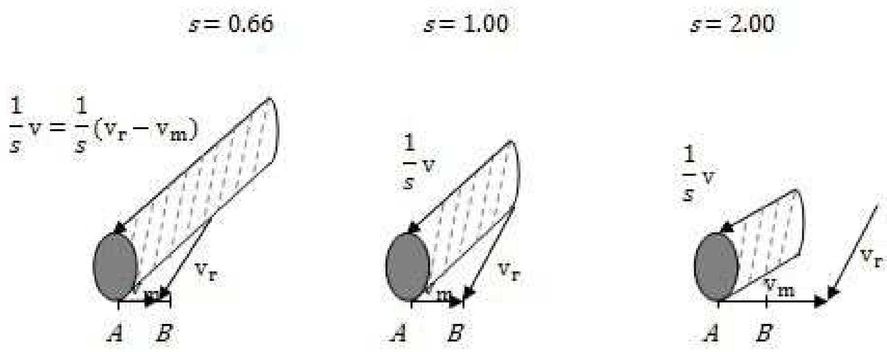
$$T(s) = \frac{4}{s}\left(\sqrt{b^2c^2(w_t - s)^2} + \sqrt{a^2c^2w_c^2} + \sqrt{a^2b^2l^2}\right).$$

Untuk meminimalkan total basah maka tubuh harus bergerak dengan kecepatan optimal. Kecepatan optimal untuk tubuh berbentuk persegi panjang adalah kecepatan angin dari belakang, yaitu $s = w_t$. Kecepatan optimal dapat dianalisa dengan menggunakan titik kritis yang diperlukan untuk uji turunan dari fungsi total basah $T(s)$. Fungsi $T(s)$ tidak dapat ditentukan memiliki minimum absolut atau maksimum absolut.

Total basah maksimum pada tubuh berbentuk persegi panjang ini diperoleh dengan mencari nilai limit dari fungsi $T(s)$ untuk $s \to \infty$ yaitu $4bc$.

Model bulat

Formulasi model bulat adalah model matematika yang digunakan untuk mengukur tingkat kebasahan pada saat hujan turun apabila tubuh berbentuk bulat. Gambar berikut ini sama dengan Gambar 1 tetapi pada gambar ini tubuh berbentuk bulat.



Gambar 3: Gambar tubuh berbentuk bulat dalam dua dimensi

Pada tubuh berbentuk bulat jarak dari titik pusat ke bidang selalu sama yaitu jari-jari yang sama. Total basah pada tubuh berbentuk bulat adalah volume silinder, yaitu luas alas dikali dengan tinggi, tinggi yang digunakan sama pada tubuh berbentuk persegi panjang, yaitu $\frac{\|v\|}{s}$. Untuk mencari luas alas adalah dengan memisalkan tubuh berbentuk bulat memiliki jari-jari r, sehingga luas alas adalah πr^2. Sehingga model total basah untuk tubuh berbentuk bulat adalah

$$T(s) = \frac{\pi r^2}{s}\sqrt{(w_t - s)^2 + w_c^2 + l^2}.$$

Kecepatan optimal untuk tubuh berbentuk bulat adalah

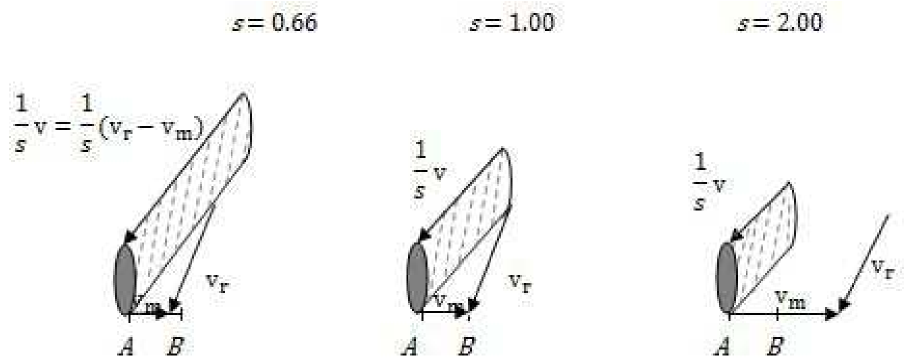
$$
\begin{aligned}
s &= \frac{w_t^2 + w_c^2 + l^2}{w_t} \\
&= \frac{\|v_r\|^2}{w_t}.
\end{aligned}
$$

yang merupakan minimum absolut pada satu titik kritis. Kecepatan optimal s ini lebih besar dari kecepatan angin dari belakang w_t.

Total basah maksimum pada tubuh berbentuk bulat didapat dengan mencari nilai limit dari fungsi $T(s)$ untuk $s \to \infty$ yaitu πr^2.

Model *ellipsoidal*

Formulasi model *ellipsoidal* adalah model matematika untuk mengukur tingkat kebasahan pada saat ujan turun. Gambar berikut ini sama dengan Gambar 1 dan Gambar 3 tetapi pada gambar berikut ini tubuh berbentuk *ellipsoidal.*



Gambar 4: Gambar tubuh berbentuk *ellipsoidal* dalam dua dimensi

Untuk mengukur total basah pada tubuh berbentuk *ellipsoidal* sama dengan mengukur tingkat kebasahan pada tubuh berbentuk bulat yaitu mencari volume silinder.

Luas alas pada tubuh berbentuk *ellipsoidal* merupakan proyeksi $\pi_v(\varepsilon)$ dan tinggi yang digunakan sama dengan tubuh berbentuk bulat dan persegi panjang yaitu $\frac{\|v\|}{s}$. Untuk menentukan luas alas diperoleh dari Teorema 1, karena v tidak termuat pada ε. Untuk itu, pilih $k > 0$ sehingga

$$
k^2 = \frac{(w_t - s)^2}{a^2} + \frac{w_c^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2},
$$

dan $\frac{v}{k}$ termuat pada ε. Berdasarkan Teorema 1, luas dari proyeksi $\pi_v(\varepsilon)$ adalah

$$
\frac{U_2}{\|v/k\|}abc = \frac{k\pi}{\|v\|}abc.
$$

Dengan mengalikan luas dengan tinggi didapatlah volume silinder. Sehingga model total basah untuk tubuh berbentuk *ellipsoidal* adalah

$$\begin{aligned}
T(s) &= \left(\frac{k\pi}{\|v\|}abc\right)\left(\frac{\|v\|}{s}\right) = \frac{\pi}{s}kabc = \frac{\pi}{s}\sqrt{k^2a^2b^2c^2} \\
&= \frac{\pi}{s}\sqrt{\frac{(w_t-s)^2}{a^2} + \frac{w_c^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2}\left(a^2b^2c^2\right)} \\
T(s) &= \frac{\pi}{s}\sqrt{b^2c^2(w_t-s)^2 + a^2c^2w_c^2 + a^2b^2l^2}.
\end{aligned}$$

Fungsi ini akan sama dengan fungsi untuk tubuh berbentuk bulat bila $a = b = c$.

Kecepatan optimal untuk tubuh berbentuk *ellipsoidal* adalah

$$s_{opt} = \frac{b^2c^2w_t^2 + a^2c^2w_c^2 + a^2b^2l^2}{b^2c^2w_t}.$$

yang merupakan minimum absolut pada satu titik kritis. Kecepatan optimal s ini lebih besar dari kecepatan angin dari belakang w_t. Untuk $a \to 0$, kecepatan optimal akan mendekati w_t.

Total basah maksimum pada tubuh berbentuk *ellipsoidal* didapat dengan mencari nilai limit dari fungsi untuk $s \to \infty$ yaitu πbc.

Terdapat tiga kecepatan tubuh untuk bergerak, yaitu : w_t kecepatan angin dari belakang, s_{opt} kecepatan optimal, s_{max} kecepatan maksimal untuk bergerak sedemikian sehingga $0 < w_t < s_{max}$. Bila tubuh bergerak dengan kecepatan w_t atau s_{max} maka untuk menghitung total basah dengan menggunakan rasio, dimana

$$R = \frac{T(s_{max})}{T(s_{opt})}.$$

Rasio akan maksimal ketika angin dari samping $w_c = 0$. Untuk menghitung rasio bentuk tubuh dimodelkan dalam dua dimensi dengan sumbu a dan c yang bergerak dengan kecepatan w_t angin dari belakang, sehingga

$$R = \frac{\sqrt{(a^2l^2 + c^2w_t^2)(a^2l^2 + c^2(s_{max} - w_t)^2)}}{acls_{max}},$$

dimana w_t dan $s_{max} - w_t$ adalah simetris, bahwa R akan mencapai maksimum pada saat

$$w_t = \frac{s_{max}}{2},$$

dimana rasio mencapai nilai maksimum, yaitu

$$R_{max} = \frac{al}{cs_{max}} + \frac{cs_{max}}{4al}.$$

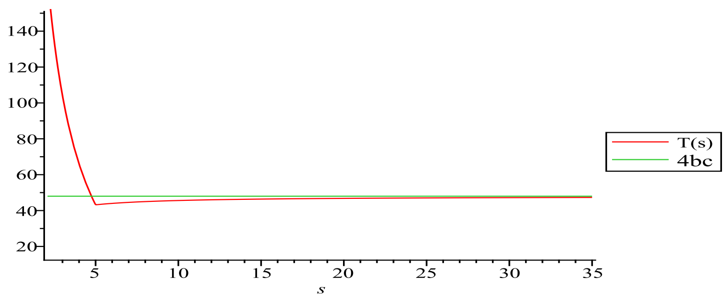
4. PERBANDINGAN NUMERIK

Contoh 1 Misalkan tubuh berbentuk persegipanjang dengan $a = 1$, $b = 2$, dan $c = 6$ dimana kecepatan hujan turun $l = 12$ mph, dengan angin dari belakang $w_t = 5$ mph dan angin dari samping $w_c = 5$ mph.

Penyelesaian:
Kecepatan optimal untuk tubuh berbentuk persegipanjang adalah angin dari belakang sehingga $s = w_t = 5$ mph, dan total basahnya adlah

$$
\begin{aligned}
T(s) &= \frac{4}{s}\left(\sqrt{b^2c^2(w_t - s)^2} + \sqrt{a^2c^2w_c^2} + \sqrt{a^2b^2l^2}\right) \\
&= \frac{4}{5}\left(\sqrt{2^26^2(5-5)^2} + \sqrt{1^26^25^2} + \sqrt{1^22^212^2}\right) \\
T(s) &= 43.2.
\end{aligned}
$$

Jadi berdasarkan hasil perhitungan diatas total basah $T(s)$ minimal dicapai ketika tubuh bergerak dengan kecepatan $s = 5$ mph. Total basah untuk tubuh berbentuk persegi panjang terlihat pada grafik berikut ini.



Gambar 5: Grafik total basah untuk tubuh berbentuk persegi panjang

Berdasarkan grafik di atas bila bergerak dengan kecepatan yang sangat cepat maka total basah akan mendekati nilai limit yaitu $4bc$.

Contoh 2 Misalkan tubuh berbentuk bulat dengan $r = 3$, dimana kecepatan hujan turun $l = 12$ mph, dengan angin dari belakang $w_t = 5$ mph dan angin dari samping $w_c = 5$ mph.

Penyelesaian:
Kecepatan optimal untuk tubuh berbentuk bulat ini adalah

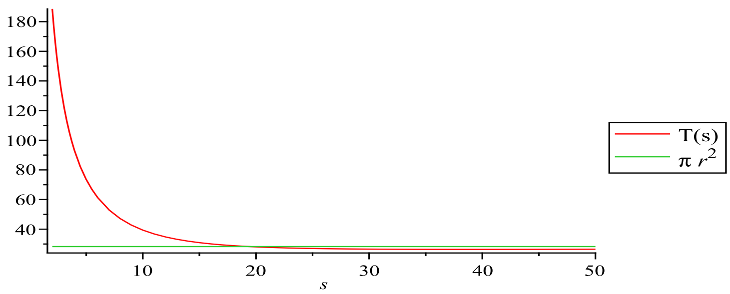
$$
s_{opt} = \frac{w_t^2 + w_c^2 + l^2}{w_t}
$$

$$s_{opt} = \frac{5^2 + 5^2 + 12^2}{5}$$
$$= 38.8.$$

dan total basahnya adalah

$$T(s) = \frac{\pi r^2}{s}\sqrt{(w_t - s)^2 + w_c^2 + l^2}$$
$$= \frac{9\pi}{5}\sqrt{(5 - 38.8)^2 + 5^2 + 12^2}$$
$$T(s) = 26.37.$$

Jadi berdasarkan hasil perhitungan diatas total basah $T(s)$ minimal dicapai ketika tubuh bergerak dengan kecepatan $s = 38.8$ mph. Total basah pada tubuh berbentuk bulat lebih kecil daripada tubuh berbentuk persegi panjang. Total basah tubuh berbentuk bulat terlihat pada grafik berikut ini.



Gambar 6: Grafik total basah untuk tubuh berbentuk bulat

Berdasarkan grafik di atas terlihat bahwa semakin cepat tubuh bergerak maka total basah akan mendekati πr^2.

Contoh 3 Misalkan tubuh berbentuk *ellipsoidal* dengan $a = 1$, $b = 2$, dan $c = 6$ dimana kecepatan hujan turun $l = 12$ mph, dengan angin dari belakang $w_t = 5$ mph dan angin dari samping $w_c = 5$ mph.

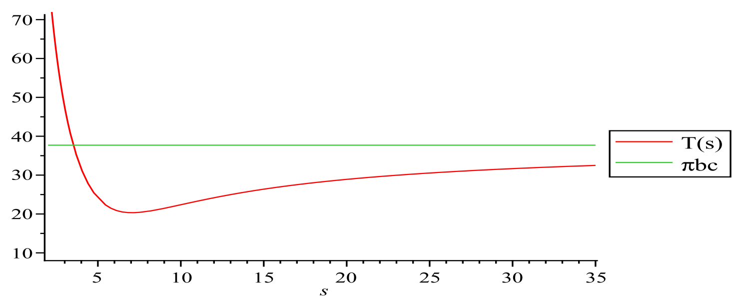
Penyelesaian:
Kecepatan optimal untuk tubuh berbentuk *ellipsoidal* ini adalah

$$s_{opt} = \frac{b^2c^2w_t^2 + a^2c^2w_c^2 + a^2b^2l^2}{b^2c^2w_t}$$
$$= \frac{2^2 6^2 5^2 + 1^2 6^2 5^2 + 1^2 2^2 12^2}{2^2 6^2 5}$$
$$s_{opt} = 7.05,$$

dan total basahnya adalah

$$\begin{aligned}
T(s) &= \frac{\pi}{s}\sqrt{b^2c^2(w_t - s)^2 + a^2c^2w_c^2 + a^2b^2l^2} \\
&= \frac{\pi}{7.05}\sqrt{2^26^2(5 - 7.05)^2 + 1^26^25^2 + 1^22^212^2} \\
T(s) &= 20.31.
\end{aligned}$$

Jadi berdasarkan hasil perhitungan diatas total basah $T(s)$ minimal dicapai ketika tubuh bergerak dengan kecepatan $s = 7.05$ mph. Total basah tubuh berbentuk *ellipsoidal* lebih kecil daripada tubuh berbentuk bulat. Total basah untuk tubuh berbentuk *ellipsoidal* terlihat pada grafik berikut ini.



Gambar 7: Grafik total basah untuk tubuh berbentuk *ellipsoidal*

Berdasarkan grafik di atas terlihat bahwa total basah terendah berada pada saat $s = 7.05$. Bila tubuh bergerak dengan kecepatan yang melebihi kecepatan optimal maka total basah akan semakin meningkat mendekati nilai πbc.

Contoh 4

Seperti pada contoh sebelumnya diketahui $a = 1$, dan $c = 6$, dan kecepatan maksimal bergerak $s_{max} = 9$ mph dimana kecepatan hujan turun $l = 12$ mph.

Penyelesaian:

Rasio maksimumnya adalah

$$\begin{aligned}
R_{max} &= \frac{al}{cs_{max}} + \frac{cs_{max}}{4al} \\
&= \frac{12}{54} + \frac{54}{48} \\
R_{max} &= 1.34.
\end{aligned}$$

Dari Contoh 1, 2, dan 3 terlihat bahwa total basah terkecil adalah pada tubuh berbentuk *ellipsoidal*. Pada Contoh 4 tubuh berbentuk *ellipsoidal* tidak akan basah lebih dari 34%.

UCAPAN TERIMA KASIH

Ungkapan terima kasih penulis sampaikan kepada Ibu Dr. Leli Deswita, M.Si selaku pembimbing I dan Bapak Supriadi Putra, M.Si selaku pembimbing II yang telah banyak memberikan bibingan, arahan, dukungan moral, motivasi, ilmu pengetahuan dan kesabaran dalam membimbing penulis selama menyelesaikan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bailey, H. 2002. On Running in the Rain. *The College Mathematics Journal*, 33: 88-92.

[2] Hailman, D. & Torrents, B. 2009. Keeping Dry: The Mathematics of Running in the Rain. *Mathematics Magazine*, 82: 266-277.

[3] Holden, J. J., Belcher, S. E., Horvath, A. & Pytharoulis, I. 1995. Raindrops Keep Falling on my Head. *Weather*, 50: 367-370.

[4] Peterson, T. C. & Wallis, T. W. R. 1997. Running in the Rain. *Weather*, 52: 93-96.

[5] Schwartz, B. L. & Deakin, M. A. B. 1973. Walking in the Rain, reconsidered. *Mathematics Magazine*, 46: 272-276.