

CADANGAN PROSPEKTIF *LAST SURVIVOR* DENGAN ASUMSI GOMPERTZ

Ghufron^{1*}, Hasriati², Bustami²

¹Mahasiswa Program S1 Matematika

²Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Univeritas Riau
Kampus Bina Widya 28293 Indonesia

*ghuffront@gmail.com

ABSTRACT

This article discusses prospective reserve of premium last survivor endowment insurance. Last survivor endowment insurance is a type of life insurance of two persons whose ages are x and y years with a certain condition that premium is paid until the last death of members. The calculation of prospective reserve of last survivor endowment is done by in advance determining the present value of annuity, the single premium, and annual premium where all are dependent on Gompertz assumption.

Keywords: *Gompertz assumption, prospective reserve, the last survivor status*

ABSTRAK

Artikel ini membahas tentang cadangan prospektif asuransi jiwa *last survivor* dwiguna. Asuransi jiwa *last survivor* dwiguna merupakan asuransi jiwa gabungan dari dua orang peserta asuransi yang berusia x dan y tahun dengan ketentuan premi dibayarkan sampai kematian terakhir dari pesertanya. Perhitungan cadangan asuransi jiwa *last survivor* dwiguna diperoleh dengan menentukan terlebih dahulu premi tunggal, premi tahunan dan anuitasnya berdasarkan asumsi Gompertz.

Kata kunci: asumsi Gompertz, cadangan prospektif, status *last survivor*

1. PENDAHULUAN

Asuransi jiwa gabungan adalah suatu perjanjian asuransi yang berhubungan dengan suatu keadaan dimana aturan hidup dan matinya seseorang merupakan gabungan dari dua faktor atau lebih, misalnya suami dan istri, atau orang tua dan anak [4: h.57]. Asuransi jiwa gabungan terbagai menjadi dua, yaitu asuransi jiwa *joint life* dan asuransi jiwa *last survivor*. *Last survivor* merupakan suatu keadaan yang akan tetap berlangsung selama setidaknya ada satu anggota dari sekumpulan orang yang masih hidup dan akan berhenti setelah kematian terakhir dari anggotanya. Berdasarkan masa pertanggungannya asuransi jiwa dibagi menjadi asuransi jiwa seumur hidup, asuransi jiwa berjangka, dan asuransi jiwa dwiguna.

Cadangan merupakan besarnya uang yang ada pada perusahaan asuransi dalam jangka waktu pertanggungan [3: h.123]. Dalam menentukan cadangan diperlukan premi dan anuitas hidup yang dipengaruhi oleh percepatan mortalita, peluang hidup dan peluang meninggal. Peluang hidup dinyatakan dalam bentuk asumsi Gompertz yaitu asumsi yang percepatan mortalitanya dinyatakan sebagai $\mu_x = Bc^x$ dengan B dan c merupakan konstanta Gompertz. Percepatan mortalita merupakan lajunya tingkat angka kematian pada usia tertentu.

Artikel ini membahas tentang cadangan prospektif asuransi jiwa *last survivor* dwiguna yang diperoleh dari [4: h.78]. Asuransi jiwa *last survivor* dwiguna merupakan asuransi jiwa yang masa pertanggungannya ditentukan, dalam maupun saat berakhirnya masa pertanggungan, baik meninggal maupun bertahan hidup, tertanggung tetap mendapatkan uang pertanggungan, dengan ketentuan jika dalam masa pertanggungan tersebut salah satu tertanggung meninggal dunia maka tertanggung yang lain harus tetap membayar premi sampai berakhirnya masa pertanggungan. Dalam artikel ini hanya membatasi jumlah tertanggungnya dua orang saja yang berusia x dan y tahun. Pada [4] perhitungan cadangannya menggunakan fungsi komutasi, sedangkan pada artikel ini perhitungan cadangan prospektif *last survivor* menggunakan asumsi Gompertz yang diperoleh dari [6: h.170] dan [3: h.54].

2. ANUITAS HIDUP STATUS *LAST SURVIVOR*

Anuitas hidup merupakan serangkaian pembayaran yang dilakukan selama peserta asuransi masih hidup [2: h.4]. Apabila pembayaran dilakukan diawal periode disebut anuitas hidup awal. Nilai tunai anuitas hidup awal dipengaruhi oleh peluang hidup dan faktor diskon.

Pada tahun 1825, Benjamin Gompertz menyatakan hukum mortalita dengan percepatan mortalita untuk peserta asuransi yang berusia x tahun dinyatakan dalam [3: h.54] sebagai

$$\mu_x = Bc^x, \quad B > 0 \quad c > 1,$$

dan setelah s tahun kemudian, yaitu ketika usia peserta asuransi $(x + s)$ tahun, maka percepatan mortalitanya dinyatakan sebagai

$$\mu_{x+s} = Bc^{x+s}, \quad (1)$$

dengan B dan c menyatakan konstanta Gompertz. Besarnya konstanta Gompertz dapat dicari menggunakan Definisi 1.

Definisi 1 [6: h.170] $G(x|\mu, \sigma)$ dengan rata-rata μ dan deviasi standar σ dinyatakan sebagai

$$G(x|\mu, \sigma) = W\left(\frac{x - a}{b}\right),$$

dengan $W(x) = 1 - e^{-e^x}$ dan konstanta a dan b memenuhi

$$\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{6}}b \text{ dan } \mu = a + b\gamma, \quad (2)$$

$G(x|\mu, \sigma)$ dinamakan distribusi Gompertz karena

$$G(x|\mu, \sigma) = 1 - g^{e^x},$$

dengan

$$g = e^{-e^{-\frac{a}{b}}} \text{ dan } c = e^{\frac{1}{b}}. \quad (3)$$

Persamaan (3) merupakan persamaan yang menyatakan asumsi Gompertz dan digunakan dalam menentukan peluang hidup. Hubungan antara peluang hidup dan percepatan mortalita adalah sebagai berikut:

$${}_tP_x = e^{-\int_0^t \mu(x+s)ds}. \quad (4)$$

Berdasarkan persamaan (1) dan (4), maka peluang orang yang berusia x tahun akan hidup hingga t tahun kemudian dengan asumsi Gompertz dinyatakan sebagai berikut:

$${}_tP_x = g^{c^x(c^t-1)}. \quad (5)$$

Peluang hidup gabungan untuk peserta asuransi yang berusia x dan y tahun akan bertahan hidup hingga t tahun berikutnya dinyatakan dalam [1: h.264] sebagai berikut:

$${}_tP_{xy} = {}_tP_x \cdot {}_tP_y. \quad (6)$$

Substitusikan persamaan (5) ke persamaan (6) diperoleh

$${}_tP_{xy} = g^{(c^x+c^y)(c^t-1)}. \quad (7)$$

Pada anuitas hidup status *last survivor*, peluang hidup juga dinyatakan dalam bentuk peluang hidup untuk status *last survivor* dinyatakan sebagai berikut:

$${}_tP_{\overline{xy}} = {}_tP_x + {}_tP_y - {}_tP_{xy}. \quad (8)$$

Nilai tunai anuitas hidup awal berjangka n tahun status *last survivor* untuk peserta asuransi yang berusia x dan y tahun dinyatakan sebagai berikut:

$$\ddot{a}_{\overline{xy:n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_tP_{\overline{xy}}. \quad (9)$$

Substitusikan persamaan (6), (7), dan (8) ke persamaan (9), maka diperoleh anuitas hidup awal berjangka n tahun status *last survivor* untuk peserta asuransi yang berusia x dan y tahun dengan asumsi Gompertz sebagai berikut:

$$\ddot{a}_{\overline{xy:n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t (g^{c^x(c^t-1)} + g^{c^y(c^t-1)} - g^{(c^x+c^y)(c^t-1)}), \quad (10)$$

dengan v menyatakan faktor diskon yang dinyatakan sebagai

$$v = \frac{1}{1+i}. \quad (11)$$

3. CADANGAN PROSPEKTIF *LAST SURVIVOR*

Dalam menentukan besarnya cadangan pada asuransi jiwa *last survivor* dwiguna diperlukan premi tunggal dan premi tahunan untuk status *last survivor*. Premi tunggal

merupakan premi yang hanya dibayarkan sekali selanjutnya tidak ada pembayaran lagi. Premi tunggal asuransi jiwa *last survivor* dwiguna untuk peserta asuransi yang berusia x dan y tahun dengan jangka pertanggungan selama n tahun dinyatakan sebagai

$$A_{\overline{xy:n}|} = v^n {}_n p_{xy} + \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} {}_t q_{xy}, \quad (12)$$

dengan ${}_t q_{xy}$ merupakan peluang orang yang berusia x dan y tahun akan hidup sampai t tahun dan kemudian meninggal dalam 1 tahun berikutnya, dinyatakan dengan

$${}_t q_{xy} = {}_t p_{xy} - {}_{t+1} p_{xy}. \quad (13)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (8) dan (13) ke persamaan (12) diperoleh

$$A_{\overline{xy:n}|} = 1 - d \ddot{a}_{\overline{xy:n}|}, \quad (14)$$

dengan d merupakan tingkat diskon dan dinyatakan sebagai

$$d = 1 - v. \quad (15)$$

Premi tahunan merupakan premi yang dibayarkan setiap tahun oleh peserta asuransi. Premi tahunan asuransi jiwa *last survivor* dwiguna dengan masa pertanggungan selama n tahun dinyatakan dengan

$$P_{\overline{xy:n}|} = \frac{A_{\overline{xy:n}|}}{\ddot{a}_{\overline{xy:n}|}}, \quad (16)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (14) ke persamaan (16) diperoleh

$$P_{\overline{xy:n}|} = \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{xy:n}|}} - d. \quad (17)$$

Substitusikan persamaan (10) ke persamaan (17), maka diperoleh premi tahunan asuransi jiwa *last survivor* dwiguna dengan asumsi Gompertz sebagai berikut:

$$P_{\overline{xy:n}|} = \frac{1}{\sum_{t=0}^{n-1} v^t (g^{c^x(c^t-1)} + g^{c^y(c^t-1)} - g^{(c^x+c^y)(c^t-1)})} - d. \quad (18)$$

Cadangan prospektif merupakan cadangan yang berorientasi pada pengeluaran diwaktu yang akan datang [3: h.123]. Misalkan j menyatakan waktu cadangan, maka berdasarkan [4: h.78] cadangan prospektif *last survivor* dwiguna dinyatakan dalam keadaan berikut:

1. Keduanya hidup sampai akhir tahun polis,

$${}_j V_{\overline{xy:n}|} = A_{\overline{x+j,y+j;n-j}|} - P_{\overline{xy:n}|} \ddot{a}_{\overline{x+j,y+j;n-j}|}, \quad (19)$$

dengan menggunakan persamaan (17) dan persamaan (14) untuk peserta asuransi yang berusia $(x + j)$ dan $(y + j)$ tahun, maka persamaan (19) dapat dinyatakan lebih lengkap dalam [5: h.31] sebagai

$${}_j V_{\overline{xy:n}|} = 1 - \frac{\ddot{a}_{\overline{x+j,y+j;n-j}|}}{\ddot{a}_{\overline{xy:n}|}}. \quad (20)$$

Berdasarkan persamaan (10), maka diperoleh cadangan prospektif *last survivor* dengan asumsi Gompertz sebagai berikut:

$${}_jV_{\overline{xy:n}} = 1 - \frac{\sum_{t=0}^{n-1} v^t (g^{c^{x+j}(c^t-1)} + g^{c^{y+j}(c^t-1)} - g^{(c^{x+j}+c^{y+j})(c^t-1)})}{\sum_{t=0}^{n-1} v^t (g^{c^x(c^t-1)} + g^{c^y(c^t-1)} - g^{(c^x+c^y)(c^t-1)}}. \quad (21)$$

2. Pada waktu x hidup, dan y meninggal dunia,

$${}_jV_{x:\overline{n}|} = A_{x+j:\overline{n-j}|} - P_{\overline{xy:n}|} \ddot{a}_{x+j:\overline{n-j}|}, \quad (22)$$

dengan menggunakan persamaan (17) dan (14) untuk peserta asuransi yang berusia $(x + j)$ tahun, maka persamaan (22) dapat dinyatakan lebih lengkap dalam [5: h.32] sebagai

$${}_jV_{x:\overline{n}|} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+j:\overline{n-j}|}}{\ddot{a}_{\overline{xy:n}|}}. \quad (23)$$

Berdasarkan persamaan (10), maka diperoleh cadangan prospektif *last survivor* dengan asumsi Gompertz sebagai berikut:

$${}_jV_{x:\overline{n}|} = 1 - \frac{\sum_{t=0}^{n-j-1} v^t g^{c^{x+j}(c^t-1)}}{\sum_{t=0}^{n-1} v^t (g^{c^x(c^t-1)} + g^{c^y(c^t-1)} - g^{(c^x+c^y)(c^t-1)}}. \quad (24)$$

3. Pada waktu y hidup, dan x meninggal dunia,

$${}_jV_{y:\overline{n}|} = A_{y+j:\overline{n-j}|} - P_{\overline{xy:n}|} \ddot{a}_{y+j:\overline{n-j}|}, \quad (25)$$

dengan menggunakan persamaan (17) dan (14) untuk peserta asuransi yang berusia $(y + j)$ tahun, maka persamaan (25) dapat dinyatakan lebih lengkap dalam [5: h.32] sebagai

$${}_jV_{y:\overline{n}|} = 1 - \frac{\ddot{a}_{y+j:\overline{n-j}|}}{\ddot{a}_{\overline{xy:n}|}}. \quad (26)$$

Berdasarkan persamaan (10), maka diperoleh cadangan prospektif *last survivor* dengan asumsi Gompertz sebagai berikut:

$${}_jV_{y:\overline{n}|} = 1 - \frac{\sum_{t=0}^{n-j-1} v^t g^{c^{y+j}(c^t-1)}}{\sum_{t=0}^{n-1} v^t (g^{c^x(c^t-1)} + g^{c^y(c^t-1)} - g^{(c^x+c^y)(c^t-1)}}. \quad (27)$$

Contoh Seorang pegawai swasta yang berusia 50 tahun bersama istrinya yang berusia 51 tahun ingin mengikuti program asuransi jiwa dengan masa pertanggungans selama 10 tahun dan UP sebesar Rp.10.000.000,00 yang nantinya akan diberikan kepada ahli waris dengan tingkat bunga 5% maka, tentukan cadangan prospektif asuransi jiwa dwiguna setiap akhir tahun dengan asumsi Gompertz dengan kasus berikut:

1. Kedua peserta asuransi hidup hingga akhir tahun polis

2. Pada waktu pegawai swasta masih hidup, dan istrinya meninggal dunia,
3. Pada waktu istri pegawai swasta masih hidup, dan pegawai swasta meninggal dunia.

Penyelesaian dari kasus diatas diketahui $x = 50$, $n = 10$, $R = Rp\ 10.000.000,00$, $y = 51$, dan $i = 5\% = 0,05$.

Dengan menggunakan persamaan (11) diperoleh

$$v = \frac{1}{1 + 0,05} = 0,952380952,$$

dan dengan menggunakan persamaan (15) diperoleh

$$d = 1 - 0,952380952 = 0,047619048.$$

Berdasarkan definisi distribusi Gompertz ditentukan konstanta Gompertz untuk TMI 1999 pria, dengan terlebih dahulu menentukan σ dan μ , dengan menggunakan program Excel diperoleh $\sigma = 29,30017065$ dan $\mu = 50$. Kemudian dengan mensubstitusikan nilai σ dan μ ini ke dalam persamaan (2) diperoleh

$$\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{6}}b \quad \text{dan} \quad \mu = a - by$$

$$b = 22,84524933 \quad \text{dan} \quad a = 63,186636.$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan nilai a dan b ke persamaan (3) diperoleh

$$g = e^{-e^{-\frac{a}{b}}} \quad \text{dan} \quad c = e^{\frac{1}{b}}$$

$$g = 0,939016424 \quad \text{dan} \quad c = 1,044744938.$$

Dengan cara yang sama diperoleh nilai g dan c untuk perempuan sebesar

$$g = 0,939071997 \quad \text{dan} \quad c = 1,043432869.$$

Nilai tunai anuitas hidup berjangka awal *last survivor* dengan asumsi Gompertz menggunakan persamaan (10) diperoleh

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{\overline{50:51}|0,05} &= \sum_{t=0}^9 v^t (g^{c^x(c^t-1)} + g^{c^y(c^t-1)} - g^{(c^x+c^y)(c^t-1)}) \\ &= v^0 (g^{c^{50}(c^0-1)} + g^{c^{51}(c^0-1)} - g^{(c^{50}+c^{51})(c^0-1)}) \\ &\quad + v^1 (g^{c^{50}(c^1-1)} + g^{c^{51}(c^1-1)} - g^{(c^{50}+c^{51})(c^1-1)}) \\ &\quad + \dots + v^9 (g^{c^{50}(c^9-1)} + g^{c^{51}(c^9-1)} - g^{(c^{50}+c^{51})(c^9-1)}) \\ &= 1(1+1-1) + 0,9524(0,9751 + 0,9764 - 0,9521) \\ &\quad + \dots + 0,6446(0,7625 + 0,7740 - 0,5902) \\ \ddot{a}_{\overline{50:51}|0,05} &= 7,977207464. \end{aligned}$$

Dengan uang pertanggungan sebesar Rp.10.000.000,00, maka berdasarkan persamaan (14) diperoleh premi tunggal status *last survivor* untuk peserta asuransi yang berusia 50 dan 51 tahun menggunakan asumsi Gompertz berikut:

$$\begin{aligned} A_{\overline{50:51}|0,05} &= 10000000(1 - d\ddot{a}_{\overline{50:51}|0,05}) \\ &= 10000000 \left(1 - (0,047619048 \times 7,977207464) \right) \\ A_{\overline{50:51}|0,05} &= Rp.6.875.410,10. \end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan persamaan (16) diperoleh premi tahunan asuransi jiwa *last survivor* dwiguna untuk peserta asuransi yang berusia 50 dan 51 tahun dengan masa pertanggungan selama 10 tahun menggunakan asumsi Gompertz berikut:

$$P_{\overline{50:51:10}|} = \frac{A_{\overline{50:51:10}|}}{\ddot{a}_{\overline{50:51:10}|}}$$

$$P_{\overline{50:51:10}|} = \frac{6875410,10}{7,977207464}$$

$$P_{\overline{50:51:10}|} = \text{Rp.}777.381,03.$$

Cadangan prospektif asuransi jiwa *last survivor* dwiguna untuk peserta asuransi yang berusia 50 dan 51 tahun dengan jangka pertanggungan selama 10 tahun menggunakan asumsi Gompertz dengan kasus:

1. Kedua peserta asuransi masih hidup hingga akhir tahun polis

Cadangan pada awal tahun kontrak dimulai ($j = 0$), berdasarkan persamaan (20) diperoleh

$$\begin{aligned} {}_0V_{\overline{50:51:10}|} &= 1 - \frac{\ddot{a}_{\overline{50:51:10}|}}{\ddot{a}_{\overline{50:51:10}|}} \\ &= 1 - \frac{7,977207464}{7,977207464} \end{aligned}$$

$${}_0V_{\overline{50:51:10}|} = 0.$$

Jadi, besar cadangan pada saat awal kontrak dimulai adalah sebesar Rp.0.

Perhitungan lebih lengkap cadangan prospektif asuransi jiwa *last survivor* dwiguna untuk peserta asuransi yang berusia 50 dan 51 tahun dengan jangka pertanggungan selama 10 tahun berdasarkan asumsi Gompertz menggunakan program *Microsoft Excel* pada tahun ke- j disajikan dalam Tabel 1.

Tabel 1: Cadangan *Last Survivor* Dwiguna Jika Kedua Peserta Asuransi Masih Hidup Sampai Akhir Kontrak dengan Asumsi Gompertz.

Tahun	Cadangan	Tahun	Cadangan
0	0	5	Rp.4.330.870,70
1	Rp.744.505,28	6	Rp.5.348.078,18
2	Rp.1.592.150,00	7	Rp.6.421.714,38
3	Rp.2.455.605,90	8	Rp.7.553.948,93
4	Rp.3.367.601,52	9	Rp.8.746.428,50

Dengan cara yang sama seperti perhitungan cadangan untuk kasus pertama, perhitungan cadangan untuk kasus kedua dan ketiga berturut-turut dengan program *Microsoft Excel* disajikan dalam Tabel 2 dan Tabel 3.

Tabel 2: Cadangan *Last Survivor* Dwiguna Jika x Masih Hidup dan y Meninggal dengan Asumsi Gompertz.

Tahun	Cadangan	Tahun	Cadangan
0	Rp.913.457,63	5	Rp.4.638.744,73
1	Rp.1.566.140,54	6	Rp.5.549.936,11
2	Rp.2.260.197,08	7	Rp.6.532.227,88
3	Rp.3.000.121,28	8	Rp.7.594.370,91
4	Rp.3.791.026,95	9	Rp.8.746.428,50

Tabel 3: Cadangan *Last Survivor* Dwiguna Jika y Masih Hidup dan x Meninggal dengan Asumsi Gompertz.

Tahun	Cadangan	Tahun	Cadangan
0	Rp.861.058,91	5	Rp.4.620.418,88
1	Rp.1.520.324,96	6	Rp.5.537.860,11
2	Rp.2.221.217,28	7	Rp.6.525.588,82
3	Rp.2.968.112,74	8	Rp.7.591.934,60
4	Rp.3.765.970,30	9	Rp.8.746.428,50

4. KESIMPULAN

Dalam menentukan anuitas hidup berjangka pada asuransi jiwa *last survivor* dengan asumsi Gompertz dipengaruhi oleh faktor diskon dan peluang hidup. Peluang hidup yang dinyatakan dengan asumsi Gompertz dipengaruhi oleh konstanta Gompertz. Anuitas hidup berjangka pada asuransi jiwa *last survivor* dengan asumsi Gompertz lebih besar dibandingkan dengan anuitas hidup berjangka untuk status perorangan yang dihitung masing-masing dengan masa pertanggungan dan usia yang sama, hal ini dikarenakan peluang hidup status *last survivor* lebih besar dibandingkan dengan status perorangan. Semakin besar anuitas hidup maka semakin kecil premi tahunan, sehingga premi tahunan untuk asuransi jiwa *last survivor* dengan asumsi Gompertz lebih kecil dibandingkan dengan premi tahunan status perorangan.

Besarnya cadangan prospektif *last survivor* dwiguna dengan asumsi Gompertz pada akhir tahun jangka pertanggungan asuransi untuk ketiga kasus adalah sama.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bowers, N.L., H.U. Gerber, J.C. Hickman, D.A. Jones, & C.J. Nesbitt. 1997. *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries, United States of America.
- [2] Dickson, D.C.M., M.R. Hardy, & H.R. Waters. 2009. *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. Cambridge University Pres, New York.

- [3] Futami, T. 1993. *Matematika Asuransi Jiwa, Bagian 1*. Terj. dari *Seimei Hoken Sugaku, Jokan ("92 Revision)*, oleh Herliyanto, Gatot. Incorporated Foundation Oriental Life Insurance Cultural Development Center, Japan.
- [4] Futami, T. 1994. *Matematika Asuransi Jiwa, Bagian II*. Terj. dari *Seimei Hoken Sugaku, Gekan ("92 Revision)*, oleh Herliyanto, Gatot. Incorporated Foundation Oriental Life Insurance Cultural Development Center, Japan.
- [5] Ghufron. 2014. *Cadangan Prospektif Last Survivor dengan Asumsi Gompertz*. Universitas Riau, Pekanbaru.
- [6] Willemse, W. J. & H. Koppelaar. 2000. Knowledge Elicitation of Gompert' Law of Mortality. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2: 168-179.