

KOMBINASI PENAKSIR RASIO-PRODUK EKSPONENSIAL UNTUK RATA-RATA POPULASI MENGGUNAKAN PROPORSI PADA SAMPLING GANDA

Nike Syelfina^{1*}, Arisman Adnan², Sigit Sugiarto²

¹Mahasiswa Program S1 Matematika

²Dosen jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*nikesyelfina_08@yahoo.co.id

ABSTRACT

The estimators discussed in this paper are the exponential ratio estimator, the exponential product estimator and the combination of exponential product and exponential ratio estimator on double sampling using proportion which is a review of the article written by Singh et. al. [Pakistan Journal of Statistics and Operations Research, 1(2): 18-32]. The three proposed estimators are biased. Hence, their mean square errors (MSE) are evaluated. Furthermore, the MSE are compared to obtain the most efficient one. Combination of exponential product and exponential ratio estimator on double sampling using proportion is the most efficient estimator among the other estimators.

Keywords: double sampling, proportion, bias, mean square error.

ABSTRAK

Penaksir yang dibahas dalam artikel ini merupakan penaksir rasio eksponensial, penaksir produk eksponensial dan kombinasi penaksir rasio dan produk eksponensial pada sampling ganda menggunakan proporsi yang merupakan review dari artikel yang ditulis oleh Singh et. al [Pakistan Journal of Statistics and Operations Research, 1(2): 18-32]. Ketiga penaksir tersebut merupakan penaksir bias. Kemudian ditentukan *mean square error (MSE)*. Lalu bandingkan *MSE* dari ketiga penaksir untuk memperoleh penaksir yang efisien. Kombinasi penaksir rasio-produk eksponensial pada sampling ganda menggunakan proporsi adalah penaksir yang paling efisien dari dua penaksir lainnya.

Kata kunci: sampling ganda, proporsi, bias, *mean square error*.

1. PENDAHULUAN

Metode pengambilan sampel disebut sampling. Sampling dapat dilakukan dengan dua cara yaitu secara probabilitas dan nonprobabilitas. Sampling probabilitas merupakan

metode pengambilan anggota sampel berdasarkan probabilitas sehingga setiap anggota populasi mempunyai kesempatan yang sama untuk terpilih menjadi anggota sampel. Sampling yang termasuk dalam sampling probabilitas adalah sampling acak sederhana dan sampling ganda.

Penarikan sampel secara acak sederhana adalah suatu cara pengambilan sampel berukuran n unit dari populasi berukuran N unit sedemikian rupa sehingga setiap elemen populasi mempunyai kesempatan yang sama untuk terpilih menjadi anggota sampel. Penarikan sampel dilakukan secara acak tanpa pengembalian agar karakteristik unit sampel dapat mewakili unit populasi.

Pada sampling ganda, pengambilan sampel dilakukan dua kali atau dua tahap. Pada tahap pertama atau biasa disebut sampel tahap pertama, pengambilan sampel dilakukan secara acak sederhana tanpa pengembalian dari suatu populasi yang diteliti. Kemudian, dari sampel tahap pertama ini akan diambil sampel yang pengambilannya juga dilakukan secara acak sederhana tanpa pengembalian [2]. Jika ukuran populasi adalah N , ukuran sampel tahap pertama adalah n' serta ukuran sampel tahap kedua adalah n , maka $n < n' < N$.

Dalam artikel ini, dibahas rata-rata sampel yang merupakan penaksir untuk parameter populasi. Salah satu cara untuk meningkatkan ketelitian penaksiran adalah dengan menggunakan metode penaksir rasio. Metode ini digunakan jika suatu variabel pendukung X yang diketahui berkorelasi positif dengan variabel Y yang diteliti. Metode lain yang digunakan untuk menaksir parameter populasi adalah metode produk. Metode ini digunakan jika suatu variabel pendukung X berkorelasi negatif dengan variabel Y yang diteliti.

2. SAMPLING GANDA

Sampling acak sederhana adalah suatu cara pengambilan sampel berukuran n unit dari populasi berukuran N unit dengan memberikan kesempatan yang sama kepada anggota populasi untuk terpilih menjadi anggota sampel, sehingga banyaknya sampel yang mungkin terbentuk pada sampling acak sederhana adalah C_n^N .

Untuk menentukan bias dan *Mean Square Error (MSE)* pada sampling acak sederhana, digunakan beberapa teorema berikut.

Teorema 1 [2:h. 27] Apabila dari suatu populasi N diambil sampel berukuran n secara acak sederhana tanpa pengembalian, maka variansi dari rata-rata sampel $\bar{y}$ pada sampel acak sederhana adalah

$$Var(\bar{y}) = \frac{S_y^2}{n} \left(\frac{N-n}{N} \right)$$

dengan $S_y^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 / (N-1)$ adalah variansi y_i dalam populasi berkarakter Y .

Bukti [2:h. 27].

Teorema 2 [2: h. 29] Jika y_i dan x_i adalah sebuah pasangan yang bervariasi pada unit dalam populasi serta $\bar{y}$ dan $\bar{x}$ adalah rata-rata dari sampel acak sederhana berukuran n , maka kovariansi $\bar{y}$ dengan $\bar{x}$ adalah:

$$\text{Cov}(\bar{y}, \bar{x}) = \frac{1-f}{n} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{X})$$

Bukti [2:h. 29].

Metode sampling ganda merupakan suatu metode untuk memilih n' unit sampel dari N unit populasi sebagai sampel tahap pertama. Pengambilan sampel dilakukan secara acak sederhana tanpa pengembalian. Selanjutnya dipilih n unit sampel dari sampel tahap pertama yang berukuran n' unit yang disebut dengan sampel kedua. Pengambilan sampel kedua juga dilakukan secara acak sederhana tanpa pengembalian.

Misalkan suatu populasi berukuran N dengan nilai variabel y_i untuk masing-masing unit, $i = 1, 2, 3, \dots, N$ sehingga rata-rata populasi adalah

$$\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i.$$

Rata-rata sampel tahap pertama berukuran n' dengan nilai variabel y_i untuk masing-masing unit dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n'$ adalah

$$\bar{y}' = \frac{1}{n'} \sum_{i=1}^{n'} y_i.$$

Serta rata-rata sampel tahap kedua berukuran n dengan nilai variabel y_i untuk masing-masing unit dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n$ adalah

$$\bar{y}_{ds} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

Variansi rata-rata sampel pada sampling ganda diberikan pada teorema berikut.

Teorema 3 [4:h. 287] Jika sampel pertama diambil secara acak berukuran n' dengan rata-rata sampel adalah $\bar{y}_{ss_i}$, sampel kedua adalah subsampel yang diambil secara acak berukuran n dari sampel pertama dengan rata-rata sampel adalah $\bar{y}_{ds_j}$ dengan populasi berukuran N , maka variansi rata-rata sampel pada sampling ganda adalah

$$\text{Var}(\bar{y}_{ds_j}) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right) S_y^2,$$

dengan $S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2}{N-1}$

Bukti [4:h. 287].

3. PENAKSIR UNTUK RATA-RATA POPULASI MENGGUNAKAN PROPORSI PADA SAMPLING GANDA

Proporsi merupakan perbandingan antara data yang diamati dengan data keseluruhan. Karakteristik pada proporsi dilambangkan dengan atribut ϕ . Menggunakan metode rasio dan produk, atribut ϕ yang merupakan unit dari proporsi P berkorelasi dengan variabel Y yang berada dalam populasi yang sama. Atribut ϕ hanya terdiri dari dua nilai yaitu 0 dan 1. Misalkan setiap unit dalam populasi terletak dalam kelas C dan C' , maka untuk setiap unit dalam sampel atau populasi akan beratribut $\phi_i = 1$ jika unitnya ada dalam C dan $\phi_i = 0$ jika terdapat dalam C' , dengan C dan C' saling asing. Jika $A = \sum_{i=1}^N \phi_i$ adalah jumlah unit yang beratribut ϕ dalam populasi, maka $P = A/N$ adalah proporsi unit populasi. Pada sampel tahap pertama, proporsi unitnya adalah $p' = a'/n'$ dengan $a' = \sum_{i=1}^{n'} \phi_i$ adalah jumlah unit yang memiliki atribut ϕ . Sedangkan pada sampel tahap kedua, proporsi unitnya adalah $p = a/n$ dengan $a = \sum_{i=1}^n \phi_i$ merupakan jumlah unit yang beratribut ϕ .

Penaksir rasio eksponensial untuk rata-rata populasi pada sampling ganda yang diajukan oleh Singh *et. Al* [3] adalah

$$\hat{\bar{Y}}_{rds} = \bar{y} \exp\left(\frac{p' - p}{p' + p}\right). \quad (1)$$

Penaksir produk eksponensial untuk rata-rata populasi pada sampling ganda adalah

$$\hat{\bar{Y}}_{pds} = \bar{y} \exp\left(\frac{p - p'}{p + p'}\right), \quad (2)$$

serta kombinasi penaksir rasio-produk eksponensial pada sampling ganda adalah

$$\hat{\bar{Y}}_{krpds} = \bar{y} \left(\alpha \exp\left(\frac{p' - p}{p' + p}\right) + (1 - \alpha) \exp\left(\frac{p - p'}{p + p'}\right) \right). \quad (3)$$

Ketiga penaksir merupakan penaksir bias, sehingga penaksir yang efisien untuk penaksir bias adalah penaksir yang mempunyai *Mean Square Error (MSE)* terkecil.

4. BIAS DAN MSE PENAKSIR RASIO_PRODUK EKSPONENSIAL UNTUK RATA-RATA POPULASI PADA SAMPLING GANDA

Bias dan *MSE* dari persamaan (1) dapat ditentukan dengan memanfaatkan Teorema 1, Teorema 2 dan Teorema 3. Bias penaksir rasio eksponensial adalah

$$B(\hat{\bar{Y}}_{rds}) = \bar{Y} f_3 \left(\frac{C_p^2}{8} - \frac{C_p^2 K_p}{2} \right).$$

MSE penaksir rasio eksponensial adalah

$$MSE(\hat{f}_{rds}) \approx \bar{Y}^2 \left(f_1 C_y^2 + f_3 \frac{C_p^2}{4} - 4K_p \right).$$

dengan

$$f_1 = \frac{1}{n} - \frac{1}{N}, \quad C_y^2 = \frac{S_y^2}{\bar{Y}^2}, \quad f_3 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n'}, \quad C_p^2 = \frac{S_p^2}{P^2} \text{ dan } K_p = \rho_{yp} \frac{C_y}{C_p}.$$

Bias dan MSE dari persamaan (2) adalah

$$B(\hat{f}_{pds}) = \bar{Y} f_3 \left(\frac{C_p^2}{8} + \frac{C_p^2 K_p}{2} \right)$$

dan

$$MSE(\hat{f}_{pds}) \approx \bar{Y}^2 \left(f_1 C_y^2 + f_3 \frac{C_p^2}{4} + 4K_p \right).$$

Bias dan MSE dari persamaan (3) adalah

$$B(\hat{f}_{krpds}) = \bar{Y} f_3 \frac{C_p^2}{8} \left(1 - 8K_p \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \right)$$

dan

$$MSE(\hat{f}_{krpds}) \approx \bar{Y}^2 \left(f_1 C_y^2 + \left(\alpha - \frac{1}{2} \right)^2 f_3 C_p^2 - 2 \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) f_3 C_p^2 K_p \right). \quad (4)$$

Dengan menentukan nilai optimum dari α pada persamaan (4), sehingga diperoleh

$MSE(\hat{f}_{krpds})_{min}$, yaitu

$$MSE(\hat{f}_{krpds})_{min} \approx \bar{Y}^2 C_y^2 (f_1 - f_3 \rho_{pb}^2).$$

5. PENAKSIR RASIO-PRODUK EKSPONENSIAL YANG EFISIEN

Penaksir yang efisien dari penaksir bias ditentukan dengan membandingkan MSE yang telah diperoleh dari masing-masing penaksir.

1. Antara $\hat{Y}_{pds}$ dengan $\hat{Y}_{rds}$ diperoleh

$$MSE(\hat{f}_{rds}) < MSE(\hat{f}_{pds})$$

Jika $\rho_{pb} > 0$

2. Antara $\hat{Y}_{rds}$ dengan $\hat{f}_{krpds}$ diperoleh

$$MSE(\hat{f}_{krpds})_{min} < MSE(\hat{f}_{rds})$$

3. Perbandingan $\hat{Y}_{pds}$ dengan $\hat{Y}_{krpds \min}$ diperoleh

$$MSE(\hat{Y}_{krpds \min}) < MSE(\hat{Y}_{pds})$$

6. CONTOH

Data berikut mengenai luas lahan panen dan jumlah produksi jagung seluruh provinsi di Indonesia [1]. Data yang diambil adalah data pada tahun 2013 dengan hasil produksi jagung untuk variabel Y , dan luas lahan sebagai variabel tambahan. Proporsi P digunakan untuk menyatakan provinsi dengan luas lahan lebih dari sepuluh ribu hektar.

Tabel 1: Luas Lahan Panen dan Produksi Tanaman Jagung Seluruh Provinsi di Indonesia

No	Provinsi	Luas Lahan Panen (Ha)	Produksi (ribu Ton)
1	Aceh	43.444	175,273
2	Sumatera Utara	211.750	1.183,011
3	Sumatera Barat	81.665	547,417
4	Riau	11.748	28,052
5	Jambi	6.504	25,690
6	Sumatera Selatan	32.558	167,457
7	Bengkulu	18.257	93,988
8	Lampung	346.284	1.760,126
9	Bangka Belitung	237	0,793
10	Kepulauan Riau	339	0,790
11	DKI Jakarta	0	0
12	Jawa Barat	152.923	1.101,997
13	Jawa Tengah	532.061	2.930,911
14	DI Yogyakarta	70.772	289,580
15	Jawa Timur	1.199.544	5.760,959
16	Banten	3.583	12,038
17	Bali	18.223	57,573
18	Nusa Tenggara Barat	110.273	633,773
19	Nusa Tenggara Timur	270.394	707,642
20	Kalimantan Barat	42.597	159,423
21	Kalimantan Tengah	2.083	6,264
22	Kalimantan Selatan	20.629	107,043
23	Kalimantan Timur	2.300	5,826
24	Sulawesi Utara	122.237	448,002
25	Sulawesi Tengah	34.077	138,890
26	Sulawesi Selatan	274.046	1.250,202
27	Sulawesi Tenggara	27.133	67,578
28	Gorontalo	140.423	669,094
29	Sulawesi Barat	26.261	126,407
30	Maluku	3.203	11,940

31	Maluku Utara	10.395	29,421
32	Papua Barat	1.213	2,073
33	Papua	3.005	7,034

Sumber: Badan Pusat Statistik, 2013

Berdasarkan data pada Tabel 1 akan ditentukan penaksir yang efisien untuk menaksir rata-rata Produksi Tanaman Jagung pada tahun 2013 dengan menggunakan syarat penaksir lebih efisien yang diperoleh sebelumnya. Hal ini secara umum dapat ditunjukkan dengan menghitung *MSE* dari masing-masing penaksir. Sebagai informasi tambahan untuk menaksir rata-rata Produksi tanaman jagung digunakan proporsi. Informasi yang diperoleh dari data pada tabel menggunakan Microsoft Excel, yaitu

$$\begin{aligned}
 N &= 33 & n' &= 13 & n &= 6 & \bar{Y} &= 560,796 \\
 P &= 0,697 & S_y &= 1128,609 & S_\phi &= 0,467 & S_{y\phi} &= 167,743 \\
 C_y &= 2,013 & C_p &= 0,67 & K_p &= 0,958 & f_3 &= 0,09 \\
 \rho_{yp} &= 0,318
 \end{aligned}$$

Selanjutnya dapat ditentukan *MSE* dari penaksir yang diberikan pada Tabel 2.

Tabel 2: Nilai *MSE* ketiga penaksir

Penaksir	<i>MSE</i>
$\hat{Y}_{rds}$	164.745,482
$\hat{Y}_{pds}$	188.970,732
$\hat{Y}_{krpds \text{ (min)}}$	162.100,614

Dari Tabel 2 dapat dilihat bahwa

$$MSE(\hat{Y}_{krpds \text{ (min)}}) < MSE(\hat{Y}_{rds}) < MSE(\hat{Y}_{pds})$$

Artinya $MSE(\hat{Y}_{krpds \text{ (min)}})$ merupakan *MSE* terkecil. Sehingga penaksir $\hat{Y}_{krpds \text{ (min)}}$ lebih efisien dibanding penaksir $\hat{Y}_{pds}$ dan penaksir $\hat{Y}_{rds}$.

7. KESIMPULAN

Pada artikel ini telah dibahas tiga penaksir rasio-produk menggunakan proporsi pada sampling ganda. Penaksir yang dibahas merupakan penaksir bias, penaksir yang efisien adalah penaksir yang mempunyai *MSE* terkecil. Setelah membandingkan *MSE* dari ketiga penaksir eksponensial untuk rata-rata populasi pada sampling ganda, diperoleh bahwa *MSE* minimum dari kombinasi penaksir rasio-produk eksponensial merupakan *MSE* terkecil. *MSE* kombinasi penaksir rasio-produk eksponensial minimum diperoleh dengan menentukan nilai α yang optimum. Kombinasi penaksir rasio-produk eksponensial merupakan penaksir yang lebih efisien dibanding penaksir rasio eksponensial dan penaksir produk eksponensial.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Badan Pusat Statistik. 2013. Available from : http://www.bps.go.id/tnmn_pgn. Diakses tanggal 17 Mei 2014 pukul 20.14.
- [2] Cochran, W. G. 1991. *Teknik Penarikan Sampel*, Edisi Ketiga. Terj. Dari *Sampling Techniques*, oleh Rudiansyah & E. R Osman. Penerbit Universitas Indonesia, Jakarta.
- [3] Singh, R. , P. Chauchan, N. Sawan, & F. Smarandache. 2007. Ratio-product Type Exponential Estimator for Estimating Finite Population Mean using Information on Auxiliary Attribute. *Pakistan Journal of Statistics and Operations Research* Vol 1(2): 18-32.
- [4] Sukhatme, P. V. 1957. *Sampling Theory of Surveys with Applications*. The Indian Council of Agricultural Research, New Delhi.