KESTABILAN POPULASI MODEL LOTKA-VOLTERRA TIGA SPESIES DENGAN TITIK KESETIMBANGAN

Ritania Monica[1*], Leli Deswita[2], Rolan Pane[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Laboratorium Matematika Terapan, Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

monicaritania@yahoo.com

ABSTRACT

This article discusses the stability analysis of the population in Lotka-Volterra model of the three species. The analysis was conducted on the stability of the equilibrium point and the coordinate plane through linear analysis. Furthermore, some numerical examples show that the solutions obtained using the parameter values provide an overview of the development of the three species.

Keywords: *Lotka-Volterra model, stability, equilibrium point.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas kestabilan populasi pada model Lotka-Volterra tiga spesies. Pembahasan kestabilan yang dilakukan meliputi kestabilan pada titik kesetimbangan dan bidang koordinat melalui analisis linear. Selanjutnya diberikan beberapa contoh numerik, yang menunjukkan bahwa solusi yang diperoleh menggunakan nilai parameter memberikan gambaran tentang perkembangan ketiga spesies.

Kata kunci: *model Lotka-Volterra, kestabilan, titik kesetimbangan.*

1. PENDAHULUAN

Sejalan dengan berkembangnya ilmu pengetahuan, para ilmuwan semakin tertarik untuk mempelajari dan menemukan persoalan-persoalan yang terjadi dalam kehidupan nyata dalam suatu lingkungan. Berbagai persoalan ilmu pengetahuan dan teknologi dapat digambarkan ke dalam bentuk persamaan matematika. Salah satunya yaitu model Lotka-Volterra tentang mangsa-pemangsa, dimana sistem ini mengenai interaksi dua spesies yang diperkenalkan secara terpisah oleh Alfred J. Lotka dan Vito Volterra pada sekitar tahun 1920. Interaksi yang memberikan pengaruh terhadap setiap spesies adalah rantai makanan. Rantai makanan merupakan proses perpindahan energi makanan dari sumber daya tumbuhan melalui jenjang makan.

Salah satu contoh rantai makanan adalah tikus-ular-burung hantu. Model mangsa-pemangsa yang telah banyak dikenal adalah model Lotka-Volterra klasik yang memuat sistem persamaan diferensial.

Pada artikel dibagian 2 dibahas model Lotka-Volterra dua spesies dan tiga spesies. Model Lotka-Volterra tiga spesies adalah modifikasi dari model Lotka-Volterra dua spesies yang merupakan review dari artikel Erica Chauvet, Joseph E. Paullet, Joseph P. Previte, dan Zac Walls [2], dengan judul *"A Lotka-Volterra Three-Species Food Chain"*, kemudian dilanjutkan di bagian tiga kestabilan populasi pada bidang koordinat dan titik kesetimbangan, dan di bagian keempat melakukan perbandingan numerik.

2. MODEL LOTKA-VOLTERRA

Model Lotka-Volterra adalah model dengan dua spesies yang berinteraksi dengan bersaing untuk persediaan makanan atau sumber alami lainnya. Model dua spesies ini dikenal dengan Model Lotka-Volterra klasik [1, h. 503] yang memuat sistem persamaan diferensial

$$\frac{dx}{dt} = hx - ixy, \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = -jy + kxy, \tag{2}$$

dimana $x(t)$ adalah jumlah populasi mangsa pada waktu t, $y(t)$ adalah jumlah populasi pemangsa pada waktu t, h adalah laju pertumbuhan alami mangsa tanpa adanya pemangsa, i adalah pengaruh predasi terhadap mangsa, j adalah laju kematian alami pemangsa tanpa adanya mangsa, k adalah laju penyebaran pemangsa. Model Lotka-Volterra klasik menggambarkan adanya persaingan individu antar dua spesies untuk memperoleh persediaan makanan yang terbatas, dimana persediaan makanan diperoleh dari lingkungan. Persamaan (1) dan (2) diselesaikan dengan persamaan terpisahkan [4, h. 18] sehingga

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-j + kx)}{x(h - iy)}. \tag{3}$$

Selanjutnya dengan mengintegralkan kedua ruas persamaan (3) diperoleh

$$\begin{aligned}
\int x(h - iy)dy &= \int y(-j + kx)dx, \\
\int \frac{(h - iy)}{y}\, dy &= \int \frac{(-j + kx)}{x}\, dx, \\
h \int \frac{dy}{y} - i \int y\, \frac{dy}{y} &= -j \int \frac{dx}{x} + k \int x\, \frac{dx}{x}, \\
h \ln y - iy + C_1 &= -j \ln x + kx + C_2, \\
h \ln y - iy + j \ln x - kx &= C,
\end{aligned}$$

dimana C adalah konstanta integrasi. Model mangsa-pemangsa yang dibahas adalah tiga spesies, dimana x merupakan mangsa paling bawah dimangsa spesies y pada level kedua. Selanjutnya spesies y dimangsa oleh spesies z pada level paling atas. Model Lotka-Volterra tiga spesies telah dikembangkan dengan memperhatikan berbagai faktor lain dari populasi dan lingkungan. Model Lotka-Volterra tiga spesies diperoleh dengan memodifikasi persamaan (1) dan persamaan (2) dengan menambahkan satu persamaan untuk spesies ketiga dan membuat beberapa asumsi. Asumsi yang digunakan yaitu

1. Model yang digunakan adalah model interaksi tiga spesies yang terdiri dari spesies mangsa, pemangsa pertama, dan pemangsa kedua.
2. Siklus rantai makanan terjadi secara seimbang antar spesies.
3. Interaksi antara mangsa dan pemangsa berlangsung secara alami.
4. Laju kelahiran dan kehidupan mangsa bergantung pada ketersediaan makanan, yaitu mangsanya.

Dari keempat asumsi model Lotka-Volterra tiga spesies diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = hx - ixy, \tag{4}$$
$$\frac{dy}{dt} = -jy + kxy - lyz, \tag{5}$$
$$\frac{dz}{dt} = -mz + nyz, \tag{6}$$

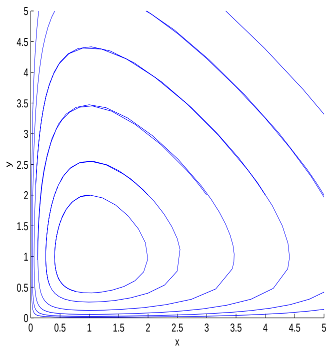
dimana $x(t)$ adalah jumlah populasi spesies x pada level pertama pada waktu t, $y(t)$ adalah jumlah populasi spesies y pada level kedua pada waktu t, $z(t)$ adalah jumlah populasi spesies z pada level kedua pada waktu t, h adalah laju pertumbuhan alami mangsa tanpa adanya pemangsa, i adalah pengaruh predasi terhadap mangsa, j adalah laju kematian alami pemangsa tanpa adanya mangsa, k adalah laju penyebaran pemangsa, l adalah efek predasi terhadap spesies y oleh spesies z, m adalah laju kematian alami pemangsa tanpa adanya mangsa, dan n adalah laju penyebaran pemangsa.

3. KESTABILAN POPULASI PADA BIDANG KOORDINAT DAN TITIK KESETIMBANGAN

Setiap bidang koordinat invarian terhadap sistem persamaan (1) dan persamaan (2). Pada bidang$-xy$, yaitu $z = 0$, model Lotka-Volterra tiga spesies menjadi

$$\frac{dx}{dt} = hx - ixy,$$
$$\frac{dy}{dt} = -jy + kxy,$$

yang orbitnya di bidang$-xy$ diberikan Gambar 1.



Gambar 1: Keluarga orbit tertutup dalam bidang$-xy$

Gambar 1 menunjukkan trayektori pada bidang$-xy$ dengan parameter $h = i = j = k = 1$ yang mempunyai trayektori berbentuk sirkulasi tertutup.

Pada bidang$-xz$, yaitu $y = 0$, model Lotka-Volterra tiga spesies menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= hx,\\ \frac{dy}{dt} &= 0,\\ \frac{dz}{dt} &= -mz.\end{aligned}$$

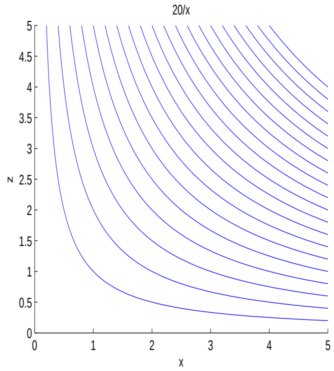
Lintasan bidang$-xz$ diperoleh menggunakan persamaan terpisahkan [4, h. 18]

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-mz}{hx}, \tag{7}$$

dengan mengintegralkan kedua ruas persamaan (7) diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{-1}{m}\int\frac{dz}{z} &= \frac{1}{h}\int\frac{dx}{x},\\ \ln z^{\frac{-1}{m}} &= \ln x^{\frac{1}{h}} + \ln k,\\ \ln z^{\frac{-1}{m}} &= \ln kx^{\frac{1}{h}},\\ z^{\frac{-1}{m}} &= kx^{\frac{1}{h}},\\ z &= k^{-m}\, x^{\frac{-m}{h}},\\ z &= Kx^{\frac{-m}{h}},\end{aligned}$$

yang orbitnya di bidang$-xz$ diberikan Gambar 2.



Gambar 2: Permukaan $z = Kx^{\frac{-m}{h}}$ dengan $h = m = 1$

Gambar 2 menunjukkan laju pertumbuhan spesies x secara eksponensial ketika $t \to \infty$. Laju pertumbuhan spesies x tidak terbatas karena ketiadaan spesies y. Sehingga spesies x bebas dari predasi dan spesies z tidak memiliki sumber makanan.

Pada bidang$-yz$, yaitu bidang $x = 0$, model Lotka-Volterra tiga spesies menjadi

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= 0,\\
\frac{dy}{dt} &= -jy - lyz,\\
\frac{dz}{dt} &= -mz + nyz.
\end{aligned}
$$

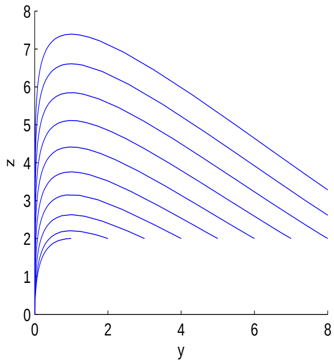
Lintasan bidang$-yz$ diperoleh menggunakan persamaan terpisahkan [4, h. 18]

$$\frac{dz}{dy} = \frac{z(-m + ny)}{y(-j - lz)}, \tag{8}$$

dengan mengintegralkan kedua ruas persamaan (8) diperoleh

$$
\begin{aligned}
\int y(-j - lz)dz &= \int z(-m + ny)dy,\\
\int \frac{(-j - lz)}{z}\, dz &= \int \frac{(-m + ny)}{y}\, dy,\\
-j \int \frac{dz}{z} - l \int z\,\frac{dz}{z} &= -m \int \frac{dy}{y} + n \int y\,\frac{dy}{y},\\
-j \ln z - lz + C_1 &= -m \ln y + ny + C_2,\\
-j \ln z - lz + m \ln y - ny &= C,
\end{aligned}
$$

dimana C merupakan konstanta integrasi. Yang orbitnya di bidang$-yz$ diberikan Gambar 3.



Gambar 3: Keluarga pada bidang$-yz$

Gambar 3 menunjukkan bahwa spesies z dapat bertahan hidup sementara ketika spesies y masih ada, tetapi spesies z akan punah juga ketika tidak adanya sumber makanan lagi. Jadi semua spesies akan punah juga karena tidak adanya spesies x.

Selanjutnya dalam analisa sistem persamaan diferensial digunakan solusi yang tidak berubah terhadap waktu. Keseimbangan populasi terjadi apabila tingkat populasi tidak berubah. Untuk memperoleh titik kesetimbangan (x, y, z) dari persamaan (4), persamaan (5), persamaan (6) dan sebagai berikut

$$\frac{dx}{dt} = x(h - iy) = 0, \tag{9}$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-j + kx - lz) = 0, \tag{10}$$

$$\frac{dz}{dt} = z(-m + ny) = 0. \tag{11}$$

Persamaan (9) diperoleh titik kesetimbangan pada $(0, 0, 0)$, persamaan (10) diperoleh titik kesetimbangan pada $(\frac{j}{k}, \frac{h}{i}, 0)$ dan persamaan (11) diperoleh titik kesetimbangan pada $(0, \frac{m}{n}, -\frac{j}{k})$. Dalam kehidupan jumlah populasi tidak mungkin negatif, sehingga titik kesetimbangan yang digunakan adalah T_1 dan T_2. Kestabilan titik kesetimbangan ditentukan dengan linearisasi pada sistem persamaan (4), persamaan (5), dan persamaan (6). Linearisasi sistem persamaan diferensial pada titik kesetimbangan $T_1 = (0, 0, 0)$ menghasilkan matriks Jacobi sebagai berikut

$$J_1 = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & -m \end{bmatrix},$$

karena

$$J_1 - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & -m \end{bmatrix} - \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$J_1 - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} h-\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -j-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & -m-\lambda_1 \end{bmatrix} = 0.$$

Sehingga persamaan karakteristik [3, h. 278] dari J_1 adalah $det(J_1 - \lambda_1) = (h - \lambda_1)(-j - \lambda_1) - (-m - \lambda_1) = 0$. Jadi nilai eigen untuk J_1 adalah $(\lambda_{11} = h, \lambda_{12} = -j, \lambda_{13} = -m)$. Karena $\lambda_{11} > 0$, $\lambda_{12} < 0$, dan $\lambda_{13} = -m$ maka titik kesetimbangan T_1 mempunyai sifat stabil dan tidak stabil. Untuk memperoleh titik kesetimbangan T_1 yang bersifat stabil asimtot maka ketiga nilai eigennya harus bernilai negatif. Linearisasi sistem persamaan diferensial pada titik kesetimbangan $T_2 = (\frac{j}{k}, \frac{h}{i}, 0)$ menghasilkan matriks Jacobi sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{ij}{k} & 0 \\ \frac{hk}{i} & 0 & -\frac{hl}{i} \\ 0 & 0 & -m+\frac{hn}{i} \end{bmatrix},$$

karena

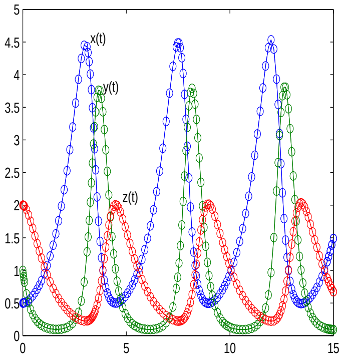
$$J_2 - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{ij}{k} & 0 \\ \frac{hk}{i} & 0 & -\frac{hl}{i} \\ 0 & 0 & -m+\frac{hn}{i} \end{bmatrix} - \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$J_2 - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} \lambda_2 & -\frac{ij}{k} & 0 \\ \frac{hk}{i} & \lambda_2 & -\frac{hl}{i} \\ 0 & 0 & (-m+\frac{hn}{i} - \lambda_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Sehingga persamaan karakteristik [3, h. 278] dari J_2 adalah $det(J_2 - \lambda_2 I) = \lambda_2^3 - \lambda_2^2(-m + \frac{hn}{i}) + hj\lambda_2 - hj(-m + \frac{hn}{i}) = 0$. Jadi nilai-nilai eigen untuk J_2 adalah $(\lambda_{21,22} = \pm\sqrt{hj}, \lambda_{23} = \frac{hn-im}{i})$. Karena $\lambda_{21} < 0, \lambda_{22} > 0$ dan $\lambda_{23} > 0$ maka titik kesetimbangan T_2 mempunyai sifat stabil dan tidak stabil. Untuk memperoleh titik kesetimbangan T_2 yang bersifat stabil asimtot maka ketiga nilai eigennya harus bernilai negatif.

4. PERBANDINGAN NUMERIK

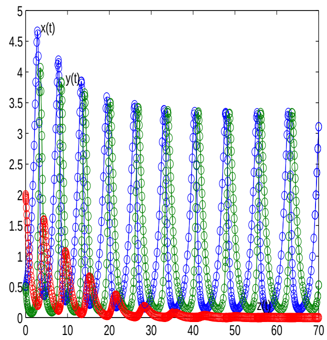
Contoh 1 Kasus $hn = im$. Dengan menggunakan sistem persamaan (4), (5), dan (6) dimana nilai parameter $h = i = j = k = l = m = n = 1$, sehingga diperoleh Gambar 4 yang menyatakan perubahan pertumbuhan populasi ketiga spesies



Gambar 4: Solusi dengan kondisi awal $(x, y, z) = (0.5, 1, 2)$

Gambar 4 menunjukkan puncak pertama adalah populasi mangsa paling bawah $x(t)$, diikuti populasi spesies level kedua $y(t)$, dan populasi predator paling atas $z(t)$ merupakan puncak paling rendah. Semua spesies tetap bertahan dengan jumlah populasi yang berubah-ubah secara periodik sepanjang waktu dengan periode yang sama. Hal ini disebabkan setiap spesies saling bergantung terhadap jumlah populasi spesies sebelumnya yang digunakan sebagai sumber makanan.

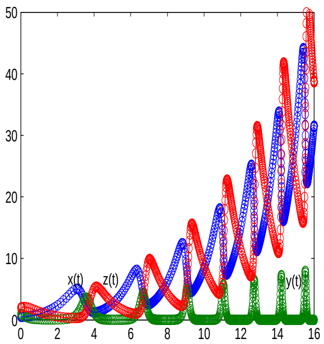
Contoh 2 Kasus $hn < im$. Dengan menggunakan sistem persamaan (4), (5), dan (6) dimana nilai parameter $h = i = j = k = l = m = 1$, dan $n = 0.88$ sehingga diperoleh Gambar 5 yang menyatakan perubahan pertumbuhan populasi ketiga spesies



Gambar 5: Solusi dengan kondisi awal $(x, y, z) = (0.5, 0.5, 2)$

Gambar 5 menunjukkan bahwa spesies x, y, dan z saling berikatan hingga pada periode $t = 30$. Selanjutnya spesies z mengalami fluktuasi turun menuju nol, sedangkan spesies x dan y terus berikatan secara periodik. Secara biologis, spesies z akan mengalami kepunahan saat spesies x dan y menunjukkan perilaku periodik dari model Lotka-Volterra klasik saat ketiadaan spesies z.

Kasus $hn > im$. Dengan menggunakan sistem persamaan (4), (5), dan (6) dimana nilai parameter $h = i = j = k = l = m = 1$, dan $n = 1.6$ sehingga diperoleh Gambar 6 yang menyatakan perubahan pertumbuhan populasi ketiga spesies



Gambar 6: Solusi dengan kondisi awal $(x, y, z) = (0.5, 1, 2)$

Gambar 6 menunjukkan bahwa ketika populasi spesies x dan z menuju $+\infty$. Populasi spesies y mengalami fluktuasi yang lebih besar. Selagi spesies x masih ada maka spesies z dapat bertahan hidup. Sehingga dapat dikatakan spesies y sebagai penyalur sumber makanan.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Boyce, W. E. & Diprima, R. C. 2001. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, Seventh Edition*. John Wiley and Sons, Inc., New york.

[2] Chauvet, E., Paullet, J. E., Previte, J. P. & Walls, Z. 2002. *A Lotka-Volterra Three-Spescies Food Chain*. *Mathematics Magazine*, $75 : 243 - 255$.

[3] Howard, A. 1987. *Aljabar Linear Elementer, Edisi kelima*. Terj. dari *Elementary Linear Algebra, Fifth Edition*, oleh Pantur Silaban & I Nyoman. Erlangga., Jakarta.

[4] Stewart, J. 2011. *Kalkulus, Edisi kelima: Jilid* 2. Terj. dari *Calculus, Fifth Edition*, oleh Sungkono C. Salemba Teknik., Jakarta.