INTEGRASI NUMERIK TANPA *ERROR* UNTUK FUNGSI-FUNGSI TERTENTU

Irma Silpia[1*], Syamsudhuha[2], Musraini M.[2]

[1]Mahasiswi Jurusan Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*silpiairma@gmail.com

ABSTRACT

This article discusses integration techniques based on the behavior of the integrand of certain functions, which is a review of a part of the article written by Clegg, D.B. and Richmond, A. N. [International of Mathematical Education in Science and Technology. 18: 4, 519-525 (1987)]. For certain functions which satisfy the properties of the symmetry behavior of the function, integral value obtained by this technique is exact despite the methods used are the midpoint method, trapezoidal method, Simpson's method, and Gauss quadrature rules for two points.

Keywords: *Midpoint method, trapezoidal method, Simpson's rule Gaussian quadrature rule.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas teknik integrasi yang didasarkan kepada kelakuan integran fungsi tertentu yang merupakan review sebagian artikel Clegg, D.B. and Richmond, A.N. [International of Mathematical Education in Science and Technology. 18:4, 519-525 (1987)]. Untuk fungsi tertentu yang kelakuan fungsinya memenuhi kesimetrisan, nilai integral yang didapat adalah eksaks walaupun menggunakan metode titik tengah, metode trapesium, metode Simpson, dan aturan kuadratur Gauss untuk dua titik.

Kata kunci: *Metode titik tengah, metode trapesium, aturan Simpson, aturan kuadratur Gauss.*

1. PENDAHULUAN

Menghitung integral tentu

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

dengan fungsi f kontinu pada interval $[a, b]$ dapat dilakukan dengan dua cara yaitu dengan cara analitik dan numerik. Penyelesaian dengan cara analitik menghasilkan hasil eksak, sedangkan dengan cara numerik diperoleh nilai pendekatan untuk integral tentu (1) dengan ketelitian tertentu.

Pada artikel ini akan dibahas integrasi numerik yang hasil pendekatannya sama dengan hasil eksak, sehingga tidak memiliki *error*. Fungsi yang dapat diintegrasikan secara eksak adalah fungsi-fungsi tertentu, yaitu fungsi yang kelakuan fungsinya memenuhi kesimetrisan nilai integral. Tulisan ini adalah merupakan review dari artikel D. B. Clegg and A. N. Richmond [2].

2. METODE INTEGRASI NUMERIK

Banyak metode integrasi numerik yang diperkenalkan dalam perkuliahan analisis numerik yang dapat digunakan untuk menaksir integral tentu (1). Semua metode yang diberikan mempunyai *error* yang harus diperhatikan.

Metode titik tengah untuk menaksir integral (1) untuk satu interval diberikan oleh[5, h. 220]

$$M_1(f) = hf\left(\frac{a+b}{2}\right), \tag{2}$$

dengan $h = (b - a)$, yang *error*nya diberikan oleh

$$E_M = -\frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi). \tag{3}$$

Metode trapesium untuk mengaproksimasi nilai (1) untuk satu interval diperoleh dengan mengganti $f(x)$ dengan polinomial interpolasi linear[1, h. 162]

$$P_1(x) = \frac{(b-x)f(a) + (x-a)f(b)}{(b-a)},$$

yang menginterpolasi $f(x)$ pada a dan b, kemudian diintegralkan pada $[a, b]$, sehingga diperoleh rumus umum aturan trapesium

$$T_1(f) = \frac{(b-a)}{2}[f(a) + f(b)], \tag{4}$$

yang *error*nya diberikan oleh

$$E_T = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi). \tag{5}$$

Metode Simpson untuk mengaproksimasi nilai (1) pada dua interval didapat dengan mengaproksimasi $f(x)$ dengan polinomial interpolasi kuadratik $P_2(x)$

$$P_2(x) = \frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)}f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}f(c) + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}f(b),$$

kemudian diintegralkan pada $[a,b]$ dan disederhanakan sehingga diperoleh formula metode Simpson[1, h. 166]

$$S_2(f) = \frac{(b-a)}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right], \tag{6}$$

dengan *error*nya diberikan oleh

$$E_{S_2} = -\frac{(b-a)^5}{180}f^{(4)}(\xi). \tag{7}$$

Dari *error* yang dipunyai metode titik tengah dan metode trapesium terlihat bahwa metode ini eksak untuk fungsi linear, sedangkan metode Simpson eksak untuk fungsi kubik.

Aturan kuadratur Gauss dua titik untuk menghitung integral

$$I = \int_{-1}^{1} \phi(v)dv, \tag{8}$$

dilakukan dengan mengaproksimasi $\phi(v)$ dengan fungsi linear

$$\phi(v) \approx \alpha_0 + \alpha_1 v,$$

yaitu

$$\int_{-1}^{1} \phi(v)dv = \int_{-1}^{1} \alpha_0 + \alpha_1 v dv, \tag{9}$$

sedemikian hingga jika dihitung integral (9) adalah eksak untuk polinomial berderajat tiga. Cara ini dapat ditempuh dengan memilih garis

$$G_2 = A_0\phi(v_0) + A_1\phi(v_1), \tag{10}$$

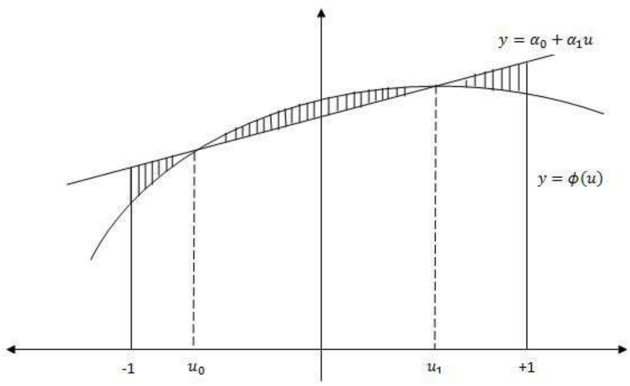
dengan A_0, A_1, v_0, dan v_1 harus dipilih sedemikian luas daerah seperti diilustrasikan Gambar 1 saling meniadakan.

Misalkan polinomial berderajat tiga yang dimaksud adalah

$$\phi(v) = a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3,$$

dapat ditulis juga kedalam bentuk

$$\phi(v) = \alpha_0 + \alpha_1 v + (v - v_0)(v - v_1)(\beta_0 + \beta_1 v).$$



Gambar 1: Tafsiran geometri metode kuadratur Gauss dengan dua titik

Jika α_0 dan α_1 harus memenuhi (9) maka v_0 dan v_1 harus dipilih sehingga

$$\int_{-1}^{1} (v - v_0)(v - v_1)(\beta_0 + \beta_1 v)dv = 0. \tag{11}$$

Karena persamaan (11) harus benar untuk sebarang pilihan β_0 dan β_1, akibatnya harus disyaratkan bahwa

$$\int_{-1}^{1} (v - v_0)(v - v_1)dv = 0, \tag{12}$$

$$\int_{-1}^{1} (v - v_0)(v - v_1)vdv = 0. \tag{13}$$

Setelah melakukan integrasi pada persamaan (12) dan (13) diperoleh berturut-turut

$$\frac{2}{3} + 2v_0v_1 = 0,$$
$$v_0 + v_1 = 0,$$

yang menghasilkan

$$v_1 = -v_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{14}$$

Selanjutnya untuk menentukan A_0 dan A_1 pada persamaan (10), perhatikan bahwa

$$\int_{-1}^{1} \phi(v)dv = \int_{-1}^{1} (\alpha_0 + \alpha_1 v)dv,$$
$$\int_{-1}^{1} \phi(v)dv = 2\alpha_0. \tag{15}$$

Jadi dengan mensubstitusikan persamaan (14) ke persamaan (10) diperoleh

$$G_2 = \alpha_0(A_0 + A_1) - \alpha_1 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(A_0 - A_1) \right). \tag{16}$$

Dengan menyamakan persamaan (16) dengan persamaan (15) diperoleh

$$A_0 = A_1 = 1. \tag{17}$$

Sehingga rumus aturan Gauss untuk dua titik sebagai berikut

$$G_2 = \phi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \phi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right). \tag{18}$$

Untuk menerapkan rumus aturan Gauss untuk dua titik untuk menyelesaikan integral (1) harus terlebih dahulu dilakukan transformasi dari interval $[a, b]$ ke $[-1, 1]$, yang dapat dilakukan dengan menyatakan[3, h.183]

$$v = \frac{2x - (b + a)}{(b - a)},$$

sehingga diperoleh

$$x = \frac{1}{2}(b - a)v + \frac{1}{2}(b + a).$$

dengan demikian

$$\phi(v) = \frac{1}{2}(b - a)f\left[\frac{1}{2}(b - a)v + \frac{1}{2}(b + a)\right].$$

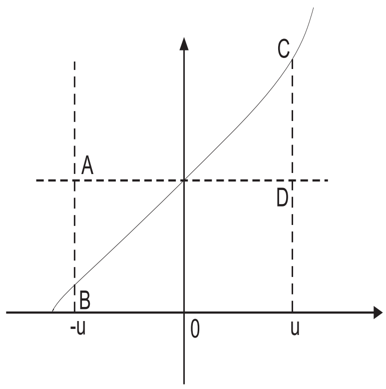
3. INTEGRASI NUMERIK TANPA *ERROR* UNTUK FUNGSI-FUNGSI TERTENTU

Bila dilakukan transformasi variabel pada persamaan (1), dengan $u = x - d$ dengan $d = \frac{1}{2}(a + b)$, dan misalkan $c = \frac{1}{2}(b - a)$, persamaan (1) dapat ditulis menjadi

$$I = \int_{-c}^{c} f(u + d)du.$$

Selanjutnya misalkan $f(u + d) = g(u)$, sehingga

$$I = \int_{-c}^{c} g(u)du. \tag{19}$$



Gambar 2: Grafik fungsi Antisimetris

Misalkan integral (19) dapat diintegrasikan secara eksak dengan menggunakan metode titik tengah, maka diperoleh

$$M_1 = \big(c - (-c)\big) g\left(\frac{c + (-c)}{2}\right) = 2cg(0).$$

Perhatikan bahwa fungsi g memenuhi kesimetrisan seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2, $AB = CD$ dan $g(0) - g(-u) = g(u) - g(0)$ untuk $0 \leq u \leq c$. Sehingga diperoleh syarat yang harus dipenuhi fungsi tertentu agar integral yang diperoleh eksaks adalah

$$g(-u) + g(u) = 2g(0). \tag{20}$$

Selanjutnya jika digunakan metode trapesium, hasil integral pada persamaan (19) adalah

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{(c - (-c))}{2}[g(-c) + g(c)], \\ T_1 &= c[g(-c) + g(c)]. \end{aligned} \tag{21}$$

Dengan memperhatikan persamaan (20), persamaan (21) dapat ditulis menjadi

$$T_1 = 2cg(0).$$

Selanjutnya dengan menggunakan metode Simpson, hasil integral pada persamaan (19) adalah

$$S_2 = \frac{(c - (-c))}{6}\left[g(-c) + 4g\left(\frac{c - c}{2}\right) + g(c)\right] = 2cg(0).$$

Teorema 1 (Formula Kuadratur) Integral I pada persamaan (19) dapat dievaluasi tanpa galat pemotongan dengan menggunakan sebarang formula kuadratur simetris jika g memenuhi kondisi

$$g(-u) + g(u) = 2g(0),$$

untuk semua u pada $[-c, c]$. Selanjutnya hasil untuk I adalah $2cg(0)$.

Bukti: Perhatikan

$$\int_{-c}^{c} g(u)du = \int_{-c}^{0} g(u)du + \int_{0}^{c} g(u)du. \tag{22}$$

Dengan mengganti u dengan $-u$ dalam integral pertama pada ruas kanan persamaan (22) menghasilkan

$$\int_{-c}^{c} g(u)du = \int_{0}^{c} \big(g(-u) + g(u)\big)du. \tag{23}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (20) ke persamaan (23) diperoleh

$$\int_{-c}^{c} g(u)du = \int_{0}^{c} 2g(0)du = 2cg(0) = I.$$

Kemudian dengan menerapkan aturan kuadratur Gauss untuk menaksir I menghasilkan

$$\begin{aligned}
&\phi(v) = \frac{(c-(-c))}{2} g\left[\frac{(c-(-c))}{2}v + \frac{(c+(-c))}{2}\right] \\
&\phi(v) = cg(cv),
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh dengan menggunakan persamaan (20)

$$\begin{aligned}
&G_2 = c\left[g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}c\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}c\right)\right] \\
&G_2 = 2cg(0).
\end{aligned}$$

Jadi G_2 sama dengan I dan teoremanya terbukti. $\square$

Contoh 1 Selesaikan integral berikut dengan menggunakan metode titik tengah, trapesium, Simpson dan aturan kuadratur Gauss.

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 1)dx. \tag{24}$$

Solusi: Penyelesaian dengan integral biasa diperoleh sebagai berikut

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 1)dx = [-\cos x + x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

Kemudian ditunjukkan fungsi integral memenuhi syarat yang terdapat pada persamaan (20)

$$\begin{aligned}
g(-u) + g(u) &= 2g(0) \\
g\left(-\frac{\pi}{2}\right) + g\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2g(0) \\
2 &= 2.
\end{aligned}$$

Kemudian dengan menggunakan metode titik tengah diperoleh

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 1)dx = \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) f\left(\frac{\left(\frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}{2}\right) = \pi.$$

Selanjutnya dengan menggunakan metode trapesium diperoleh

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 1)dx = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}{2}\left[f\left(-\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \pi.$$

Selanjutnya dengan menggunakan metode Simpson diperoleh

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 1)dx &= \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}{6}\left[f\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 4f\left(\frac{\left(\frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= \pi.\end{aligned}$$

Dengan menggunakan aturan kuadratur Gauss untuk dua titik diperoleh

$$\begin{aligned}\phi(v) &= \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}{2} f\left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2} v + \frac{\left(\frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\sin \frac{\pi}{2} v + 1\right).\end{aligned}$$

sehingga

$$G_2 = \frac{\pi}{2}\left(\left(\sin \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1\right) + \left(\sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)\right) = \pi.$$

Terlihat bahwa hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode titik tengah, trapesium, Simpson dan aturan kuadratur Gauss adalah sama dan memenuhi syarat yang telah ditentukan sehingga menghasilkan jawaban yang eksak.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Atkinson, K. E. 1992. *Elementary Numerical Analysis,* 2^{nd} *Ed.* John Wiley & Son, Inc., New York.

[2] Clegg, D. B and Richmond, A. N. 1987. Perfect Numerical Integration. International of Mathematical Education in Science and Technology. 18:4, 519-525

[3] Djojodihardjo, H. 2000. *Metode Numerik.* Penerbit Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.

[4] Stewart, J. 2009. *Kalkulus Edisi Kelima.* Terj. dari *Calculus, Fifth Edition*, oleh Chriswan Sungkono. Penerbit Salemba Teknika, Jakarta.

[5] Wood, A. 1990. *Introduction to Numerical Analysis.* Addison Wesley, England.