MODIFIKASI METODE NEWTON DENGAN KEKONVERGENAN ORDE EMPAT

Yenni May Sovia[1*], Agusni[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*yenimaysovia@yahoo.com

ABSTRACT

This article discusses the modification of Newton's method using a slope-line approximate in a form of quadratic polynomial to solve a nonlinear equation. This iterative method has a convergence of fourth order and for each iteration, it requires three function evaluations, so the efficiency index of the method is 1.587, which is better than that of the Newton's method, which is 1.414. Furthermore, the computational tests show that proposed method is superior to the Newton's method in terms of speed to obtain a root.

Keywords: *Newton's method, efficiency index, order of convergence, nonlinear equation*

ABSTRAK

Artikel ini membahas modifikasi metode Newton dengan menggunakan pendekatan garis singgung berbentuk polinomial kuadratik untuk menyelesaikan persamaan nonlinear. Metode iterasi ini mempunyai kekonvergenan orde empat dan untuk setiap iterasinya memerlukan tiga perhitungan fungsi, sehingga indeks efisiensinya adalah 1.587 yang lebih besar dari metode Newton yang mempunyai indeks efisiensi 1.414. Selanjutnya dari uji komputasi terlihat bahwa metode iterasi yang diajukan ini lebih baik dari metode Newton.

Kata kunci: *metode Newton, indeks efisiensi, orde kekonvergenan, persamaan nonlinear.*

1. PENDAHULUAN

Menemukan akar dari suatu persamaan nonlinear

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

adalah salah satu topik yang dibahas dalam mata kuliah metode numerik. Metode numerik yang populer digunakan untuk menyelesaikan persamaan (1) adalah Metode Newton dengan bentuk iterasi

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad i = 0, 1, 2, \cdots , \tag{2}$$

dengan $f'(x_i) \neq 0$. Metode ini merupakan metode iterasi satu langkah dan memiliki orde kekonvergenan kuadratik apabila nilai tebakan awal x_0 diberikan cukup dekat dengan akarnya [1, h.60], [3, h.277], [4, h.77], dan [6, h.11]. Kelebihan lainnya adalah metode ini hanya memerlukan dua kali evaluasi fungsi pada setiap iterasinya sehingga indeks efisiensinya [6] adalah sebesar 1.414.

Dalam perkembanganya metode Newton banyak mengalami modifikasi yang bertujuan untuk meningkatkan orde kekonvergenan dan mempercepat iterasi dalam menemukan akar, diantaranya adalah artikel yang ditulis Sharma [5] yang berjudul *"Some Modified Newton's Methods with Fourth-Order Convergence"*. Artikel inilah yang di*review* pada tulisan ini.

Adapun struktur penulisan artikel ini adalah di bagian dua dibahas modifikasi metode Newton yang diturunkan berdasarkan taksiran garis singgung polinomial kuadratik, kemudian di bagian tiga dilakukan analisa kekonvergenan metode yang didiskusikan. Selanjutnya dilakukan uji komputasi menggunakan program Maple 13 untuk melihat keunggulan metode yang didiskusikan.

2. MODIFIKASI METODE NEWTON

Untuk mendapatkan modifikasi metode Newton dengan pendekatan garis singgung berbentuk polinomial kuadratik $y = a + bx + cx^2$ diperlukan beberapa asumsi. Perhatikan persamaan kuadrat berikut

$$y = a + bx + cx^2. \tag{3}$$

Nilai a, b, dan c dapat ditentukan dengan menggunakan asumsi

$$y(x_i) = f(x_i), \tag{4}$$
$$y'(x_i) = f'(x_i), \tag{5}$$
$$y(w_i) = f(w_i), \tag{6}$$
$$y(x_{i+1}) = 0, \tag{7}$$

dimana w_i adalah nilai yang diperoleh dari metode Newton

$$w_i = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, i = 0, 1, 2, \cdots .$$

Dengan menggunakan persamaan (4), (5) dan (6), maka diperoleh bentuk persamaan

$$f(x_i) = a + bx_i + cx_i^2 \tag{8}$$
$$f'(x_i) = b + 2cx_i \tag{9}$$
$$f(w_i) = a + bw_i + cw_i^2. \tag{10}$$

Dari persamaan (8), (9) dan (10), maka diperoleh nilai a, b dan c

$$a = f(x_i) - x_i f'(x_i) + cx_i^2, \tag{11}$$

$$b = f'(x_i) - 2cx_i, \tag{12}$$

$$c = \frac{f(w_i) f'(x_i)^2}{f(x_i)^2}. \tag{13}$$

Selanjutnya dengan menggunakan asumsi persamaan (7), maka diperoleh

$$y(x_{i+1}) = a + bx_{i+1} + cx_{i+1}^2 = 0.$$

Nilai iterasi x_{i+1} dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan kuadrat $a + bx_{i+1} + cx_{i+1}^2 = 0$ yaitu

$$x_{i+1} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}; b^2 - 4ac \geq 0. \tag{14}$$

Dengan mensubsitusikan persamaan (11), (12) dan (13) ke persamaan (14), maka diperoleh

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\frac{f(w_i)}{f(x_i)}}}, \tag{15}$$

dengan

$$w_i = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}. \tag{16}$$

Persamaan (15) dan (16) merupakan metode modifikasi pertama Newton (MN1).

Kemudian perhatikan persamaan (15) yang membuat bentuk $\sqrt{1 - 4\frac{f(w_i)}{f(x_i)}}$. Bila bentuk ini ditaksir menggunakan Teorema Taylor diperoleh

$$\sqrt{1 - 4\frac{f(w_i)}{f(x_i)}} \cong 1 - 2\frac{f(w_i)}{f(x_i)} - 2\frac{f(w_i)^2}{f(x_i)^2}.$$

Sehingga persamaan (15) atau metode Modifikasi Pertama Newton dapat ditulis dalam bentuk lain yaitu

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \frac{1}{1 - \frac{f(w_i)}{f(x_i)} - \frac{f(w_i)^2}{f(x_i)^2}}, \tag{17}$$

dengan w_i diberikan pada persamaan (16). Persamaan (17) disebut metode Modifikasi Kedua Newton (MN2).

Terakhir perhatikan kembali persamaan yang berbentuk $\left[1 - \frac{f(w_i)}{f(x_i)} - \frac{f(w_i)^2}{f(x_i)^2}\right]^{-1}$, dimana dengan menggunakan Teorema Taylor dapat diaproksimasikan dengan

$$\left[1 - \frac{f(w_i)}{f(x_i)} - \frac{f(w_i)^2}{f(x_i)^2}\right]^{-1} \cong 1 + \frac{f(w_i)}{f(x_i)} + 2\frac{f(w_i)^2}{f(x_i)^2}.$$

Sehingga persamaan (17) atau metode Modifikasi Kedua Newton dapat ditulis dengan bentuk lain yaitu

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\left[1 + \frac{f(w_i)}{f(x_i)} + 2\frac{f(w_i)^2}{f(x_i)^2}\right], \tag{18}$$

dengan w_i diberikan pada persamaan (16). Persamaan (18) disebut metode Modifikasi Ketiga Newton (MN3).

3. ANALISA KEKONVERGENAN

Teorema 1 Misalkan $\alpha \in I$ akar sederhana dari fungsi $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang terdiferensial secukupnya pada interval terbuka I. Jika x_0 cukup dekat dengan α, maka metode Modifikasi Pertama Newton seperti yang diberikan oleh persamaan (15) dan (16) mempunyai kekonvergenan orde empat, dengan persamaan tingkat kesalahan yaitu

$$e_{i+1} = (-A_2A_3)e_i^4 + O(e_i^5),$$

dimana $e_i = x_i - \alpha$ dan $A_k = \frac{1}{k!}\frac{f^{(k)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $k = 2, 3, 4$.

Bukti.
Misalkan α adalah akar sederhana persamaan $f(x) = 0$ maka $f(\alpha) = 0$. Asumsikan $f'(\alpha) \neq 0$ dan $e_i = x_i - \alpha$. Kemudian dengan mengekspansikan $f(x_i)$ disekitar $x_i = \alpha$

$$\begin{aligned} f(x_i) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_i - \alpha) + \frac{1}{2!}f''(\alpha)(x_i - \alpha)^2 + \frac{1}{3!}f'''(\alpha)(x_i - \alpha)^3 \\ + \frac{1}{4!}f''''(\alpha)(x_i - \alpha)^4 + O((x_i - \alpha)^5). \end{aligned} \tag{19}$$

Karena $f(\alpha) = 0$ dan $e_i = x_i - \alpha$ maka persamaan (19) menjadi

$$\begin{aligned} f(x_i) &= f'(\alpha)\bigg(e_i + \frac{1}{f'(\alpha)2!}f''(\alpha)e_i^2 + \frac{1}{f'(\alpha)2!}f'''(\alpha)e_i^3 \\ &\qquad + \frac{1}{f'(\alpha)4!}f''''(\alpha)e_i^4\bigg) + O(e_i^5) \\ f(x_i) &= f'(\alpha)(e_i + A_2e_i^2 + A_3e_i^3 + A_4e_i^4 + O(e_i^5)). \end{aligned} \tag{20}$$

dengan

$$A_k = \frac{1}{k!}\frac{f^{(k)}(\alpha)}{f'(\alpha)}, k = 2, 3, 4.$$

Selanjutnya dengan mengekspansikan $f'(x_i)$ disekitar x_i, sampai orde empat dan setelah disederhanakan diperoleh

$$f'(x_i) = f'(\alpha)(1 + 2A_2e_i + 3A_3e_i^2 + 4A_4e_i^3) + O(e_i^4). \tag{21}$$

Apabila persamaan (20) dibagi dengan (21), setelah disederhanakan diperoleh

$$\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = \frac{e_i + A_2e_i^2 + A_3e_i^3 + A_4e_i^4 + O(e_i^5)}{(1 + 2A_2e_i + 3A_3e_i^2 + 4A_4e_i^3) + O(e_i^4)}, \tag{22}$$

selanjutnya dengan menggunakan identitas geometri

$$\frac{1}{1+s} = 1 - s - s^2 - s^3 + s^4 - O(s^5), \tag{23}$$

dengan $s = 2A_2e_i + 3A_3e_i^2 + 4A_4e_i^3) + O(e_i^4)$, maka setelah disederhanakan persamaan (22) ditulis menjadi

$$\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = e_i - A_2e_i^2 + (2A_2^2 - 2A_3)e_i^3 + (-4A_2^3 - 3A_4 + 7A_2A_3)e_i^4 + O(e_i^5). \tag{24}$$

Kemudian dengan cara yang sama terhadap $f(w_i)$ dan setelah disederhanakan diperoleh

$$f(w_i) = f'(\alpha)(A_2e_i^2 + (2A_3 - 2A_2^2)e_i^3 + (3A_4 + 5A_2^3 - 7A_2A_3)e_i^4 + O(e_i^5).$$

Untuk menghitung $\frac{f(w_i)}{f'(x_i)}$ dengan menggunakan bantuan deret geometri misalkan $s = A_2e_i + A_3e_i^2 + A_4e_i^3 + O(e_i^5)$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{f(w_i)}{f(x_i)} = {} & A_2e_i + (2A_3 - 3A_2^2)e_i^2 + (8A_2^3 - 10A_2A_3 + 3A_4)e_i^3 \\ & + (-2A_3^2 + 13A_2^2A_3 - 4A_2A_4 - 8A_2^4)e_i^4 + O(e_i^5).\end{aligned} \tag{25}$$

Apabila persamaan (25) ini disubstitusikan keruas kanan persamaan (15) dan setelah disederhanakan diperoleh

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - 4\frac{f(w_i)}{f(x_i)}} = {} & 1 - 2A_2e_i + (4A_2^2 - 4A_3)e_i^2 + (12A_2A_3 - 8A_2^3 - 6A_4)e_i^3 \\ & + (-8A_2^4 - 4A_2A_4 + 14A_2^2A_3 - 4A_3^2)e_i^4 + O(e_i^5).\end{aligned}$$

Atau dalam bentuk lain dapat ditulis sebagai

$$\frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\frac{f(w_i)}{f(x_i)}}} = \frac{1}{1+s},$$

dengan

$$s = -A_2e_i + (2A_2^2 - 2A_3)e_i^2 + (6A_2A_3 - 4A_2^3 - 3A_4)e_i^3$$
$$+(-4A_2^4 - 2A_2A_4 + 7A_2^2A_3 - 2A_3^2)e_i^4 + O(e_i^5).$$

Kembali dengan menggunakan identitas geometri dan setelah disederhanakan diperoleh

$$\frac{2}{1+\sqrt{1-4\dfrac{f(w_i)}{f(x_i)}}} = 1 + A_2e_i + (2A_3 - A_2^2)e_i^2 + (A_2^3 - 2A_2A_3 + 3A_4)e_i^3$$
$$+ (-21A_2^2A_3 + 8A_2A_4 + 11A_2^4 + 6A_3^2)e_i^4 + O(e_i^5). \quad (26)$$

Sehingga dengan menggunakan (24) dan (26), dan setelah disederhanakan diperoleh

$$\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\frac{2}{1+\sqrt{1-4\dfrac{f(w_i)}{f(x_i)}}} = e_i + (A_2A_3)e_i^4 + O(e_i^5). \quad (27)$$

Dengan menggunakan persamaan (15), diperoleh

$$x_{i+1} = x_i - (e_i + (A_2A_3))e_i^4 + O(e_i^5).$$

Karena $x_i = e_i + \alpha$, maka

$$x_{i+1} = \alpha + (-A_2A_3)e_i^4 + O(e_i^5),$$

atau

$$e_{i+1} = (-A_2A_3)e_i^4 + O(e_i^5). \quad (28)$$

Persamaan (28) ini menunjukkan bahwa metode Modifikasi Pertama Newton memiliki kekonvergenan orde empat. ■

Teorema 2 Misalkan $\alpha \in I$ akar sederhana dari fungsi $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang terdiferensial secukupnya pada interval terbuka I. Jika x_0 cukup dekat dengan α, maka metode Modifikasi Kedua Newton seperti yang diberikan oleh persamaan (16) dan (17) mempunyai kekonvergenan orde empat, dengan persamaan tingkat kesalahan yaitu

$$e_{i+1} = (-A_2A_3 + 2A_2^3)e_i^4 + O(e_i^5),$$

dimana $e_i = x_i - \alpha$ dan $A_k = \frac{1}{k!}\frac{f^{(k)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $k = 2, 3, 4$.

Bukti.
Dari persamaan (25) diperoleh

$$\frac{f(w_i)^2}{f(x_i)^2} = A_2^2 e_i^2 + (4A_2A_3 - 6A_2^3)e_i^3 + (6A_2A_4 - 32A_2^2A_3 + 4A_3^2 + 25A_2^4)e_i^4 + O(e_i^5), \quad (29)$$

selanjutnya dengan menggunakan persamaan (15) dan (29), maka

$$1 - \frac{f(w_i)}{f(x_i)} - \frac{f(w_i)^2}{f(x_i)^2} = 1 - A_2e_i + (2A_2^2 - 2A_3)e_i^2 + (-3A_4 - 2A_2^3 + 6A_2A_3)e_i^3 + (19A_2^2A_3 - 2A_2A_4 - 2A_3^2 - 17A_2^4)e_i^4 + O(e_i^5).$$

Sehingga bentuk $\dfrac{1}{1 - \dfrac{f(w_i)}{f(x_i)} - \dfrac{f(w_i)^2}{f(x_i)^2}}$, dapat diubah kebentuk lain yaitu

$$\frac{1}{1 - \dfrac{f(w_i)}{f(x_i)} - \dfrac{f(w_i)^2}{f(x_i)^2}} = \frac{1}{1+s} \quad (30)$$

dengan

$$s = -A_2e_i + (-2A_3 + 2A_2^2)e_i^2 + (-3A_4 + 6A_2A_3 - 2A_2^3)e_i^3 + (19A_2^2A_3 - 2A_2A_4 - 2A_3^2 - 17A_2^4)e_i^4 + O(e_i^5).$$

Selanjutnya dengan menggunakan bantuan deret geometri dan setelah disederhanakan persamaan (30) menjadi

$$\frac{1}{1 - \frac{f(w_i)}{f(x_i)} - \frac{f(w_i)^2}{f(x_i)^2}} = 1 + A_2e_i + (2A_3 - A_2^2)e_i^2 + (3A_4 - 2A_2A_3 - A_2^3)e_i^3 + (-33A_2^2A_3 + 8A_2A_4 + 6A_3^2 + 20A_2^4)e_i^4 + O(e_i^5). \quad (31)$$

Dengan menggunakan persamaan (24) dan (31), diperoleh

$$\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \frac{1}{1 - \frac{f(w_i)}{f(x_i)} - \frac{f(w_i)^2}{f(x_i)^2}} = e_i + (A_2A_3 - 2A_2^3)e_i^4 + O(e_i^5). \quad (32)$$

Sehingga akhirnya dengan menggunakan persamaan (17) dan (32) setelah disederhanakan diperoleh

$$e_{i+1} = (-A_2A_3 + 2A_2^3)e_i^4 + O(e_i^5). \quad (33)$$

Persamaan (33) ini menunjukkan bahwa metode Modifikasi Kedua Newton memiliki kekonvergenan orde empat. ■

Teorema 3 Misalkan $\alpha \in I$ akar sederhana dari fungsi $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang terdiferensial secukupnya pada interval terbuka I. Jika x_0 cukup dekat dengan α, maka metode Modifikasi Ketige Newton seperti yang diberikan oleh persamaan (16) dan (18) mempunyai kekonvergenan orde empat, dengan persamaan tingkat kesalahan yaitu

$$e_{i+1} = (-A_2A_3 + 5A_2^3)e_i^4 + O(e_i^5),$$

dimana $e_i = x_i - \alpha$ dan $A_k = \frac{1}{k!}\frac{f^{(k)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $k = 2, 3, 4$.

Bukti.
Dengan menggunakan persamaan (24) dan (29) diperoleh

$$\begin{aligned} 1 + \frac{f(w_i)}{f(x_i)} + 2\frac{f(w_i)^2}{f(x_i)^2} =& 1 + A_2e_i + (2A_3 - A_2^2)e_i^2 + (-4A_2^3 - 2A_2A_3 + 3A_4)e_i^3 \\ &+ (-51A_2^2A_3 + 8A_2A_4 + 6A_3^2 + 42AA_2^4)e_i^4 + O(e_i^5). \end{aligned}$$

Apabila hasil ini dikalikan dengan persamaan (24) dan setelah disederhanakan diperoleh

$$\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\left(1 + \frac{f(w_i)}{f(x_i)} + 2\frac{f(w_i)^2}{f(x_i)^2}\right) = e_i + (A_2A_3 - 5A_2^3)e_i^4 + O(e_i^5). \tag{34}$$

Dengan menggunakan persamaan(18) dan (34), setelah disederhanakan diperoleh

$$e_{i+1} = (-A_2A_3 + 5A_2^3)e_i^4 + O(e_i^5). \tag{35}$$

Persamaan (35) ini menunjukkan bahwa metode Modifikasi Ketiga Newton memiliki kekonvergenan orde empat. ■
Ketiga modifikasi metode Newton (MN1, MN2, dan MN3) ini memiliki orde kekonvergenan empat dan memerlukan tiga kali evaluasi fungsi pada setiap iterasinya, sehingga indeks efisiensi [6] ketiga modifikasi metode Newton adalah 1.587.

4. UJI KOMPUTASI

Pada bagian ini dilakukan uji komputasi yang bertujuan untuk membandingkan kecepatan dalam menemukan akar pendekatan yang dicari antara metode Newton (MN), metode Modifikasi Pertama Newton (MN1), metode Modifikasi Kedua Newton (MN2) dan metode Modifikasi Ketiga Newton (MN3). Adapun fungsi-fungsi yang digunakan adalah

1. $f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 15$
2. $f_2(x) = \sin(x) - \frac{x}{2}$
3. $f_3(x) = e^{-x} + \cos(x)$
4. $f_4(x) = 10xe^{-x^2} - 1$

5. $f_5(x) = \tan^{-1}(x) - x + 1$

Dalam menentukan solusi numerik dari kelima fungsi di atas diperlukan tebakan awal x_0, untuk mengetahui apakah tebakan awal berpengaruh terhadap keberhasilan dalam menemukan akar pendekatan dan juga berpengaruh terhadap jumlah iterasi sehingga diberikan tebakan awal yang berbeda. Dalam menentukan solusi numerik juga ditentukan kriteria pemberhentian program komputasi yang sama pada setiap metode, yaitu $|x_{i+1} - x_i| < tol$ atau $|f(x_i)| < tol$ dimana tol adalah toleransi sebesar 0.5×10^{-17}. Hasil dari Uji Komputasi untuk kelima fungsi di atas ditunjukkan pada Tabel berikut.

Tabel 1: Perbandingan Hasil Komputasi untuk MN, MN1, MN2, dan MN3

No.fungsi	x_0	Metode	i	x_i	$\lvert f(x_i)\rvert$	$\lvert x_i - x_{i-1}\rvert$
f_1	1.0	MN	6	1.6319808055660635	$5.3865e-30$	$7.7814e-16$
		MN1	3	1.6319808055660635	$2.5557e-44$	$1.5681e-11$
		MN2	3	1.6319808055660635	$1.5660e-19$	$1.5439e-05$
		MN3	4	1.6319808055660635	$3.5343e-37$	$4.6554e-10$
	2.5	MN	6	1.6319808055660635	$8.8879e-34$	$9.9955e-18$
		MN1	3	1.6319808055660635	$1.4509e-41$	$7.6543e-11$
		MN2	3	1.6319808055660635	$1.0748e-30$	$2.4989e-08$
		MN3	3	1.6319808055660635	$2.5699e-24$	$7.6447e-07$
	0.0	MN	*ggl*	*ggl*	*ggl*	*ggl*
		MN1	*ggl*	*ggl*	*ggl*	*ggl*
		MN2	*ggl*	*ggl*	*ggl*	*ggl*
		MN3	*ggl*	*ggl*	*ggl*	*ggl*
f_2	1.5	MN	6	1.8954942670339809	$1.2591e-33$	$5.1547e-17$
		MN1	3	1.8954942670339809	$4.5488e-56$	$3.4871e-14$
		MN2	3	1.8954942670339809	$4.5204e-21$	$1.0676e-05$
		MN3	4	1.8954942670339809	$2.3268e-42$	$4.0994e-11$
	2.5	MN	5	1.8954942670339809	$1.3026e-20$	$1.6580e-10$
		MN1	3	1.8954942670339809	$1.1505e-45$	$1.3906e-11$
		MN2	3	1.8954942670339809	$1.6247e-34$	$4.6482e-09$
		MN3	3	1.8954942670339809	$6.7283e-30$	$5.3457e-08$
	3.5	MN	5	1.8954942670339809	$1.3119e-18$	$1.6639e-09$
		MN1	3	1.8954942670339809	$6.1679e-30$	$1.1899e-07$
		MN2	3	1.8954942670339809	$8.5683e-25$	$1.2526e-06$
		MN3	3	1.8954942670339809	$7.5889e-23$	$3.0979e-06$

f_3	-0.5	MN	5	1.7461395304080124	$1.1776e-30$	$2.5982e-15$
		MN1	3	1.7461395304080124	$4.3813e-43$	$6.8140e-11$
		MN2	3	1.7461395304080124	$1.1773e-42$	$8.0365e-11$
		MN3	3	1.7461395304080124	$2.6753e-42$	$9.0389e-11$
	2.5	MN	5	1.7461395304080124	$1.1069e-23$	$7.9656e-12$
		MN1	3	1.7461395304080124	$1.9824e-37$	$1.7673e-09$
		MN2	3	1.7461395304080124	$8.1679e-26$	$1.3043e-06$
		MN3	3	1.7461395304080124	$3.1872e-18$	$9.4441e-05$
	0.1	MN	5	1.7461395304080124	$2.2877e-21$	$1.1452e-10$
		MN1	3	1.7461395304080124	$3.0853e-33$	$1.9739e-08$
		MN2	3	1.7461395304080124	$3.7173e-31$	$6.0242e-08$
		MN3	3	1.7461395304080124	$3.4872e-28$	$3.0541e-07$
f_4	1.0	MN	5	1.6796306104284499	$2.6003e-21$	$3.1370e-11$
		MN1	3	1.6796306104284499	$4.1957e-34$	$6.8890e-09$
		MN2	3	1.6796306104284499	$2.1074e-27$	$1.4596e-07$
		MN3	3	1.6796306104284499	$3.2827e-25$	$4.0764e-07$
	2.0	MN	6	1.6796306104284499	$1.4718e-27$	$2.3601e-14$
		MN1	3	1.6796306104284499	$1.4050e-43$	$2.9470e-11$
		MN2	4	1.6796306104284499	$2.1547e-56$	$8.2534e-15$
		MN3	4	1.6796306104284499	$3.2201e-27$	$1.2829e-07$
	3.0	MN	–	–	–	–
		MN1	–	–	–	–
		MN2	–	–	–	–
		MN3	–	–	–	–
f_5	1.0	MN	5	2.1322677252728851	$7.0506e-24$	$1.0086e-11$
		MN1	3	2.1322677252728851	$6.3720e-38$	$2.3504e-09$
		MN2	3	2.1322677252728851	$8.8900e-28$	$7.3305e-07$
		MN3	3	2.1322677252728851	$7.3033e-20$	$6.3245e-05$
	3.0	MN	4	2.1322677252728851	$3.4390e-20$	$7.0440e-10$
		MN1	3	2.1322677252728851	$1.8137e-67$	$9.6544e-17$
		MN2	3	2.1322677252728851	$2.9916e-65$	$3.1396e-16$
		MN3	3	2.1322677252728851	$6.7569e-63$	$1.1030e-15$
	0.6	MN	6	2.1322677252728851	$2.0059e-33$	$1.7012e-16$
		MN1	3	2.1322677252728851	$1.0383e-23$	$8.3978e-06$
		MN2	4	2.1322677252728851	$2.8587e-36$	$5.5201e-09$
		MN3	4	2.1322677252728851	$2.0959e-33$	$2.6030e-08$

Pada Tabel 1, kolom pertama merupakan fungsi-fungsi yang akan diuji, kolom kedua merupakan tebakan awal yang dinotasikan x_0, kolom ketiga merupakan metode iterasi yang dibandingkan, kolom keempat merupakan jumlah iterasi dinotasikan dengan i, kolom kelima merupakan akar pendekatan ke-i, kolom keenam merupakan nilai mutlak fungsi, kolom ketujuh merupakan nilai mutlak selisih akar pendekatan yang dihasilkan pada setiap iterasi, ggl menyatakan metode gagal diterapkan untuk semua iterasi dan * menyatakan metode gagal sesudah beberapa iterasi.

Pada Tabel 1 terlihat bahwa untuk semua fungsi berhasil diterapkan semua metode kecuali untuk dua buah nilai tebakan awal tertentu. Misalnya untuk $x_0 = 0.0$ pada f_1 semua metode gagal menemukan akar pendekatan, hal ini disebabkan karena nilai turunan fungsi pada titik ini adalah nol. Karena setiap metode menggunakan nilai turunan fungsi maka semua metode gagal diterapkan. Untuk alasan yang sama juga terjadi pada f_4 dengan $x_0 = 3.0$ semua metode juga gagal dalam menemukan akar pendekatan sesudah beberapa iterasi, karena turunan pertamanya lebih kecil dari toleransi. Hal ini menunjukan bahwa tebakan awal berpengaruh terhadap keberhasilan metode dalam menemukan akar pendekatan yang dicari.

Dari Tabel 1 juga dapat dilihat bahwa secara umum modifikasi metode Newton (MN1, MN2, dan MN3) lebih baik dari MN dilihat dari jumlah iterasi yang diperlukan dalam menemukan akar yang dicari. Apabila dibandingkan lebih jauh antara ketiga modifikasi metode Newton ini, maka MN1 lebih cepat dalam menemukan akar pendekatan yang dicari, meskipun indeks efisiensinya sama yaitu 1.587.

UCAPAN TERIMA KASIH

Ungkapan terima kasih penulis ucapkan kepada Bapak Supriadi Putra, M.Si. Selaku pembimbing I yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan tenaga dalam memberikan bimbingan, arahan, dorongan dan kesabaran dalam membimbing penulis menyelesaikan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Atkinson, K. E. 1993. *Elementary Numerical Analysis, 2^{nd}Ed.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

[2] Bartle, R. G. & Shebert. R. D. 1999. *Introduction to Real Analysis, 3^{rd}Ed.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

[3] Gautschi, W. 2011. *Numerical Analysis, 2^{nd}Ed.* Birkhauser., New York.

[4] Mathews, J. H. 1999. *Numerical Methods for Mathematics Science and Engineering*, 3^{rd}*Ed.* Prentice Hall Inc. New Jersey.

[5] Sharma, J. R., Guha. R. K. & Sharma. R. 2011. Some Modified Newton's Methods with Fourth-Order Convergence. *Advance in Science Research.* **2**(1): 240–247.

[6] Traub, J.F. 1964. *Iterative Methods for the Solution of Equations.* Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.