MENENTUKAN PERPANGKATAN MATRIKS TANPA MENGGUNAKAN *EIGENVALUE*

Rini Pratiwi[1*], Rolan Pane[2], Asli Sirait[2]

[1]Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru, 28293, Indonesia

[*]rini.pratiwi89@yahoo.com

ABSTRACT

This paper discusses an algorithm to determine the power of a square matrix, A, without computing its eigenvalues. The algorithm can be used to compute A^n, for each real number n which is greater or equal to two.

Keywords***:*** *characteristic polynomial, Cayley-Hamilton theorem, division algorithm*.

ABSTRAK

Artikel ini membahas sebuah algoritma untuk menentukan perpangkatan matriks bujur sangkar, A, tanpa harus menghitung *eigenvalue* matriks tersebut terlebih dahulu. Algoritma yang dipergunakan dapat digunakan untuk menghitung A^n dengan n bilangan bulat dan bernilai lebih besar atau sama dengan dua.

Kata kunci: *polinomial karakteristik, teorema Cayley-Hamilton, dan algoritma pembagian.*

1. PENDAHULUAN

Perhatikan sistem persaman diferensi linear yang ditulis dalam bentuk sebagai berikut

$$x(n+1) = Ax(n),$$

dengan $x(n) = \left(x_1(n), x_2(n), \cdots, x_k(n)\right)^T \in R^k$, $A = (a_{ij})$adalah matriks berukuran $k \times k$ yang nonsingular, dan mempunyai solusi tunggal $x(n) = A^n$, sebagaimana yang dinyatakan dalam [4].

Menghitung perpangkatan matriks dapat menggunakan metode kesamaan transformasi yang dinyatakan [3] dan beberapa algoritma diantaranya analog diskrit, serta beberapa cara menghitung perpangkatan matriks seperti yang ditulis dalam [4]. Namun, semua cara yang digunakan tersebut menggunakan *eigenvalue*, yang artinya menemukan nilai nol dari polinomial karakteristik dari A. Penghitungan polinomial karakteristik dari Asulit diselesaikan untuk polinomial yang berderajat lima atau lebih.

Pada artikel ini dibagian dua dibahas mengenai polinomial karakteristik pada matriks, kemudian dilanjutkan dibagian tiga menentukan perpangkatan matriks tanpa menggunakan *eigenvalue* yang merupakan review dari artikel yang berjudul "*Avoiding Eigenvalues in Computing Matrix Powers"* oleh Raghib Abu-Saris dan Wajdi Ahmad [5].

2. POLINOMIAL KARAKTERISTIK PADA MATRIKS

Bentuk polinomial karakteristik pada matriks yang merupakan dasar dari teorema Cayley-Hamilton didefinisikan sebagai berikut

Definisi 1 (*Eigenvalue* dan *Eigenvector*) [1, h. 277] Jika Aadalah suatu matriks berukuran $k \times k$maka sebuah vektor tak nol dalam R^kdisebut vektor eigen (*eigenvector*) dari matriks A jika Axadalah kelipatan skalar dari $x$dapat ditulis

$$Ax = \lambda x, \tag{1}$$

untuk skalar sebarang λ. Skalar λ disebut nilai karakteristik (*eigenvalue*) dari Adan $x$disebut vektor eigen dari Ayang bersesuaian dengan λ.

Berdasarkan Definisi 1, untuk mencari nilai karakteristik (*eigenvalue*) matriks Apersamaan (1) dapat dibentuk menjadi

$$Ax = \lambda Ix,$$

atau

$$(\lambda I - A)x = 0. \tag{2}$$

Lihat persamaan (2), nilai karakteristik λ dapat ditentukan dengan menetapkan

$$\det((\lambda I - A) = 0. \tag{3}$$

Persamaan (3) dinamakan persamaan karakteristik dari matriks A. Selanjutnya dapat ditulis menjadi

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0. \tag{4}$$

Persamaan (4) disebut sebagai polinomial karakteristik pada A.

Teorema 2 (Teorema Cayley-Hamilton) [3, h. 119] Misalkan A adalah suatu matriks yang berukuran $k \times k$yang mempunyai polinomial karakteristik

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0,$$

maka

$$p(\lambda) = \textstyle\prod_{j-1}^{k}\left(A - \lambda_j I\right) = 0,$$

atau

$$A^k + a_{k-1}A^{k-1} + a_{k-2}A^{k-2} + \cdots + a_0 I = 0.$$

Bukti:

Misalkan A adalah suatu matriks yang berukuran $k \times k$ dengan bentuk sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix},$$

dari matriks A diperoleh polinomial karakteristik

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \lambda^k.$$

Misalkan

$$E(\lambda) = adj(\lambda I - A) = E_0 + E_1\lambda + \cdots + E_{k-1}\lambda^{k-1},$$

dengan E_i adalah suatu matriks persegi, untuk $i = 0, 1, 2, \cdots, k-1$.

Berdasarkan definisi determinan [1] diperoleh bahwa pada matriks A berlaku

$$(\lambda I - A)adj(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A)\, I. \tag{5}$$

Pada ruas kiri persamaan (5) diperoleh

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)adj(\lambda I - A) &= (\lambda I - A)(E_0 + E_1\lambda + \cdots + E_{k-1}\lambda^{k-1}) \\ &= \lambda E_0 - AE_0 + \lambda^2 E_1 - \lambda AE_1 + \lambda^3 E_2 - \lambda AE_2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\cdots+\lambda^k E_{k-1} - \lambda^{k-1} A E_{k-1} \\
&= -AE_0 + \lambda(E_0 - AE_1) + \lambda^2(E_1 - AE_2) \\
&\quad + \cdots + \lambda^{k-1}(E_{k-2} - AE_{k-1}) + \lambda^k E_{k-1}.
\end{aligned}
$$

Sedangkan dari ruas kanan persamaan (5) diperoleh

$$\det(\lambda I - A) = a_0 I + a_1 \lambda I + a_2 \lambda^2 I + \cdots + a_{k-1}\lambda^{k-1} I + \lambda^k I.$$

Sehingga persamaan (5) menjadi

$$
\begin{aligned}
&-AE_0 + \lambda(E_0 - AE_1) + \lambda^2(E_1 - AE_2) \\
&\quad + \cdots + \lambda^{k-1}(E_{k-2} - AE_{k-1})\lambda^k E_{k-1} = a_0 I + a_1 \lambda I + a_2 \lambda^2 I \\
&\qquad + \cdots + a_{k-1}\lambda^{k-1} I + \lambda^k I.
\end{aligned}
$$

Selanjutnya dengan menyamakan koefisien-koefisien diperoleh

$$
\left.
\begin{array}{ll}
-AE_0 & = a_0 I \\
E_0 - AE_1 & = a_1 I \\
E_1 - AE_2 & = a_2 I \\
\vdots & \\
E_{k-2} - AE_{k-1} & = a_{k-1} I \\
E_{k-1} & = I
\end{array}
\right\}. \tag{6}
$$

Jika matriks identitas pada persamaan (6) berturut-turut dikalikan dari kiri dengan $I, A, A^2, \cdots, A^k$ diperoleh

$$
\left.
\begin{array}{ll}
-AE_0 & = a_0 I \\
AE_0 - A^2 E_1 & = a_1 A \\
A^2 E_1 - A^3 E_2 & = a_2 A^2 \\
\vdots & \\
A^{k-1} E_{k-2} - A^k E_{k-1} & = a_{k-1} A^{k-1} \\
A^k E_{k-1} & = A^k
\end{array}
\right\}. \tag{7}
$$

Sehingga dari persamaan (7) bila kedua ruas dijumlahkan akan diperoleh

$$
\begin{aligned}
&-AE_0 + AE_0 - A^2E_1 + A^2E_1 - A^3E_2 + \cdots + A^{k-1}E_{k-2} - A^kE_{k-1} \\
&\quad + A^kE_{k-1} = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_{k-1}A^{k-1} + A^k.
\end{aligned}
$$

Maka

$$a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_{k-1} A^{k-1} + A^k = 0. \qquad \square$$

Algoritma Pembagian 3 [2, h. 160] Jika $f(\lambda)$ dan $g(\lambda)$ adalah polinom atas F, dengan $g(\lambda) \neq 0$, maka terdapat polinom $q(\lambda)$ dan $r(\lambda)$ atas F, sehingga

$$f(\lambda) = g(\lambda)q(\lambda) + r(\lambda), \text{ dengan } r(\lambda) = 0,$$

atau

$$\deg r(\lambda) < \deg g(\lambda).$$

Polinomial $q(\lambda)$ merupakan hasil bagi dan $r(\lambda)$ adalah sisa pembagian dari polinomial $f(\lambda)$ dan $g(\lambda)$.

Bukti:
Ambil $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_m\lambda^m$, dan $g(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + \cdots + b_n\lambda^n$.
Jika $g(\lambda) \neq 0$, maka $b_i \neq 0$ untuk setiap $i = 0,1,\cdots,n$ dan $\deg g(\lambda) = n$. Jika $f(\lambda) = 0$ maka $q(\lambda) = 0$, dan $r(\lambda) = 0$, dan jika $f(\lambda) \neq 0$ maka $a_m \neq 0$ sehingga $\deg f(\lambda) = m$. Selanjutnya, tunjukkan $q(\lambda)$ dan $r(\lambda)$ dengan menggunakan induksi pada m. Jika $m < n$, maka

$$f(\lambda) = g(\lambda) \cdot 0 + f(\lambda).$$

Jika $q(\lambda) = 0$ maka $r(\lambda) = f(\lambda)$. Kemudian asumsikan $m \geq n$, jika $m = 0$ maka $f(\lambda) = a_0$ dan $g(\lambda) = b_0$, sehingga

$$a_0 = b_0 \cdot b_0^{-1} a_0 + 0,$$

dimana $q(\lambda) = b_0^{-1} a_0$ dan $r(\lambda) = 0$. Kemudian buktikan pernyataan $\deg f(\lambda) = m$, karena fungsi polinomial $f(\lambda)$ yang memiliki pangkat terkecil m, maka

$$f_1(\lambda) = f(\lambda) - a_m b_n^{-1} x^{m-n} g(\lambda),$$

dimana $\deg f_1(\lambda) < \deg f(\lambda)$. Kemudian dalam polinomial $f(\lambda)$ terdapat polinomial $q_1(\lambda)$ dan $r_1(\lambda)$, maka

$$f(\lambda) = g(\lambda) q_1(\lambda) + r_1(\lambda), \text{ dengan } r_1(\lambda) = 0,$$

atau

$$\deg r_1(\lambda) < \deg g(\lambda).$$

Kemudian

$$f(\lambda) - a_m b_n^{-1} x^{m-n} g(\lambda) = g(\lambda) q_1(\lambda) + r_1(\lambda)$$
$$f(\lambda) = g(\lambda)[a_m b_n^{-1} x^{m-n} + q_1(\lambda)] + r_1(\lambda),$$

maka

$$q(\lambda) = a_m b_n^{-1} x^{m-n} + q_1(\lambda) \text{ dan } r(\lambda) = r_1(\lambda). \tag{8}$$

Persamaan (8) membuktikan bahwa $q(\lambda)$ dan $r(\lambda)$ ada. Untuk membuktikan polinomial $q(\lambda)$ dan $r(\lambda)$ adalah polinomial khusus, buktikan bahwa $q^*(\lambda)$ dan $r^*(\lambda)$ juga polinomial pada F, maka

$$f(\lambda) = g(\lambda) q^*(\lambda) + r^*(\lambda),$$

dengan $r^*(\lambda) = 0$ atau $\deg r^*(\lambda) < \deg g(\lambda)$, sehingga

$$g(\lambda) q(\lambda) + r(\lambda) = g(\lambda) q^*(\lambda) + r^*(\lambda),$$

dan

$$g(\lambda)[q(\lambda) - q^*(\lambda)] = r^*(\lambda) - r(\lambda). \tag{9}$$

Ruas kanan dari persamaan (9) adalah nol dengan pangkat terkecil $\deg g(\lambda)$ dan jika ruas kiri juga nol dengan pangkat terkecil $\deg g(\lambda)$, maka juga berlaku $q(\lambda) = q^*(\lambda)$. □

3. MENENTUKAN PERPANGKATAN MATRIKS TANPA MENGGUNAKAN *EIGENVALUE*

Teorema 4 [3] Jika A adalah matriks yang berukuran $k \times k$ dengan polinomial karakteristik$p(\lambda) = \lambda^k + \sum_{j=0}^{k-1} a_j \lambda^j$, maka $A^n = \sum_{j=0}^{k-1} b_j(n) A^j$. Jika $n \geq k$, dengan $b_j(k) = -a_j$dan $b_j(n)$ ditentukan secara berulang $b_j(n+1) = -a_j b_{k-1}(n) + b_{j-1}(n), (n = k, k+1, \cdots)$, dimana $b_{-1}(n) = 0$.Jika $n > k$, $b_j(n)$ dapat diekspresikan sebagai berikut$b_j(n) = (-1)^{n-k+1} \det(T_j(n))$,
dimana $T_j(n)$ adalah matriks berukuran $(n-k+1) \times (n-k+1)$

$$T_j(n) = \begin{pmatrix} \underline{a_j} & \underline{a_{j-1}} & \underline{a_{j-2}} & \underline{\cdots} & \underline{a_{j-n+k}} \\ 1 & a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots & a_{2k-n} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \end{pmatrix},$$

dengan $a_l = 0$, $l = j-1, j-2, \cdots$, untuk setiap $l < 0$.

Bukti:
Diketahui A adalah sebuah matriks yang berukuran $k \times k$ dengan $k \geq 2$ dan misalkan $p(\lambda) = \lambda^k + \sum_{j=0}^{k-1} a_j \lambda^j$ merupakan polinomial karakteristik dari A. Dengan

menggunakan Teorema Cayley-Hamilton yang dinyatakan Teorema 2 diperoleh $p(A) = 0$ dan dengan Algoritma Pembagian yang dinyatakan Algoritma 3 diperoleh

$$A^n = q_n(A)p(A) + r_n(A) = r_n(A), \text{ untuk } n \geq k,$$

dimana q_n merupakan polinomial khusus dan r_n merupakan polinomial sisa yang berderajat paling banyak $k-1$. Oleh karena itu, perpangkatan matriks dapat dihitung sekali pada saat koefisien r_n yang ditentukan. Oleh karena itu, tetapkan

$$r_n(\lambda) = \sum_{j=0}^{k-1} b_j(n)\lambda^j.$$

Karena $A^k = -\sum_{j=0}^{k-1} a_j(n)A^j$, untuk $n = k$ diperoleh

$$\begin{aligned} b_0(k)I + b_1(k)\lambda + b_2(k)\lambda^2 + \cdots + b_{k-1}(k)\lambda^{k-1} \\ = -(a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_{k-1}A^{k-1}). \end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan menyamakan kofisien-koefisien diperoleh

$$\begin{aligned} b_0(k)I &= -a_0 I \\ b_1(k)\lambda &= -a_1 A \\ b_2(k)\lambda^2 &= -a_2 A^2 \\ &\vdots \\ b_{k-1}(k)\lambda^{k-1} &= -a_{k-1}A^{k-1} \end{aligned}$$

karena $p(\lambda) = p(A)$, maka

$$b_j(k) = -a_j,$$

untuk setiap $j = 0,1,2,\cdots,k-1$.

Selain itu,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} b_j(n+1)A^j &= A^{n+1} = AA^n = \sum_{j=0}^{k-1} b_j(n)A^{j+1} \\ &= \sum_{j=1}^{k} b_{j-1}(n)A^j \\ &= b_{k-1}(n)A^k + \sum_{j=1}^{k-1} b_{j-1}(n)A^j \\ &= -a_0 b_{k-1}(n)I + \sum_{j=1}^{k-1}\left[-a_j b_{k-1}(n) + b_{j-1}(n)\right]A^j. \end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan membandingkan koefisien diperoleh

$$b_j(n+1) = -a_j b_{k-1}(n) + b_{j-1}(n), \tag{10}$$

untuk $j = 0,1,\cdots,k-1$ dan $b_{-1}(n) = 0$.

Persamaan (8) merupakan algoritma berulang untuk menghitung perpangkatan matriks tanpa menggunakan *eigenvalue*.

Jika $n > k$, $b_j(n)$ merupakan syarat penentu dari matriks $T_j(n)$ yang mana matriks $T_j(n)$ adalah matriks yang berukuran $(n-k+1) \times (n-k+1)$ yang diberikan sebagai berikut

$$b_j(n) = (-1)^{n-k+1} \begin{cases} a_j & \text{jika } n = k \\ \begin{vmatrix} a_j & a_{j-1} \\ 1 & a_{k-1} \end{vmatrix} & \text{jika } n = k+1 \\ \begin{vmatrix} a_j & a_{j-1} & a_{j-2} \\ 1 & a_{k-1} & a_{k-2} \\ 0 & 1 & a_{k-1} \end{vmatrix} & \text{jika } n = k+2 \\ \begin{vmatrix} a_j & a_{j-1} & a_{j-2} & a_{j-3} \\ 1 & a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} \\ 0 & 1 & a_{k-1} & a_{k-2} \\ 0 & 0 & 1 & a_{k-1} \end{vmatrix} & \text{jika } n = k+3 \\ \vdots & \end{cases}$$

dimana $a_l = 0$, $l = j-1, j-2, \cdots$, jika $l < 0$.
Sehingga, $A^n = \sum_{j=0}^{k-1} b_j(n) A^j$. $\square$

Contoh:
Tentukan perpangkatan matriks A^n jika

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Penyelesaian:
Untuk menghitung perpangkatan matriks tanpa menggunakan *eigenvalue* terlebih dahulu cari polinomial karakteristik dari A.

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ &= \det\left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 2 & \lambda-3 & -1 \\ 3 & -1 & \lambda-4 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda)(\lambda-3)(\lambda-4) + (-1)(-1)(3) + (-1)(2)(-3) \\ &\quad -(3)(\lambda-3)(-1) - (-1)(-1)(\lambda) - (\lambda-4)(2)(-1) \\ p(\lambda) &= \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12. \end{aligned}$$

Diperoleh $a_0 = 12$, $a_1 = 16$, dan $a_2 = -7$. Karena matriks A berorde tiga maka $k = 3$ dan $n \geq k$, sehingga dengan menggunakan Teorema 4 akan ditentukan nilai $b_j(n)$ dengan memasukkan nilai-nilai dari a_j sebagai berikut

$$b_j = (-1)^{n-k+1} \det\left(T_j(n)\right).$$

Untuk $n = 3$, dan $j = 0,1,2$.

$$b_j(3) = (-1)^{3-3+1} \det\left(T_j(3)\right) = (-1) \det\left(T_j(3)\right).$$

- $$\begin{aligned} b_0(3) &= (-1)\det\left(T_0(3)\right) \\ &= (-1)\det(a_0) \\ &= (-1)\det(-12) \\ &= (-1)(-12) \\ &= 12. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} b_1(3) &= (-1)\det\left(T_1(3)\right) \\ &= (-1)\det(a_1) \\ &= (-1)\det(16) \\ &= (-1)(16) \\ &= -16. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} b_2(3) &= (-1)\det\left(T_2(3)\right) \\ &= (-1)\det(a_2) \\ &= (-1)\det(-7) \\ &= (-1)(-7) = 7. \end{aligned}$$

Untuk $n = 4$, dan $j = 0,1,2$.

$$b_j(4) = (-1)^{4-3+1} \det\left(T_j(4)\right) = (-1)^2 \det\left(T_j(4)\right).$$

- $b_0(4) = (-1)^2 \det(T_0(4))$
$= (-1)^2 \det\begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}$
$= a_0 a_2 - a_{-1}$
$= (-12)(-7) - (0)$
$= 84.$
- $b_1(4) = (-1)^2 \det(T_1(4))$
$= (-1)^2 \det\begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}$
$= a_1 a_2 - a_0$
$= (16)(-7) - (-12)$
$= -100.$
- $b_2(4) = (-1)^2 \det(T_2(4))$
$= (-1)^2 \det\begin{pmatrix} a_2 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}$
$= a_2 a_2 - a_1$
$= (-7)(-7) - (16)$
$= 33.$

Hal ini terus dilakukan berulang hingga ke-n.
Catatan:

$$b_0(n) = -3(1+n)2^n + 4 \cdot 3^n$$
$$b_1(n) = (8+5n)2^{n-1} - 4 \cdot 3^n$$
$$b_2(n) = -(2+n)2^{n-1} + 3^n$$

Selanjutnya, masukkan nilai $b_j(n)$ kepersamaan $A^n = \sum_{j=0}^{k-1} b_j(n) A^j$.

- Untuk $n = 3$, maka

$$A^3 = \sum_{j=0}^{2} b_j(3) A^j$$

$= b_0(3)A^0 + b_1(3)A^1 + b_2(3)A^2$

$= (12)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (-16)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} + (7)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}^2$

$= \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -16 & -16 \\ 32 & -48 & -16 \\ 48 & -16 & -64 \end{pmatrix} + (7)\begin{pmatrix} -5 & 4 & 5 \\ -9 & 8 & 5 \\ -14 & 4 & 14 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 12 & -16 & -16 \\ 32 & -36 & -16 \\ 48 & -16 & -52 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -35 & 28 & 35 \\ -63 & 56 & 35 \\ -98 & 28 & 98 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -23 & -12 & 19 \\ -31 & 20 & 19 \\ -50 & 12 & 46 \end{pmatrix}.$

- Untuk $n = 4$, maka
$A^3 = \sum_{j=0}^{2} b_j(3) A^j$
$= b_0(4)A^0 + b_1(4)A^1 + b_2(4)A^2$

$$
\begin{aligned}
&= (84)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + (-100)\begin{pmatrix}0&1&1\\-2&3&1\\-3&1&4\end{pmatrix} + (33)\begin{pmatrix}0&1&1\\-2&3&1\\-3&1&4\end{pmatrix}^2\\
&= \begin{pmatrix}84&0&0\\0&84&0\\0&0&84\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&-100&-100\\200&-300&-100\\300&-100&-400\end{pmatrix} + (7)\begin{pmatrix}-5&4&5\\-9&8&5\\-14&4&14\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}84&-100&-100\\200&-216&-100\\300&-100&-316\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-165&132&165\\-297&264&165\\-462&132&462\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-81&-32&65\\-97&48&65\\-162&32&146\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Lanjutkan hingga ke-n, maka

$$
\begin{aligned}
A^n &= \textstyle\sum_{j=0}^{2} b_j(n)A^j\\
&= b_0(n)A^0 + b_1(n)A^1 + b_2(n)A^2\\
&= -3(1+n)2^n + 4\cdot 3^n \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + (8+5n)2^{n-1}\\
&\qquad -4\cdot 3^n \begin{pmatrix}0&1&1\\-2&3&1\\-3&1&4\end{pmatrix} + -(2+n)2^{n-1} + 3^n \begin{pmatrix}0&1&1\\-2&3&1\\-3&1&4\end{pmatrix}^2\\
&= \begin{pmatrix}2^{n+1}-3^n-n2^{n-1} & n2^{n-1} & -2^n+3^n\\ 2^n-3^n-n2^{n-1} & (n+2)2^{n-1} & -2^n+3^n\\ 2^{n+1}-2\cdot 3^n-n2^{n-1} & n2^{n-1} & -2^n+2\cdot 3^n\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H. 2004. *Aljabar Linier Elementer Edisi Kelima.* Terj. Dari *ElementaryLinear Algebra, Fifth Edition*, Oleh Pantur Silaban & Nyoman Susila I. Penerbit Erlangga, Jakarta.

[2] Durbin, J. R., 2000. *Modern Algebra An Introduction Fourth Edition*. Wiley, Austin.

[3] Elaydi, S.N 1995. *AnIntroduction to Difference Transformation Third Edition*. Springer, New York.

[4] Elaydi, S. N., & Harris, JR., W. A. 1998. On The Computation of A^n. *SIAM REV*, **40**(4):965-971.

[5] Saris, R. A., & Ahmad. W. 2005. Avoiding Eigenvalues in Computing Matriks Powers. *The American Mathematical Monthly*. **112**(5):450-454.