

# **PENAKSIR PRODUK YANG EFISIEN UNTUK RATA-RATA POPULASI PADA SAMPLING ACAK BERSTRATA MENGGUNAKAN BEBERAPA PARAMETER**

Icha Yulia<sup>1\*</sup>, Arisman Adnan<sup>2</sup>, Haposan Sirait<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Mahasiswa Program S1 Matematika

<sup>2</sup>Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau  
Kampus Binawidya Pekanbaru, 28293, Indonesia

\*ichayulia846@yahoo.com

## **ABSTRACT**

This article is a review of the study conducted by Kadilar [Journal of Statistical Planning and Inference, 139:2552-2558]. This article introduces three product estimators for the population mean in stratified random sampling using coefficient of variation, standard deviation, and coefficient of kurtosis. These estimators are biased estimators. Then, the mean square errors of each estimator are compared for showing which one is the most efficient estimator. An example is given at the end of the discussion.

Keywords: *Product estimator, stratified random sampling, mean square error.*

## **ABSTRAK**

Artikel ini adalah tinjauan ulang dari studi yang dilakukan oleh Kadilar [Journal of Statistical Planning and Inference, 139:2552-2558]. Artikel ini memperkenalkan tiga penaksir produk untuk rata-rata populasi pada sampling acak berstrata menggunakan koefisien variasi, simpangan baku, dan koefisien kurtosis. Ketiga penaksir ini merupakan penaksir yang bias. Selanjutnya, *mean square error* dari ketiga penaksir tersebut dibandingkan untuk memperoleh penaksir yang efisien. Sebuah contoh numerik akan diberikan pada akhir pembahasan.

Kata kunci: *Penaksir produk, sampling acak berstrata, mean square error.*

## **1. PENDAHULUAN**

Dalam menaksir parameter digunakan metode sampling dengan hasil data berupa perkiraan. Terdapat berbagai parameter antara lain rata-rata, median, modus, kuartil, dan variansi. Parameter yang akan ditaksir pada pembahasan ini adalah rata-rata populasi. Nilai rata-rata pada sampel merupakan penaksir rata-rata pada populasi. Dalam penggunaan metode sampling ada dua cara, yaitu secara acak (*random*) dan secara tidak acak (*non random*). Ada beberapa metode yang sering digunakan pada sampling secara acak, yaitu sampling acak sederhana (*simple random sampling*) dan sampling acak berstrata (*stratified random sampling*).

Dalam penelitian, sering ditemui anggota populasi yang tidak homogen, sedangkan ketepatan dalam hasil penelitian dipengaruhi oleh keseragaman dari data. Oleh karena

itu, anggota populasi yang tidak homogen tersebut dibentuk menjadi beberapa kelompok atau distratifikasi, dimana unit – unit setiap stratum bersifat homogen. Sampel yang akan diteliti akan diambil secara acak sederhana dari setiap stratum. Cara seperti ini disebut juga dengan sampling acak berstrata [3].

Metode penaksir produk merupakan salah satu teknik untuk meningkatkan ketelitian suatu penaksir dengan mengambil manfaat hubungan dua variabel pendukung  $x_i$  yang berhubungan dengan  $y_i$  untuk setiap unit di dalam sampel. Dengan  $x_i$  adalah unit dari populasi  $X$  dan  $y_i$  adalah unit dari populasi  $Y$ , variabel  $X$  berkorelasi negatif dengan variabel  $Y$ . Penaksir produk untuk rata-rata populasi  $\bar{Y}$  dirumuskan sebagai  $\bar{Y}_p = \bar{y}(\bar{x}/\bar{X})$ .

## 2. SAMPLING ACAK SEDERHANA

Penarikan sampel acak sederhana merupakan suatu metode untuk memilih  $n$  unit sampel dari  $N$  unit populasi, dimana setiap anggotasampel yang berbeda mempunyai kesempatan yang sama untuk dipilih sebagai unit sampel. Adapun pengambilan sampel dengan pengembalian, anggota yang telah terambil dikembalikan lagi ke populasi sehingga memiliki kemungkinan akan terambil kembali menjadi anggota sampel sehingga hasil yang diperoleh kurang representatif. Oleh karena itu, agar karakteristik unit-unit lebih akurat maka dilakukan penarikan sampel acak sederhana tanpa pengembalian.

Untuk menentukan bias dan *Mean Square Error (MSE)* pada sampling acak sederhana digunakan definisi dan teorema.

**Definisi 2.1**[2, hal: 309] Misalkan  $\hat{\beta}$  adalah penaksir untuk  $\beta$ . Penaksir  $\hat{\beta}$  dikatakan bias untuk  $\beta$  jika  $E(\hat{\beta}) \neq \beta$ . Bias penaksir  $\hat{\beta}$  yang dinotasikan dengan  $B(\hat{\beta})$  adalah

$$B(\hat{\beta}) = E(\hat{\beta}) - \beta.$$

Untuk melihat ketelitian dari penaksir bias yaitu dengan membandingkan *MSE* penaksirnya.

**Definisi 2.2** [6, hal: 250] Misalkan  $\hat{\beta}$  adalah penaksir bias untuk  $\beta$ . *Mean Square Error (MSE)* untuk penaksir  $\hat{\beta}$  adalah

$$MSE(\hat{\beta}) = E(\hat{\beta} - \beta)^2.$$

Untuk mengetahui penaksir yang lebih efisien dapat digunakan dengan menentukan efisiensi relatifnya yang didefinisikan sebagai berikut.

**Definisi 2.3** [5, h:272] Misalkan  $\hat{\beta}_1$  dan  $\hat{\beta}_2$  adalah penaksir bias untuk  $\beta$  selanjutnya  $MSE(\hat{\beta}_1)$  dan  $MSE(\hat{\beta}_2)$  adalah *MSE* dari  $\hat{\beta}_1$  dan  $\hat{\beta}_2$ . Maka efisiensi relatif  $\hat{\beta}_1$  terhadap  $\hat{\beta}_2$  dinotasikan  $RE(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$  dan didefinisikan sebagai berikut

$$RE(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = \frac{MSE(\hat{\beta}_2)}{MSE(\hat{\beta}_1)}.$$

Jika efisiensi relatif kecil dari satu, maka dapat disimpulkan bahwa  $\hat{\beta}_1$  lebih efisien dari pada  $\hat{\beta}_2$ .

**Teorema 2.1** [3, h:27] Variansi dari rata-rata sampel acak sederhana tanpa pengembalian  $\bar{y}$  dinotasikan dengan  $V(\bar{y})$  yaitu

$$V(\bar{y}) = \frac{(1-f)}{n} S_y^2,$$

dengan  $f = n/N$  adalah fraksi penarikan sampel dan  $S_y^2$  adalah variansi  $y_i$  dalam sebuah populasi  $Y$ .

**Bukti:** [2, h:27].

**Teorema 2.2** [3, h:29] Jika  $y_i, x_i$  adalah sebuah pasangan yang bervariasi pada unit dalam populasi dan  $\bar{y}, \bar{x}$  adalah rata-rata dari sampel acak sederhana tanpa pengembalian berukuran  $n$ , maka kovariansi dinotasikan dengan  $Cov(\bar{y}, \bar{x})$  yaitu

$$Cov(\bar{y}, \bar{x}) = \frac{N-n}{nN} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{X}).$$

**Bukti:** [3, h:29].

### 3. SAMPLING ACAK BERSTRATA

Penarikan sampling acak berstrata adalah suatu metode pengambilan sampel, dimana populasi berukuran  $N$  distratifikasi menjadi beberapa stratum. Setiap stratum berukuran  $N_h$ , dengan  $h = 1, 2, 3, \dots, k$ . Kemudian sampel diambil secara acak sederhana tanpa pengembalian dari setiap stratum. Ukuran sampel di dalam setiap stratum ke- $h$  dinotasikan dengan  $n_h$ .

Estimasi rata-rata yang digunakan dalam penarikan sampel acak berstrata adalah

$$\bar{y}_{st} = \sum_{h=1}^k \omega_h \bar{y}_h,$$

dengan  $\omega_h = N_h / N$  adalah penimbang stratum ke- $h$  dan  $\bar{y}_h$  adalah rata-rata sampel pada stratum ke- $h$ .

Untuk menentukan bias dan *Mean Square Error (MSE)* pada sampling acak berstrata digunakan teorema variansi dan kovariansi.

**Teorema 3.1** [3, h:105] Untuk penarikan sampel acak berstrata, variansi dari  $\bar{y}_{st}$  adalah

$$V(\bar{y}_{st}) = \sum_{h=1}^k \omega_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h} \frac{S_{yh}^2}{n_h},$$

dengan  $S_{yh}$  merupakan simpangan baku untuk populasi  $Y$  pada stratum ke- $h$ .

**Bukti:** [3, h:105].

**Teorema 3.2** [3, h:129] Jika  $y_i, x_i$  adalah sebuah pasangan yang bervariasi ditetapkan pada unit dalam populasi dan  $\bar{y}_{st}, \bar{x}_{st}$  adalah rata-rata dari sampel acak berstrata berukuran  $n$ , maka kovariansinya adalah

$$Cov(\bar{y}_{st}, \bar{x}_{st}) = \sum_{h=1}^k \omega_h^2 \gamma_h S_{xyh},$$

dengan

$$\gamma_h = \frac{1 - f_h}{n_h},$$

$$S_{xyh} = \frac{\sum_{i=1}^{N_h} (y_{hi} - \bar{Y}_h)(x_{hi} - \bar{X}_h)}{N_h - 1}.$$

**Bukti:** [3, h:129].

#### 4. PENAKSIR PRODUK UNTUK RATA-RATA POPULASI PADA SAMPLING ACAK BERSTRATA

Terdapat tiga penaksir produk yang diajukan oleh Kadilar untuk rata-rata populasi pada sampling acak berstrata dengan menggunakan beberapa parameter populasi yaitu koefisien variasi, simpangan baku, dan koefisien kurtosis [4]. Untuk menentukan penaksir yang lebih efisien antara ketiga penaksir tersebut akan dibandingkan *MSE* dari masing-masing penaksir. *MSE* yang lebih kecil merupakan penaksir yang lebih efisien.

1. Penaksir produk untuk rata-rata populasi dengan menggunakan koefisien variasi yaitu

$$\hat{Y}_1 = \bar{y}_{st} \left( \frac{\bar{x}_{st} + \sum_{h=1}^L \omega_h C_{xh}}{\bar{X} + \sum_{h=1}^L \omega_h C_{xh}} \right).$$

Adapun bias dan *MSE* dari penaksir produk  $\hat{Y}_1$  yaitu

$$B(\hat{Y}_1) \approx \bar{Y}(v_1 V_{1,1})$$

$$MSE(\hat{Y}_1) \approx \bar{Y}^2 (v_1^2 V_{2,0} + 2v_1 V_{1,1} + V_{0,2}),$$

dengan

$$v_1 = \frac{\bar{X}}{\bar{X} + \psi_1},$$

$$V_{1,1} = \frac{\sum_{h=1}^L \omega_h^2 \gamma_h S_{xyh}}{\bar{X}\bar{Y}},$$

$$V_{2,0} = \frac{\sum_{h=1}^L \omega_h^2 \gamma_h S_{xh}^2}{\bar{X}^2},$$

$$V_{0,2} = \frac{\sum_{h=1}^L \omega_h^2 \gamma_h S_{yh}^2}{\bar{Y}^2}.$$

2. Penaksir produk untuk rata-rata populasi dengan menggunakan simpangan baku yaitu

$$\hat{Y}_2 = \bar{y}_{st} \left( \frac{\bar{x}_{st} + \sum_{h=1}^L \omega_h S_{xh}}{\bar{X} + \sum_{h=1}^L \omega_h S_{xh}} \right).$$

Adapun bias dan  $MSE$  dari penaksir produk  $\hat{Y}_2$  yaitu

$$B(\hat{Y}_2) \approx \bar{Y}(v_2 V_{1,1})$$

$$MSE(\hat{Y}_2) \approx \bar{Y}^2 (v_2^2 V_{2,0} + 2v_2 V_{1,1} + V_{0,2}),$$

dengan  $v_2 = \frac{\bar{X}}{\bar{X} + \psi_2}$ .

3. Penaksir produk untuk rata-rata populasi dengan menggunakan koefisien kurtosis yaitu

$$\hat{Y}_3 = \bar{y}_{st} \left( \frac{\bar{x}_{st} + \sum_{h=1}^L \omega_h \beta_{2h(x)}}{\bar{X} + \sum_{h=1}^L \omega_h \beta_{2h(x)}} \right).$$

Adapun bias dan  $MSE$  dari penaksir produk  $\hat{Y}_3$  yaitu

$$B(\hat{Y}_3) \approx \bar{Y}(v_3 V_{1,1})$$

$$MSE(\hat{Y}_3) \approx \bar{Y}^2 (v_3^2 V_{2,0} + 2v_3 V_{1,1} + V_{0,2}).$$

dengan  $v_3 = \frac{\bar{X}}{\bar{X} + \psi_3}$ .

## 5. PENAKSIR PRODUK YANG EFISIEN

Penaksir yang efisien dari penaksir bias dapat ditentukan dengan membandingkan  $MSE$ . Semakin kecil  $MSE$  yang diperoleh maka penaksir tersebut akan semakin efisien.

1. Antara penaksir  $\hat{Y}_1$  dengan penaksir  $\hat{Y}_2$  diperoleh,

$$MSE(\hat{Y}_2) < MSE(\hat{Y}_1),$$

jika

$$\psi_1 < \frac{\bar{X} V_{2,0}}{-V_{1,1} - \sqrt{K}} - \bar{X},$$

dengan

$$K = V_{1,1}^2 - V_{2,0}(-v_2^2 V_{2,0} - 2v_2 V_{1,1}).$$

2. Antara penaksir  $\hat{Y}_1$  dengan penaksir  $\hat{Y}_3$  diperoleh

$$MSE(\bar{Y}_3) < MSE(\hat{Y}_1),$$

jika

$$\bar{X} \left( \frac{V_{2,0}}{-V_{1,1} - \sqrt{L}} - 1 \right) < \psi_3 < \bar{X} \left( \frac{V_{2,0}}{-V_{1,1} + \sqrt{L}} - 1 \right),$$

dengan

$$L = V_{1,1}^2 + V_{2,0} (v_1^2 V_{2,0} + 2v_1 V_{1,1}).$$

3. Antara penaksir  $\hat{Y}_2$  dengan penaksir  $\hat{Y}_3$  diperoleh

$$MSE(\bar{Y}_2) < MSE(\hat{Y}_3),$$

jika

$$\frac{\bar{X} V_{2,0}}{-V_{1,1} - \sqrt{M}} - \bar{X} < \psi_2 < \frac{\bar{X} V_{2,0}}{-V_{1,1} + \sqrt{M}} - \bar{X},$$

dengan

$$M = V_{1,1}^2 - V_{2,0} (-v_3^2 V_{2,0} - 2v_3 V_{1,1}).$$

## 6. CONTOH

Data berikut ini merupakan pengguna alat kontrasepsi dengan angka kelahiran total untuk wanita berstatus kawin usia 15-49 tahun menurut propinsi di Indonesia [1].

Tabel 1: Penggunaan Alat Kontrasepsi dan Angka Kelahiran Total pada Wanita Usia 15-45 Tahun Menurut Propinsi

No.	Propinsi	Pengguna Alat Kontrasepsi (%)	Kelahiran (%)
1	Aceh	46,8	2,8
2	Sumatera Utara	55,9	3,0
3	Sumatera Barat	56,9	2,8
4	Riau	61,1	2,9
5	Jambi	66,9	2,3
6	Kepulauan Riau	53,1	2,6
7	Sumatera Selatan	67,6	2,8
8	Bengkulu	64,2	2,2
9	Lampung	70,3	2,7
10	Bangka Belitung	69,6	2,6
11	DKI Jakarta	57,3	2,3
12	Jawa Barat	62,2	2,5

13	Jawa Tengah	65,2	2,5
14	DI Yogyakarta	69,9	2,1
15	Jawa Timur	65,3	2,3
16	Banten	64,0	2,5
17	Bali	66,2	2,3
18	Nusa Tenggara Barat	56,0	2,8
19	Nusa Tenggara Timur	47,9	3,3
20	Kalimantan Barat	65,1	3,1
21	Kalimantan Tengah	67,3	2,8
22	Kalimantan Selatan	68,3	2,5
23	Kalimantan Timur	60,1	2,8
24	Sulawesi Utara	68,9	2,6
25	Sulawesi Tengah	55,7	3,2
26	Sulawesi Selatan	55,8	2,6
27	Sulawesi Tenggara	51,5	3,0
28	Sulawesi Barat	52,2	3,6
29	Gorontalo	63,2	2,6
30	Sulawesi Barat	52,2	3,6
31	Maluku	45,5	3,2
32	Papua Barat	42,5	3,7
33	Papua	21,8	3,5

Sumber : Badan Kependudukan dan Keluarga Berencana, 2012.

Dengan menggunakan data pada Tabel 1 akan ditentukan penaksir produk yang efisien untuk menaksir rata-rata angka kelahiran. Hal ini secara umum dapat ditunjukkan dengan menghitung *MSE* dari masing-masing penaksir. Untuk menghitung *MSE* dari masing-masing penaksir terlebih dahulu ditentukan nilai yang dibutuhkan. Informasi yang diperoleh dari Tabel 1 yaitu

$\bar{Y} = 2,81$	$\bar{X} = 58,73$	$N = 33$	$n = 9$
$\bar{X}_1 = 40,9$	$S_{x1} = 10,87$	$C_{x1} = 0,27$	$S_{xy1} = -1,32$
$\bar{X}_2 = 54,81$	$S_{x2} = 2,02$	$C_{x2} = 0,04$	$S_{xy2} = -0,36$
$\bar{X}_3 = 65,86$	$S_{x3} = 3,02$	$C_{x3} = 0,05$	$S_{xy3} = -0,29$
$\bar{Y}_1 = 3,3$	$S_{y1} = 0,34$	$C_{y1} = 0,1$	$\beta_{2(x)1} = 7,29$
$\bar{Y}_2 = 2,9$	$S_{y2} = 0,36$	$C_{y2} = 0,13$	$\beta_{2(x)2} = 1,76$
$\bar{Y}_3 = 2,62$	$S_{y3} = 0,28$	$C_{y3} = 0,11$	$\beta_{2(x)3} = 2,25$

Selanjutnya nilai  $MSE$  dari masing-masing penaksir diberikan pada Tabel 2

Tabel 2 : Nilai  $MSE$  untuk ketiga penaksir

Penaksir Produk	$MSE$
$\hat{Y}_1$	0,00895
$\hat{Y}_2$	0,00054
$\hat{Y}_3$	0,00872

Dari Tabel 2 dapat dilihat bahwa

$$MSE(\hat{Y}_2) < MSE(\hat{Y}_3) < MSE(\hat{Y}_1).$$

Dengan kata lain  $MSE(\hat{Y}_2)$  merupakan  $MSE$  paling minimum, sehingga dapat dikatakan bahwa penaksir  $\hat{Y}_2$  lebih efisien dari penaksir  $\hat{Y}_1$  dan penaksir  $\hat{Y}_3$ .

Dengan menggunakan syarat penaksir yang lebih efisien dapat diperoleh bahwa

- (i)  $\hat{Y}_2 < \hat{Y}_1$  jika  $\psi_1 < 238,06$ .
- (ii)  $\hat{Y}_3 < \hat{Y}_1$  jika  $-367,80 < \psi_3 < 58,80$ .
- (iii)  $\hat{Y}_2 < \hat{Y}_3$  jika  $-464,37 < \psi_2 < 60,59$ .

## 7. KESIMPULAN

Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa penaksir produk  $\hat{Y}_2$  merupakan penaksir yang paling efisien dari penaksir  $\hat{Y}_1$  dan penaksir  $\hat{Y}_3$  jika syarat efisien terpenuhi.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Badan Kependudukan dan Keluarga Berencana Nasional. 2012. Survei Demografi dan Kesehatan Indonesia. Available from :[http://www.bkkbn.go.id/laporan\\_skdi\\_2012](http://www.bkkbn.go.id/laporan_skdi_2012). Diakses pada 01 Juli 2014 pukul 11:45.
- [2] Bain, L. J. & Engelhard. M. 1991. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics, Second Edition*. Duxbury Press, California.
- [3] Cochran, W. G. 1991. *Teknik Penarikan Sampel*, Edisi Ketiga. Terj. Dari *Sampling Techniques*, oleh Radiansyah & E. R Osman. Penerbit Universitas Indonesia, Jakarta.
- [4] Kadilar, C. 2009. Ratio and Product Estimators in Stratified Random Sampling. *Journal of Statistical Planning and Inference* 139:2552-2558.

- [5] Montgomery, D. C & G. C Runger. 1999. *Applied Statistics and Probability for Engineers, Second Edition*. John Willey & Sons, New York
- [6] Ramachandran, K. M. & C. P. Tsokos. 2009. *Mathematical Statistics with Applications*. Academic Press. London.