SOLUSI NUMERIK UNTUK PERSAMAAN INTEGRAL KUADRAT NONLINEAR

Eka Parmila Sari[1*], **Agusni**[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Laboratorium Matematika Terapan, Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*ekaparmilasari@yahoo.co.id

ABSTRACT

This article discusses the existence and uniqueness of the solution, which was obtained using Adomian decomposition method, of a nonlinear quadratic integral equation. The discussion was continued by providing an analytical study of the convergence and the absolute error which are obtained by the solution found using Adomian decomposition method. The process of obtaining the solution of a nonlinear quadratic integral equation using Adomian decomposition method then expanded to the modified Adomian decomposition method. Comparison using numerical computation shows that the solution of quadratic nonlinear integral equation obtained using the modified Adomian decomposition method is better than those obtained by Adomian decomposition method.

Keywords: *Adomian decomposition method, modification Adomian decomposition method, nonlinear quadratic integral equation.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas keberadaan dan ketunggalan dari solusi, yang diperoleh menggunakan metode dekomposisi Adomian, dari persamaan integral kuadrat nonlinear. Pembahasan dilanjutkan dengan memberikan kajian analitik tentang kekonvergenan dan *error* mutlak yang dihasilkan solusi yang diperoleh dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian. Proses mendapatkan solusi persamaan integral kuadrat nonlinear menggunakan metode dekomposisi Adomian, kemudian dikembangkan pada modifikasi metode dekomposisi Adomian. Perbandingan melalui komputasi numerik menunjukkan bahwa solusi persamaan integral kuadrat nonlinear yang diperoleh melalui modifikasi metode dekomposisi Adomian lebih baik dari solusi yang diperoleh menggunakan metode dekomposisi Adomian.

Kata kunci: *metode dekomposisi Adomian, modifikasi metode dekomposisi Adomian, persamaan integral kuadrat nonlinear.*

1. PENDAHULUAN

Banyak fenomena yang terjadi di alam dapat dijelaskan dengan suatu model matematika. Model matematika tersebut salah satunya dinyatakan dalam bentuk persamaan integral kuadrat nonlinear, dengan bentuk umum [4]

$$x(t) = p(t) + f(t, x(t)) \int_0^t k(t, s)g(s, x(s))ds. \tag{1}$$

Metode numerik yang sering digunakan untuk menyeleaikan persamaan (1), salah satunya adalah metode dekomposisi Adomian. Berbagai modifikasi telah dikembangkan dari metode dekomposisi Adomian, diantaranya dengan menerapkan teknik implementasi numerik untuk menyelesaikan persamaan (1).

Pada artikel dibahas bagaimana menemukan solusi deret $x(t)$ dalam bentuk deret fungsi yang memenuhi persamaan (1). Pembahasan dimulai dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian pada bagian 2, kemudian dilanjutkan pada bagian 3 dengan menerapkan teknik implementasi numerik untuk metode dekomposisi Adomian yang merupakan *review* dari artikel E. A. A. Ziada [4], dengan judul *"Numerical Solution for Nonlinear Quadratic Integral Equations"* dan pada bagian terakhir diberikan perbandingan simulasi numerik untuk contoh persamaan integral kuadrat nonlinear.

2. METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN

Berikut ini diberikan prosedur metode dekomposisi Adomian untuk penyelesaian persamaan integral kuadrat nonlinear. Berikut akan ditulis bentuk umum persamaan integral kuadrat nonlinear

$$x(t) = p(t) + f(t, x(t)) \int_0^t k(t, s)g(s, x(s))ds, \tag{2}$$

dengan nilai $x(t)$ merupakan fungsi terbatas yang akan ditentukan, $p(t)$ fungsi sebarang yang diketahui dan terdefinisi pada $\mathbb{R}$, $f(t, x(t))$ suatu fungsi yang bentuknya linear atau nonlinear yang bergantung pada variabel t dan fungsi x terhadap variabel t, k merupakan kernel dan $g(s, x(s))$ suatu fungsi yang bentuknya nonlinear dan bergantung pada variabel s dan fungsi x terhadap variabel s.

Diberikan bahwa nilai $|x(t)| < r_0$, $|f(t, 0)| < b_1$, $|g(s, 0)| < b_2$, $k(t, s)$ kontinu pada $t \; \forall \; s \in I = [0, T]$ dan $|k(t, s)| < k$, $T \in \mathbb{R}^+$, $p(t) \in C(I)$, $f(t, x)$ dan $g(s, x)$ fungsi kontinu pada dua variabel t dan s yang memenuhi kondisi Lipschitz dengan konstanta Lipschitz c_1 dan c_2 sebagai berikut

$$\left.\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, y)| &\leq c_1 |x - y|, \\ |g(t, x) - g(t, y)| &\leq c_2 |x - y|. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Metode dekomposisi Adomian terdiri dari penguraian solusi deret dalam bentuk deret fungsi

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{4}$$

dengan x_i adalah perhitungan rekursif dan fungsi nonlinear dari fungsi $f(t, x(t))$ dan $g(s, x(s))$ didefinisikan sebagai

$$\left.\begin{array}{ll} f(t,x(t)) = & \sum_{i=0}^{\infty} A_i(t), \\ g(s,x(s)) = & \sum_{i=0}^{\infty} B_i(s), \end{array}\right\} \tag{5}$$

dengan $A_i(t)$ dan $B_i(s)$ adalah fungsi polinomial Adomian dari fungsi nonlinear f dan g berturut-turut yang bergantung pada $x_0, x_1, ..., x_i$ yang didefinisikan sebagai

$$A_n(t) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[f\left(t, \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_i\right)\right]_{\lambda=0}, n = 0, 1, 2, ...$$

dan

$$B_n(s) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[g\left(s, \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_i\right)\right]_{\lambda=0}, n = 0, 1, 2, ...$$

dengan λ merupakan suatu parameter. Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (4) dan (5) ke persamaan (2), diperoleh

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) = p(t) + \sum_{i=0}^{\infty} A_i(t) \int_0^t k(t,s) \sum_{i=0}^{\infty} B_i(s) ds. \tag{6}$$

Setiap bentuk deret persamaan (6) diberikan oleh relasi sebagai berikut

$$\left.\begin{array}{ll} x_0(t) & = p(t), \\ x_i(t) & = A_{(i-1)}(t) \int_0^t k(t,s) B_{(i-1)}(s) ds, i \geq 1. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Tidak semua bentuk deret persamaan (4) dapat dihitung, oleh karena itu solusinya akan didekati dengan deret terpotong [4]

$$x(t) = \sum_{i=0}^{q} x_i(t).$$

3. ANALISA KEKONVERGENAN

Teorema 1 (Teorema Eksistensi dan Ketunggalan) [4] Diberikan fungsi $F : V \to V$, V merupakan ruang Banach $(C(I), \|.\|)$, ruang dari setiap fungsi kontinu pada I yang bernorm $\|x\| = \max_{t \in I} |x(t)|$.

Misalkan $f(t, x(t))$ dan $g(s, x(s))$ memenuhi kondisi Lipschitz (3). Jika

$$T < \frac{1}{k(2c_1c_2r_0 + c_1b_2 + c_2b_1)}$$

maka persamaan (2) memiliki solusi tunggal $x \in C(I)$, $I \in [0, T]$.

Bukti: Misalkan V merupakan ruang Banach $(C(I), \|.\|)$, $\|x\| = \max_{t\in I} |x(t)|$, dan fungsi $F : V \to V$ didefinisikan oleh

$$Fx = p(t) + f(t, x(t)) \int_0^t k(t,s)g(s,x(s))ds.$$

Misalkan $x, y \in V$, maka

$$\begin{aligned}
Fx - Fy &= f(t,x(t)) \int_0^t k(t,s)g(s,x(s))ds - f(t,y(t)) \int_0^t k(t,s)g(s,y(s))ds \\
&= f(t,x(t)) \int_0^t k(t,s)g(s,x(s))ds - f(t,y(t)) \int_0^t k(t,s)g(s,x(s))ds \\
&\quad + f(t,y(t)) \int_0^t k(t,s)g(s,x(s))ds - f(t,y(t)) \int_0^t k(t,s)g(s,y(s))ds \\
Fx - Fy &= [f(t,x(t)) - f(t,y(t))] \int_0^t k(t,s)g(s,x(s))ds \\
&\quad + f(t,y(t)) \int_0^t k(t,s)[g(s,x(s)) - g(s,y(s))]ds. \qquad (8)
\end{aligned}$$

Jika kedua ruas dinormkan maka persamaan (8) menjadi

$$\begin{aligned}
||Fx - Fy|| \leq &\left\| [f(t,x(t)) - f(t,y(t))] \int_0^t k(t,s)g(s,x(s))ds \right\| \\
&+ \left\| f(t,y(t)) \int_0^t k(t,s)[g(s,x(s)) - g(s,y(s))]ds \right\|.
\end{aligned}$$

Selanjutnya dengan mengingat $\|x\| = \max_{t\in I} |x(t)|$ didapat

$$\begin{aligned}
\|Fx - Fy\| \leq &\max_{t\in I} |f(t,x(t)) - f(t,y(t))| \int_0^t |k(t,s)|\, |g(s,x(s))ds| \\
&+ \max_{t\in I} |f(t,y(t))| \int_0^t |k(t,s)|\, |g(s,x(s)) - g(s,y(s))|\, ds.
\end{aligned}$$

Karena memenuhi kondisi Lipschitz seperti pada persamaan (3), $|k(t,s)| < K$, $|f(t,0) < b_1|$ dan $|g(s,0) < b_2|$ maka setelah disederhanakan diperoleh

$$\begin{aligned}
\|Fx - Fy\| \leq &c_1 K \cdot \max_{t\in I} |x(t) - y(t)|\, [c_2 |x(t)| + b_2] \int_0^t ds \\
&+ c_2 K \cdot \max_{t\in I} |x(t) - y(t)| [c_1 |y(t)| + b_1] \int_0^t ds. \qquad (9)
\end{aligned}$$

Karena $t \in I = [0, T]$ maka $\int_0^t ds = T$, dan $|x(t)| = r_0$, maka ketaksamaan (9) menjadi

$$\begin{aligned}
\|Fx - Fy\| &\leq c_1 K ||x - y|| [c_2 r_0 + b_2] T + c_2 K ||x - y|| [c_1 r_0 + b_1] T \\
&\leq [c_1 c_2 r_0 + c_1 b_2] KT \|x - y\| + [c_1 c_2 r_0 + c_2 b_1] KT \|x - y\| \\
&\leq (2c_1 c_2 r_0 + c_1 b_2 + c_2 b_1) KT \|x - y\| \\
\|Fx - Fy\| &\leq \alpha \|x - y\|.
\end{aligned}$$

Dari uraian di atas terdapat konstanta $\alpha = (2c_1c_2r_0 + c_1b_2 + c_2b_1)KT$, dan menurut [2, h. 88] F dikatakan kontraktif dengan $0 < \alpha < 1$ dan diperoleh juga bahwa $T < \frac{1}{K(2c_1c_2r_0+c_1b_2+c_2b_1)}$ maka persamaan (2) memiliki solusi tunggal $x \in C(I)$. ■

Teorema 2 (Kekonvergenan Metode Dekomposisi Adomian) [4]
Misalkan solusi dari persamaan integral kuadrat pada persamaan (2) ada. Jika $|x_1(t)| < l$, l merupakan konstanta bernilai positif, maka solusi deret dari persamaan integral kuadrat pada persamaan (2) menggunakan metode dekomposisi Adomian adalah konvergen.

Bukti: Definisikan suatu barisan $\{S_p\}$, $S_p = \sum_{i=0}^{p} x_i(t)$ merupakan barisan penjumlahan parsial dari solusi deret $\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t)$. Misalkan S_p dan S_q merupakan dua penjumlahan parsial dengan $p > q$. Sekarang, akan dibuktikan bahwa $\{S_p\}$ merupakan barisan Cauchy di dalam ruang Banach V.

$$S_p - S_q = \sum_{i=0}^{p} x_i(t) - \sum_{i=0}^{q} x_i(t). \tag{10}$$

Berdasarkan persamaan (7) maka persamaan (10) menjadi

$$\begin{aligned}
S_p - S_q &= \sum_{i=0}^{p} A_{(i-1)}(t) \int_0^t k(t,s) \sum_{i=0}^{p} B_{(i-1)}(s)ds \\
&\quad - \sum_{i=0}^{q} A_{(i-1)}(t) \int_0^t k(t,s) \sum_{i=0}^{q} B_{(i-1)}(s)ds \\
S_p - S_q &= \sum_{i=q+1}^{p} A_{(i-1)}(t) \int_0^t k(t,s) \sum_{i=0}^{p} B_{(i-1)}(s)ds \\
&\quad + \sum_{i=0}^{q} A_{(i-1)}(t) \int_0^t k(t,s) \sum_{i=q+1}^{p} B_{(i-1)}(s)ds. \qquad (11)
\end{aligned}$$

Jika kedua ruas dinormkan maka persamaan (11) menjadi

$$\begin{aligned}
||S_p - S_q|| &\le \left|\left| \sum_{i=q+1}^{p} A_{(i-1)}(t) \int_0^t k(t,s) \sum_{i=0}^{p} B_{(i-1)}(s)ds \right|\right| \\
&\quad + \left|\left| \sum_{i=0}^{q} A_{(i-1)}(t) \int_0^t k(t,s) \sum_{i=q+1}^{p} B_{(i-1)}(s)ds \right|\right|.
\end{aligned}$$

Karena $\|x\| = \max_{t\in I} |x(t)|$ maka

$$\begin{aligned}
\|S_p - S_q\| &\le \max_{t\in I} \left| \sum_{i=q}^{p-1} A_{(i)}(t) \right| \int_0^t |k(t,s)| \left| \sum_{i=0}^{p} B_i(s) \right| ds \\
&\quad + \max_{t\in I} \left| \sum_{i=0}^{q} A_{(i-1)}(t) \right| \int_0^t |k(t,s)| \left| \sum_{i=q}^{p-1} B_i(s) \right| ds. \qquad (12)
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan (5) maka ketaksamaan (12) dapat ditulis dalam bentuk

$$
\begin{aligned}
\|S_p - S_q\| \leq \max_{t\in I} |f(t, S_{p-1}) - f(t, S_{q-1})| \int_0^t |k(t,s)| \, |g(t, S_p)| \, ds \\
+ \max_{t\in I} |f(t, S_q)| \int_0^t |k(t,s)| \, |g(t, S_{p-1}) - g(t, S_{q-1})| \, ds. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Ketaksamaan (13) memenuhi kondisi Lipschitz seperti persamaan (3), $|k(t,s)| < K$, $f(t,0) < b_1$, dan $g(s,0) < b_2$ maka

$$
\begin{aligned}
\|S_p - S_q\| \leq c_1 K \cdot \max_{t\in I} |S_{p-1} - S_{q-1}| \, [c_2|x(t)| + b_2] \int_0^t ds \\
+ c_2 K \cdot \max_{t\in I} |S_{p-1} - S_{q-1}| \, [c_1|y(t)| + b_1] \int_0^t ds. \qquad (14)
\end{aligned}
$$

Karena $t \in I = [0,T]$ maka $\int_0^t ds = T$, $|x(t)| < r_0$ sehingga ketaksamaan (14) menjadi

$$
\begin{aligned}
\|S_p - S_q\| &\leq c_1 K \|S_{p-1} - S_{q-1}\| [c_2 r_0 + b_2] T + c_2 K \|S_{p-1} - S_{q-1}\| [c_1 r_0 + b_1] T \\
&\leq [c_1 c_2 r_0 + c_1 b_2] KT \|S_{p-1} - S_{q-1}\| + [c_1 c_2 r_0 + c_2 b_1] KT \|S_{p-1} - S_{q-1}\| \\
&\leq (2 c_1 c_2 r_0 + c_1 b_2 + c_2 b_1) KT \|S_{p-1} - S_{q-1}\| \\
\|S_p - S_q\| &\leq \alpha \|S_{p-1} - S_{q-1}\| .
\end{aligned}
$$

Misalkan $p = q + 1$, maka

$$\|S_{q+1} - S_q\| \leq \alpha \|S_q - S_{q-1}\| \leq \alpha^2 \|S_{q-1} - S_{q-2}\| \leq \cdots \leq \alpha^q \|S_1 - S_0\| .$$

Dengan menggunakan sifat norm [1, h. 8] diperoleh

$$
\begin{aligned}
\|S_p - S_q\| &\leq \|S_{q+1} - S_q\| + \|S_{q+2} - S_{q+1}\| + \cdots + \|S_p - S_{p-1}\| \\
\|S_p - S_q\| &\leq [\alpha^q + \alpha^{q+1} + \cdots + \alpha^{p-1}] \|S_1 - S_0\| . \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Kemudian kalikan kedua ruas dari ketaksamaan (15) dengan α maka diperoleh

$$\alpha \|S_p - S_q\| \leq [\alpha^{q+1} + \alpha^{q+2} + \cdots + \alpha^p] \|S_1 - S_0\| . \qquad (16)$$

Selanjutnya dengan mengurangi ketaksamaan (15) dan (16) didapat

$$\|S_p - S_q\| \leq \left[\frac{\alpha^q - \alpha^p}{1 - \alpha}\right] \|S_1 - S_0\| .$$

Misalkan bahwa $\|S_1 - S_0\| = \|x_1(t)\|$, maka diperoleh

$$\|S_p - S_q\| \leq \alpha^q \left[\frac{1 - \alpha^{p-q}}{1 - \alpha}\right] \|x_1(t)\| , \qquad (17)$$

dengan $0 < \alpha < 1$ dan $p > q$ maka $(1 - \alpha^{p-q}) \leq 1$, dan ketaksamaan (17) dapat ditulis dengan

$$\|S_p - S_q\| \leq \left[\frac{\alpha^q}{1-\alpha} - \frac{\alpha^p}{1-\alpha}\right] \|x_1(t)\|. \tag{18}$$

Kemudian hitung nilai limit dari ketaksamaan (18), dengan $p \to \infty$ diperoleh

$$\|S_p - S_q\| \leq \frac{\alpha^q}{1-\alpha} \|x_1(t)\|. \tag{19}$$

Karena $||x|| = \max_{t \in I} |x(t)|$ maka ketaksamaan (19) menjadi

$$\|S_p - S_q\| \leq \frac{\alpha^q}{1-\alpha} \max_{t \in I} |x_1(t)|.$$

Jika $|x_1(t)| < l$ dan $q \to \infty$ maka $\|S_p - S_q\| \to 0$. Oleh karena itu, $\{S_p\}$ merupakan barisan Cauchy di dalam ruang Banach V dan deret $\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t)$ adalah konvergen. ■

Teorema 3 (Analisis Eror) [4] Eror maksimum mutlak dari solusi deret persamaan (4) pada persoalan persamaan integral kuadrat nonlinear persamaan (2) diberikan oleh

$$\max_{t \in I} \left| x(t) - \sum_{i=0}^{q} x_i(t) \right| \leq \frac{\alpha^q}{1-\alpha} \max_{t \in I} |x_1(t)|.$$

Bukti: Dari hasil Teorema 2 didapat bahwa

$$\|S_p - S_q\| \leq \frac{\alpha^q}{1-\alpha} \max_{t \in I} |x_1(t)|.$$

Jika $S_p = \sum_{i=0}^{p} x_i(t)$ dengan $p \to \infty$ maka $S_p \to x(t)$. Sehingga

$$\|x(t) - S_q\| \leq \frac{\alpha^q}{1-\alpha} \max_{t \in I} |x_1(t)|.$$

Karena $||x|| = \max_{t \in I} |x(t)|$ maka

$$\max_{t \in I} \left| x(t) - \sum_{i=0}^{q} x_i(t) \right| \leq \frac{\alpha^q}{1-\alpha} \max_{t \in I} |x_1(t)|. \tag{20}$$

Ketaksamaan (20) merupakan eror maksimum mutlak dari solusi deret persamaan (4) pada persoalan persamaan integral kuadarat nonlinear persamaan (2) yang berada pada interval I. ■

4. MODIFIKASI METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN

Pandang suatu persamaan integral kuadrat nonlinear pada persamaan (2), apabila $t = t_i = ih$ maka persamaan (2) menjadi

$$x(t_i) = p(t_i) + f(t_i, x(t_i)) \int_0^{t_i} k(t_i, s) g(s, x(s)) ds. \tag{21}$$

Menurut [3, h. 120] bentuk integral nonlinear dari persamaan (21) diaproksimasi oleh

$$\int_0^{t_i} k(t_i, s) g(s, x(s)) ds \approx h \sum_{j=0}^{i} w_{ij} k(t_i, s_j) g(s_j, x(s_j)), \tag{22}$$

dengan $t = t_i$, $s = s_j$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Sehingga persamaan (22) dapat juga ditulis sebagai berikut

$$x(t_i) = p(t_i) + f(t_i, x(t_i)) h \sum_{j=0}^{i} w_{ij} k(t_i, s_j) g(s_j, x(s_j)),$$

dengan $h = \frac{1}{n}$, $w_{i0} = w_{ii} = \frac{1}{2}$, $w_{ij} = 1$,$j = 1, 2, \ldots, i-1$.

Metode dekomposisi Adomian pada persamaan (7) dapat juga ditulis dengan

$$\left.\begin{aligned} x_0(t) &= p(t), \\ x_{n+1}(t) &= f(t, x_n(t)) \textstyle\int_0^t k(t, s) g(s, x_n(s)) ds, \ n \geq 0. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Kemudian substitusi persamaan (22) pada bentuk integral persamaan (23), maka diperoleh

$$x_{n+1}(t_i) \approx (f(t_i, x_n(t_i))) \left(h \sum_{j=0}^{i} w_{ij} k(t_i, t_j) g(t_j, x_n(t_j)) \right), \tag{24}$$

$$i = 0, 1, \ldots \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Jadi solusi dari teknik implementasi numerik yaitu

$$\left.\begin{aligned} x_0(t_i) &= p(t_i), \\ x_{n+1}(t_i) &\approx (f(t_i, x_n(t_i))) \left(h \textstyle\sum_{j=0}^{i} w_{ij} k(t_i, t_j) g(t_j, x_n(t_j)) \right). \end{aligned}\right\}$$

5. CONTOH NUMERIK

Contoh 1: Tinjau persamaan integral kuadrat nonlinear berikut:

$$x(t) = \left(t - \frac{t^2}{10}(-1 - t + e^t) \right) + \frac{1}{10} x^2(t) \int_0^t (t - s) e^{x(s)} ds, \tag{25}$$

penyelesaian eksak dari persamaan (25) adalah $x(t) = t$.

Berdasarkan struktur Adomian seperti pada persamaan (23), maka persamaan (25) dapat ditulis seperti berikut

$$\left.\begin{aligned} x_0(t) &= \left(t - \tfrac{t^2}{10}(-1 - t + e^t)\right), \\ x_{n+1}(t) &= \tfrac{1}{10}x_n^2(t)\int_0^t (t-s)e^{x_n(s)}ds. \end{aligned}\right\}$$

Selanjutnya lakukan penerapan teknik implementasi numerik seperti pada persamaan (24), sehingga diperoleh solusi sebagai berikut

$$\left.\begin{aligned} x_0(t_i) &= \left(t_i - \tfrac{t_i^2}{10}(-1 - t_i + e^{t_i})\right), \\ x_{n+1}(t_i) &\approx \tfrac{h}{10}x_n^2(t_i)\textstyle\sum_{j=0}^{i} w_{ij}(t_i - t_j)e^{x_n(tj)}, \quad i, n = 0, 1, \ldots, 20. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Persamaan (26) adalah solusi numerik yang memenuhi persamaan (25). Solusi numerik $x(t)$ untuk Contoh 1 yang diperoleh menggunakan modifikasi metode dekomposisi Adomian yaitu dengan penerapan teknik implementasi numerik disajikan pada Tabel 1 dan 2. Dengan mengambil nilai h yang berbeda-beda.

Tabel 1: Solusi Teknik Implementasi Numerik (TIN) untuk Contoh 1

t	TIN		
	$h = 0.05$	$h = 0.005$	$h = 0.0005$
0.1	0.0999999567	0.0999999990	0.0999999995
0.2	0.1999995755	0.1999999227	0.1999999262
0.3	0.2999974313	0.2999986328	0.2999986448
0.4	0.3999861409	0.3999890551	0.3999890843
0.5	0.4999381738	0.4999439784	0.4999440364
0.6	0.5997742176	0.5997843967	0.5997844967
0.7	0.6993028398	0.6993191219	0.6993192848
0.8	0.7981168498	0.7981411025	0.7981413451
0.9	0.8954287383	0.8954627667	0.8954631069
1.0	0.9898255836	0.9898708438	0.9898712964

Eror yang ditimbulkan untuk pemilihan h yang berbeda-beda dapat dilihat pada Tabel 2 berikut.

Tabel 2: Eror Teknik Implementasi Numerik (TIN) untuk Contoh 1

t	$x(t) = t$	Eror Solusi TIN $= \|x(t) - x_{TIN}\|$		
		$h = 0.05$	$h = 0.005$	$h = 0.0005$
0.1	0.1	$4.32715e-008$	$9.63957e-010$	$5.40848e-010$
0.2	0.2	$4.24534e-007$	$7.72865e-008$	$7.38138e-008$
0.3	0.3	$2.56867e-006$	$1.36718e-006$	$1.35516e-006$
0.4	0.4	$1.38591e-005$	$1.09449e-005$	$1.09157e-005$
0.5	0.5	$6.18262e-005$	$5.60216e-005$	$5.59636e-005$
0.6	0.6	$2.25782e-004$	$2.16050e-004$	$2.15503e-004$
0.7	0.7	$6.97160e-004$	$6.80878e-004$	$6.80715e-004$
0.8	0.8	$1.88315e-003$	$1.85890e-003$	$1.85866e-003$
0.9	0.9	$4.57126e-003$	$4.53723e-003$	$4.53689e-003$
1.0	1.0	$1.01744e-002$	$1.01292e-002$	$1.01287e-002$

Tabel 2 menunjukkan bahwa semakin kecil h, penyelesaian dengan teknik implementasi numerik akan semakin mendekati penyelesaian eksak, dengan eror yang semakin kecil.

Tabel 3: Selisih Solusi Metode Dekomposisi Adomian (MDA) dan Teknik Implementasi Numerik (TIN) untuk Contoh 1

t	$x(t) = t$	MDA		TIN	
		x_{MDA}	$\|x(t) - x_{MDA}\|$	x_{TIN}	$\|x_{MDA} - x_{TIN}\|$
0.1	0.1	0.0999999995	$4.27349e-008$	0.0999999567	$4.27349e-008$
0.2	0.2	0.1999999262	$7.37862e-008$	0.1999995755	$3.50740e-007$
0.3	0.3	0.2999986448	$1.35521e-006$	0.2999974313	$1.21273e-006$
0.4	0.4	0.3999890878	$1.09123e-005$	0.3999861409	$2.92659e-006$
0.5	0.5	0.4999441421	$5.58579e-005$	0.4999381739	$5.69545e-006$
0.6	0.6	0.5997857315	$2.14269e-004$	0.5997742176	$1.15209e-005$
0.7	0.7	0.6993282755	$6.71725e-004$	0.6993028398	$2.55004e-005$
0.8	0.8	0.7981891263	$1.81087e-003$	0.7981168498	$7.27119e-005$
0.9	0.9	0.8956632204	$4.33678e-003$	0.8954287383	$2.36773e-004$
1.0	1.0	0.9905601996	$9.43980e-003$	0.9898255836	$7.44398e-004$

Tabel-tabel di atas menunjukkan bahwa penggunaan teknik implementasi numerik juga bisa digunakan dalam penyelesaian persamaan integral kuadra nonlinear selain dari penggunaan metode dekomposisi Adomian. Jadi, penerapan teknik implementasi numerik pada metode dekomposisi Adomian membuat metode dekomposisi Adomian menjadi lebih baik. Karena penerapan teknik implementasi numerik bisa dibuat seteliti mungkin.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Supriadi Putra, M.Si, yang telah banyak memberikan arahan dan koreksi yang sangat berarti dalam menyelesaikan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Atkinson, K. & W. Han. 2005. *Theoretical Numerical Analysis,* 2^{nd} *Ed.* Spinger Science+Business Media, Inc., New York.

[2] Bartle, R. G. & D. R. Sherbert. 2011. *Introduction to Real Analysis,* 4^{th} *Ed.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

[3] Delves, L. M. & J. L. Mohamed. 1985. *Computational Methods for Integral Equations.* Cambridge University Press, New York.

[4] Ziada, E. A. A. 2013. Numerical Solution for Nonlinear Quadratic Integral Equations. *Journal of Fractional Calculus and Applications.* **7**: 1-11.