EKSISTENSI INVERS GRUP DARI MATRIKS BLOK

Riana Wendya[1] **, Rolan Pane**[2] **, Musraini.M**[2]

[1] Mahasiswa Program S1 Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Kampus Binawidya Pekanbaru 28293, Indonesia

email: riana_wendya@yahoo.com

ABSTRACT

We discuss necessary and sufficient conditions for the existence of the group inverse of block matrices of the forms $M = \begin{bmatrix} A & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$ and $M = \begin{bmatrix} A & B \\ A & 0 \end{bmatrix}$, where *A*, *B* are square matrices with $rank(B) \geq rank(A)$. In addition, we also give two explicit forms of the considered block matrices.

Keywords: *Rank, block matrices, group inverse.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas syarat perlu dan cukup keberadaaan invers grup dari matriks blok yang berbentuk $M = \begin{bmatrix} A & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$ dan $M = \begin{bmatrix} A & B \\ A & 0 \end{bmatrix}$, dengan *A*, *B* adalah matriks persegi dengan $rank(B) \geq rank(A)$. Disamping itu diberikan juga bentuk eksplisit dari invers grup untuk kedua jenis matriks blok M tersebut.

Kata Kunci: Rank, matriks blok, invers grup.

1. PENDAHULUAN

Matriks adalah himpunan bilangan-bilangan yang disusun secara empat persegi panjang menurut baris dan kolom. Secara umum diketahui bahwa suatu matriks mempunyai invers apabila matriks tersebut merupakan matriks nonsingular. Dalam perkembangannya dibutuhkan sebuah invers matriks yang diperumum untuk mengetahui invers suatu matriks ada jika matriks tersebut singular. Ada beberapa jenis invers matriks yang diperumum diantaranya yaitu invers kiri dan invers kanan (invers satu sisi), invers Drazin, invers grup, dan invers Bott-Duffin. Pada artikel ini penulis akan membahas mengenai invers grup yang dinotasikan dengan $G^{\#}$. Berkaitan dengan invers grup, di dalam artikel ini dibahas tentang matriks blok, yaitu matriks blok $M = \begin{bmatrix} A & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$ dan $M = \begin{bmatrix} A & B \\ A & 0 \end{bmatrix}$, dengan A, B keduanya merupakan matriks persegi dan $rank(B) \geq rank(A)$ [3]. Tulisan ini merupakan review dari artikel Changjiang Bu, Jiemei Zhao, dan Kuize Zhang [3].

2. INVERS GRUP

Sebelum membahas tentang eksistensi invers grup dari matriks blok terlebih dahulu diberikan definisi tentang matriks blok, rank matriks, *skew field,* dan invers grup.

Definisi 1 [4, h: 61] Suatu matriks dapat dipartisi ke dalam satu atau beberapa baris maupun kolom sehingga terbentuklah matriks dengan elemen-elemen dari sub-sub matriks yang disebut matriks blok.

Definisi 2 [1, h: 169] Dimensi ruang baris dan ruang kolom matriks A dinamakan dengan rank A dan dinyatakan dengan rank (A).

Definisi 3 [5, h: 262] Misalkan R adalah *division ring* yang bersifat komutatif, maka R disebut lapangan (*field*). Jika R *division ring* yang tidak komutatif maka R disebut *skew field*.

Definisi 4 [3] Misalkan K adalah *skew field* dan $K^{n\times n}$ adalah semua himpunan matriks pada K. Untuk $G \in K^{n\times n}$, matriks $G^{\#} \in K^{n\times n}$ disebut invers grup dari G bila memenuhi:

$$GG^{\#} = G^{\#}G, \tag{1}$$

$$GG^{\#}G = G, \tag{2}$$

$$G^{\#}GG^{\#} = G^{\#}. \tag{3}$$

Jika $G^{\#}$ ada, maka $G^{\#}$ tunggal, namun jika G adalah matriks nonsingular maka $G^{\#} = G^{-1}$.

Lema 5 [2] Misalkan $G \in K^{n\times n}$, maka $G^{\#}$ ada jika dan hanya jika $rank(G) = rank(G^2)$.

3. EKSISTENSI INVERS GRUP DARI MATRIKS BLOK

Untuk menunjukkan eksistensi invers grup dari matriks blok digunakan beberapa Lema dan Teorema sebagai berikut:

Lema 6 [3] Misalkan $A, B \in K^{n\times n}$. Jika

$$rank(A) = r,\ rank(B) = rank(AB) = rank(BA),$$

maka terdapat matriks-matriks yang mempunyai invers $P, Q \in K^{n\times n}$ sedemikian hingga

$$A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q, \quad B = Q^{-1}\begin{bmatrix} B_1 & B_1X \\ YB_1 & YB_1X \end{bmatrix}P^{-1},$$

dengan $B_1 \in K^{r\times r}, X \in K^{r\times(n-r)}$, dan $Y \in K^{(n-r)\times r}$.

Bukti:

Misalkan $rank(A) = r$, maka terdapat matriks nonsingular $P, Q \in K^{n\times n}$ sedemikian hingga

$$A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q, \; B = Q^{-1}\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}P^{-1},$$

dengan $B_1 \in K^{r\times r}$, $B_2 \in K^{r\times(n-r)}$, $B_3 \in K^{(n-r)\times r}$, dan $B_4 \in K^{(n-r)\times(n-r)}$.
Selanjutnya

$$AB = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}QQ^{-1}\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}P^{-1},$$

$$AB = P\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1},$$

maka diperoleh $rank(AB) = rank\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}$.
Karena $rank(B) = rank(AB)$, maka $rank(B) = rank\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}$.

Karena $Y \in K^{(n-r)\times r}$, diperoleh $B_3 = YB_1$ dan $B_4 = YB_2$, maka $B = Q^{-1}\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ YB_1 & YB_2 \end{bmatrix}P^{-1}$.

Selanjutnya

$$BA = Q^{-1}\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}P^{-1}P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q,$$

$$BA = Q^{-1}\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & 0 \end{bmatrix}Q,$$

maka diperoleh $rank(BA) = rank\begin{bmatrix} B_1 \\ B_3 \end{bmatrix}$.

Karena $rank(B) = rank(BA)$, diperoleh $rank(B) = rank\begin{bmatrix} B_1 \\ B_3 \end{bmatrix}$.

Selanjutnya karena $X \in K^{r\times(n-r)}$, diperoleh $B_2 = B_1X$ dan $B_4 = B_3X$, maka

$$B = Q^{-1}\begin{bmatrix} B_1 & B_1X \\ YB_1 & YB_1X \end{bmatrix}P^{-1}.$$

Lema 7 [3] Misalkan $A \in K^{r\times r}$, $B \in K^{(n-r)\times r}$, dan $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} \in K^{n\times n}$. Maka

i. Invers grup dari M ada jika dan hanya jika invers grup dari A ada dan $rank(A) = rank\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$.

ii. Jika invers grup dari M ada, maka $M^{\#} = \begin{bmatrix} A^{\#} & 0 \\ B(A^{\#})^2 & 0 \end{bmatrix}$.

Bukti:

i. $\Leftarrow$ Karena $A^{\#}$ ada misalkan $Y = \begin{bmatrix} A^{\#} & 0 \\ B(A^{\#})^2 & 0 \end{bmatrix}$ adalah invers grup dari M, berdasarkan Definisi 4 maka $MYM = M$, $YMY = Y$ dan $MY = YM$, sehingga $M^{\#}$ ada.

$\Rightarrow M^{\#}$ ada, maka $rank_r(M) = rank_r(M^2)$, dengan $rank_r$ adalah rank kolom dari matriks M.

Untuk sebarang $x_1 \in rank_r^m, x_2 \in rank_r^{n-m}$ terdapat $y_1 \in rank_r^m, y_2 \in rank_r^{n-m}$ sehingga

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^2 & 0 \\ BA & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

maka $Ax_1 = A^2 y_1$ artinya $rank_r A = rank_r A^2$, maka $A^{\#}$ ada.

Selanjutnya untuk menunjukkan $rank(A) = rank\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ adalah dengan cara menunjukkan $rank\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \le rank(A)$ dan $rank\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \ge rank(A)$.

Misalkan

$$rank(M^2) = rank\begin{bmatrix} A^2 \\ BA \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} A \le rank(A). \quad (4)$$

Karena

$$rank(M^2) = rank(M) = rank\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \ge rank(A). \quad (5)$$

maka dari persamaan (4) dan (5) diperoleh $rank\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = rank(A)$.

ii. Untuk menunjukkan $M^{\#} = \begin{bmatrix} A^{\#} & 0 \\ B(A^{\#})^2 & 0 \end{bmatrix}$ adalah invers grup dari $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix}$ maka harus memenuhi Definisi 4 sebagai berikut:

1. $MM^{\#} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{\#} & 0 \\ B(A^{\#})^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^{\#} & 0 \\ BA^{\#} & 0 \end{bmatrix}$.

   $M^{\#}M = \begin{bmatrix} A^{\#} & 0 \\ B(A^{\#})^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^{\#} & 0 \\ BA^{\#} & 0 \end{bmatrix}$.

   Jadi, $MM^{\#} = M^{\#}M$.

2. $MM^{\#}M = \begin{bmatrix} AA^{\#} & 0 \\ BA^{\#} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix}$.

Jadi, $MM^{\#}M = M$.

3. $M^{\#}MM^{\#} = \begin{bmatrix} AA^{\#} & 0 \\ BA^{\#} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{\#} & 0 \\ B(A^{\#})^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{\#} & 0 \\ B(A^{\#})^2 & 0 \end{bmatrix}.$

Jadi, $M^{\#}MM^{\#} = M^{\#}$.

Karena Definisi 4 terpenuhi maka $M^{\#}$ adalah invers grup dari M .

Lema 8 [3] Misalkan $A \in K^{r\times r}$, $B \in K^{r\times(n-r)}$, dan $M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in K^{n\times n}$. Maka

i. Invers grup dari M ada jika dan hanya jika invers grup dari A ada dan $rank(A) = rank\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$.

ii. Jika invers grup dari M ada, maka $M^{\#} = \begin{bmatrix} A^{\#} & (A^{\#})^2 B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Bukti: Sama seperti cara Lema 7.

Lema 9 [3] Misalkan $A, B \in K^{n\times n}$. Jika $rank(A) = rank(B) = rank(AB) = rank(BA)$ maka berlaku:

(i) $AB(AB)^{\#} A = A,$

(ii) $A(BA)^{\#} BA = A,$

(iii) $BA(BA)^{\#} B = B,$

(iv) $B(AB)^{\#} A = BA(BA)^{\#},$

(v) $A(BA)^{\#} = (AB)^{\#} A,$

(vi) $(BA)^{\#} B = B(AB)^{\#}$.

Bukti: Misal $rank(A) = r$. Berdasarkan Lema 6, diperoleh

$$A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q,\ B = Q^{-1}\begin{bmatrix} B_1 & B_1X \\ YB_1 & YB_1X \end{bmatrix}P^{-1},$$

dengan $B_1 \in K^{r\times r}$, $X \in K^{r\times(n-r)}$, $Y \in K^{(n-r)\times r}$. Maka

$$AB = P\begin{bmatrix} B_1 & B_1X \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1},\ BA = Q^{-1}\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ YB_1 & 0 \end{bmatrix}Q,$$

Karena $rank(A) = rank(B)$, diperoleh bahwa B_1 memiliki invers. Dengan menggunakan Lema 7 dan Lema 8, diperoleh

$$(AB)^{\#} = P\begin{bmatrix} B_1^{-1} & B_1^{-1}X \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1},\ (BA)^{\#} = Q^{-1}\begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ YB_1^{-1} & 0 \end{bmatrix}Q.$$

Maka

(i) $AB(AB)^{\#} A = P\begin{bmatrix} B_1 & B_1X \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}P\begin{bmatrix} B_1^{-1} & B_1^{-1}X \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}A,$

$$AB(AB)^{\#} A = P\begin{bmatrix} I_r & X^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q = A.$$

(ii) $A(BA)^{\#}BA = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} QQ^{-1}\begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ YB_1^{-1} & 0 \end{bmatrix} QBA,$

$$A(BA)^{\#}BA = P\begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} QQ^{-1}\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ YB_1 & 0 \end{bmatrix} Q = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q = A.$$

(iii) $BA(BA)^{\#}B = Q^{-1}\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ YB_1 & 0 \end{bmatrix} QQ^{-1}\begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ YB_1^{-1} & 0 \end{bmatrix} QB,$

$$BA(BA)^{\#}B = Q^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ Y & 0 \end{bmatrix} QQ^{-1}\begin{bmatrix} B_1 & B_1X \\ YB_1 & YB_1X \end{bmatrix} P^{-1} = Q^{-1}\begin{bmatrix} B_1 & B_1X \\ YB_1 & YB_1X \end{bmatrix} P^{-1} = B.$$

(iv) $B(AB)^{\#}A = Q^{-1}\begin{bmatrix} B_1 & B_1X \\ YB_1 & YB_1X \end{bmatrix} P^{-1}P\begin{bmatrix} B_1^{-1} & B_1^{-1}X \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}A,$

$$B(AB)^{\#}A = Q^{-1}\begin{bmatrix} I_r & X \\ Y & YX \end{bmatrix} P^{-1}P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q = Q^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ Y & 0 \end{bmatrix} Q.$$

$$BA(BA)^{\#} = Q^{-1}\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ YB_1 & 0 \end{bmatrix} QQ^{-1}\begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ YB_1^{-1} & 0 \end{bmatrix} Q = Q^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ Y & 0 \end{bmatrix} Q.$$

$$B(AB)^{\#}A = BA(BA)^{\#}.$$

(v) $A(BA)^{\#} = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} QQ^{-1}\begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ YB_1^{-1} & 0 \end{bmatrix} Q = P\begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q.$

$$(AB)^{\#}A = P\begin{bmatrix} B_1^{-1} & B_1^{-1}X \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q = P\begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q.$$

$$A(BA)^{\#} = (AB)^{\#}A.$$

(vi) $(BA)^{\#}B = Q^{-1}\begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ YB_1^{-1} & 0 \end{bmatrix} QQ^{-1}\begin{bmatrix} B_1 & B_1X \\ YB_1 & YB_1X \end{bmatrix} P^{-1} = Q^{-1}\begin{bmatrix} I_r & X \\ Y & YX \end{bmatrix} P^{-1}.$

$$B(AB)^{\#} = Q^{-1}\begin{bmatrix} B_1 & B_1X \\ YB_1 & YB_1X \end{bmatrix} P^{-1}P\begin{bmatrix} B_1^{-1} & B_1^{-1}X \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = Q^{-1}\begin{bmatrix} I_r & X \\ Y & YX \end{bmatrix} P^{-1}.$$

$$(BA)^{\#}B = B(AB)^{\#}.$$

Teorema 10 [3] Misalkan $M = \begin{bmatrix} A & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$, dimana $A, B, \in K^{n\times n}$, dan $rank(B) \geq rank(A) = r$. Maka

(i) Invers grup dari M ada jika dan hanya jika

$$rank(A) = rank(B) = rank(AB) = rank(BA).$$

(ii) Jika invers grup dari M ada, maka

$$M^{\#} = \begin{bmatrix} (AB)^{\#}A-(AB)^{\#}A^2(BA)^{\#}B & (AB)^{\#}A \\ T & -B(AB)^{\#}A^2(BA)^{\#} \end{bmatrix},$$

$$T=(BA)^{\#}B-B(AB)^{\#}A^2(BA)^{\#}+B(AB)^{\#}A(AB)^{\#}A^2(BA)^{\#}B.$$

Bukti :

(i) $\Leftarrow$ Karena $M=\begin{bmatrix} A & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$ maka

$$rank(M)=rank\begin{bmatrix} A & A \\ B & 0 \end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}=rank(A)+rank(B),$$

$$rank(M^2)=rank\begin{bmatrix} A^2+AB & A^2 \\ BA & BA \end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix} AB & A^2 \\ 0 & BA \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan Lema (9) (iii) jika $rank(A)=rank(B)=rank(AB)=rank(BA)$, maka $AB(AB)^{\#}B=B$, jadi $A^2=AB(AB)^{\#}A^2$, diperoleh

$$rank\begin{bmatrix} AB & A^2 \\ 0 & BA \end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix} AB & 0 \\ 0 & BA \end{bmatrix}=rank(AB)+rank(BA).$$

Jadi, $rank(M)=rank(A)+rank(B)=rank(AB)+rank(BA)=rank(M^2)$.

$\Rightarrow$ Karena invers grup dari M ada, maka $rank(M)=rank(M^2)$, sehingga

$$\begin{aligned} rank(A)+rank(B) &= rank(M^2) \\ &\le rank(AB)+rank\begin{bmatrix} A^2 \\ BA \end{bmatrix} \\ &\le rank(AB)+rank(A) \\ rank(B) &\le rank(AB), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} rank(A)+rank(B) &= rank(M^2) \\ &\le rank\begin{bmatrix} AB & A^2 \end{bmatrix}+rank(BA) \\ &\le rank(BA)+rank(A) \\ rank(B) &\le rank(BA). \end{aligned}$$

Maka $rank(B)\le rank(AB)$, dan $rank(B)\le rank(BA)$.

Oleh sebab itu $rank(B)=rank(AB)=rank(BA)$.

Dari $rank(B)=rank(AB)\le rank(A)$, dan $rank(A)\le rank(B)$, diperoleh

$$rank(A)=rank(B).$$

Karena $rank(A)+rank(B)\le rank(AB \quad A^2)+rank(BA)$,

dan $rank(AB \quad A^2)\le rank(A)$, diperoleh $rank(AB \quad A^2)=rank(A)$.

Jadi $rank(AB \quad A^2)=rank(AB)$.

Maka terdapat sebuah matriks $U \in K^{n\times n}$ sedemikian hingga $ABU = A^2$.

Maka

$$rank(M^2) = rank\begin{bmatrix} AB & 0 \\ 0 & BA \end{bmatrix} = rank(AB) + rank(BA).$$

Jadi diperoleh

$$rank(A) = rank(B) = rank(AB) = rank(BA)\ .$$

(ii) Misalkan $X = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$. Akan dibuktikan bahwa matriks X memenuhi kondisi invers grup.

1. Akan ditunjukkan $MX = XM$.

$$MX = \begin{bmatrix} A & A \\ B & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AM_{11} + AM_{21} & AM_{12} + AM_{22} \\ BM_{11} & BM_{12} \end{bmatrix},$$

$$XM = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & A \\ B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}A + M_{12}B & M_{11}A \\ M_{21}A + M_{22}B & M_{21}A \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan Lema 9 (i), (ii), dan (v) diperoleh

$$AM_{11} + AM_{21} = A(AB)^{\#}A - A(AB)^{\#}A^2(BA)^{\#}B + A(BA)^{\#}B - AB(AB)^{\#}A^2(BA)^{\#}$$
$$+ AB(AB)^{\#}A(AB)^{\#}A^2(BA)^{\#}B$$

$$AM_{11} + AM_{21} = A(BA)^{\#}B.$$

$$M_{11}A + M_{12}B = (AB)^{\#}A^2 - (AB)^{\#}A^2(BA)^{\#}BA + (AB)^{\#}AB$$

$$M_{11}A + M_{12}B = A(BA)^{\#}B.$$

Maka $AM_{11} + AM_{21} = M_{11}A + M_{12}B$.

Dengan menggunakan Lema 9 (i), (ii), dan (v) diperoleh

$$AM_{12} + AM_{22} = A(AB)^{\#}A - AB(AB)^{\#}A^2(BA)^{\#}$$
$$= A^2(BA)^{\#} - A^2(BA)^{\#}$$

$$AM_{12} + AM_{22} = 0.$$

$$M_{11}A = (AB)^{\#}A^2 - (AB)^{\#}A^2(BA)^{\#}BA$$
$$= (AB)^{\#}A^2 - (AB)^{\#}A^2$$

$$M_{11}A = 0.$$

Maka $AM_{12} + AM_{22} = M_{11}A$.

Dengan menggunakan Lema 9 (ii), (iv), dan (v) diperoleh

$$BM_{11} = B(AB)^{\#}A - B(AB)^{\#}A^2(BA)^{\#}B.$$

$$M_{21}A + M_{22}B = (BA)^{\#}BA - B(AB)^{\#}A^2(BA)^{\#}A + B(AB)^{\#}A^2(BA)^{\#}A(BA)^{\#}BA$$
$$- B(AB)^{\#}A^2(BA)^{\#}B$$

$$M_{21}A + M_{22}B = B(AB)^{\#}A - B(AB)^{\#}A^2(BA)^{\#}B.$$

Maka $BM_{11} = M_{21}A + M_{22}B$.

Dengan menggunakan Lema 9 (ii), (iv), dan (v) diperoleh

$BM_{12} = B(AB)^{\#}A.$

$M_{12}A \ = (BA)^{\#}BA - B(AB)^{\#}A^2(BA)^{\#}A + B(AB)^{\#}A^2(BA)^{\#}A(BA)^{\#}BA$

$M_{12}A \ = B(AB)^{\#}A.$

Maka $BM_{12} = M_{12}A$.

Sehingga $MX = XM = \begin{bmatrix} A(BA)^{\#}B & 0 \\ B(AB)^{\#}A - B(AB)A^2(BA)^{\#}B & B(AB)^{\#}A \end{bmatrix}.$

2. Akan ditunjukkan $MXM = M.$

Misalkan $MXM = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & 0 \end{bmatrix}.$

$$MXM \ = \begin{bmatrix} A & A \\ B & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A(BA)^{\#}B & 0 \\ B(AB)^{\#}A - B(AB)A^2(BA)^{\#}B & B(AB)^{\#}A \end{bmatrix},$$

$$MXM \ = \begin{bmatrix} A^2(BA)^{\#}B + AB(AB)^{\#}A - AB(AB)^{\#}A^2(BA)^{\#}B & AB(AB)^{\#}A \\ BA(BA)^{\#}B & 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan Lema 9 (i) dan (iii) diperoleh

$X_{11} = A^2(BA)^{\#}B + AB(AB)^{\#}A - AB(AB)^{\#}A^2(BA)^{\#}B$

$\quad = A^2(BA)^{\#}B + A - A^2(BA)^{\#}B$

$X_{11} = A.$

$X_{12} = AB(AB)^{\#}A$

$X_{12} = A.$

$X_{21} = BA(BA)^{\#}B$

$X_{21} = B.$

Sehingga $MXM = \begin{bmatrix} A & A \\ B & 0 \end{bmatrix} = M$.

3. Akan ditunjukkan $XMX = X$.

Misalkan $XMX = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}.$

$$XMX \ = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A(BA)^{\#}B & 0 \\ B(AB)^{\#}A - B(AB)^{\#}A^2(BA)^{\#}B & B(AB)^{\#}A \end{bmatrix},$$

$$XMX \ = \begin{bmatrix} M_{11}A(BA)^{\#}B + M_{12}B(AB)^{\#}A - B(AB)^{\#}A^2(BA)^{\#}B & M_{12}B(AB)^{\#}A \\ M_{21}A(BA)^{\#}B + M_{22}B(AB)^{\#}A - B(AB)^2A^2(BA)^{\#}B & M_{22}B(AB)^{\#}A \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan Lema 9 (i) dan (ii) diperoleh

$$Y_{11} = (AB)^{\#} A^2 (BA)^{\#} B - (AB)^{\#} A^2 (BA)^{\#} BA(BA)^{\#} B + (AB)^{\#} AB(AB)^{\#} A$$

$$- (AB)^{\#} AB(AB)^{\#} A^2 (BA)^{\#} B$$

$$= (AB)^{\#} A - (AB)^{\#} A^2 (BA)^{\#} B$$

$$Y_{11} = M_{11}.$$

Dengan menggunakan Lema 9 (i) diperoleh

$$Y_{12} = (AB)^{\#} AB(AB)^{\#} A$$

$$Y_{12} = M_{12}.$$

Dengan menggunakan Lema 9 (i), (iii), (iv), dan (v) diperoleh

$$Y_{21} = (BA)^{\#} BA(BA)^{\#} B - B(AB)^{\#} A^2 (BA)^{\#} A(BA)^{\#} B + B(AB)^{\#} A^2 (BA)^{\#} A(BA)^{\#} B$$

$$- B(AB)^{\#} A^2 (BA)^{\#} B(AB)^{\#} A + B(AB)^{\#} A^2 (BA)^{\#} B(AB)^{\#} A^2 (BA)^{\#} B$$

$$= (BA)^{\#} B - B(AB)^{\#} A^2 (BA)^{\#} + B(AB)^{\#} A(AB)^{\#} A^2 (BA)^{\#} B$$

$$Y_{21} = M_{12}.$$

Dengan menggunakan Lema 9 (ii), (iv), dan (v) diperoleh

$$Y_{22} = -B(AB)^{\#} A^2 (BA)^{\#} B(AB)^{\#} A$$

$$= -B(AB)^{\#} A^2 (BA)^{\#} BA(BA)^{\#}$$

$$= -B(AB)^{\#} A^2 (BA)^{\#}$$

$$Y_{22} = M_{22}.$$

Sehingga $XMX = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{21} \\ M_{22} & 0 \end{bmatrix} = X.$

Jadi diperoleh $X = M^{\#}$. Karena $X = M^{\#}$, maka $M^{\#}$ adalah invers grup dari M.

Teorema 11 [3] Misalkan $M = \begin{bmatrix} A & B \\ A & 0 \end{bmatrix}$, dimana $A, B \in K^{n \times n}$, dan $rank(B) \geq rank(A) = r$. Maka :

(i) Invers grup dari M ada jika dan hanya jika

$$rank(A) = rank(B) = rank(AB) = rank(BA).$$

(ii) Jika invers grup dari M ada, maka

$$M^{\#} = \begin{bmatrix} (AB)^{\#} A - B(AB)^{\#} A^2 (BA)^{\#} & T \\ (AB)^{\#} A & -(AB)^{\#} A^2 (BA)^{\#} B \end{bmatrix},$$

$$T = B(AB)^{\#} - (AB)^{\#} A^2 (BA)^{\#} B + B(AB)^{\#} A^2 (BA)^{\#} A(BA)^{\#}.$$

Bukti: Sama seperti cara Teorema 10.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H. 1987. *Aljabar Linear Elementer Edisi Kelima*. Terj. Dari *Elementary Linear Algebra, Fifth Edition*, oleh Silaban, Ph.D & Susila, I. N. Penerbit Erlangga, Jakarta.

[2] Bu, C, Zhao, J & Zheng, J. 2008. Group Inverse For a class 2×2 Block Matrices Over Skew Fields. *Applied Mathematics and Computation*, 204: 45-49.

[3] Bu, C, Zhao, J & Zhang, K. 2009. Some results on Group Inverses of Block Matrices Over Skew Fields. *Electron. J Linear Algebra*, 18:117-125.

[4] Cullen, C.G. 1991. *Linear Algebra and Differential Equations 2nd edition*. PWS-KEN, massachusets.

[5] Gilbert, J & Gilbert, L. 2009. *Elements of Modern Algebra*. Brooks/Cole, Belmont.