# DIAGRAM DARI PRESENTASI SEMIGRUP $\langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2\rangle$ dan $\langle a, b \mid a^5=a, b^5=b, ab^2=ba^2\rangle$

**Wellya Aziz**[1*]**, Sri Gemawati**[2]**, Asli Sirait**[2]

[1]Mahasiswa Program S1 Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Univeritas Riau
Kampus Bina Widya 28293 Indonesia

*wellyaaziz@gmail.com

## ABSTRACT

In this article we discuss the diagram forms of semigroup presentations $\langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2\rangle$ and $\langle a, b \mid a^5=a, b^5=b, ab^2=ba^2\rangle$. The discussion starts with the word-word outlines of semigroup presentations $\langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2\rangle$ and $\langle a, b \mid a^5=a, b^5=b, ab^2=ba^2\rangle$. Then it is proceeded to make a diagram of word-word description obtained. All of characteristics are expressed in the form of a semigroup diagram theorem. The discussion in this article refers to Guba, V. & M. Sapir. 1996. *Diagram Groups* and Robertson, E. F. & Y. Unlu. 1992. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* 36: 55 – 68.

Keywords: *graph, semigroup, semigroup presentation, word*.

## ABSTRAK

Dalam artikel ini dibahas bentuk-bentuk diagram dari presentasi semigrup $\langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2\rangle$ dan $\langle a, b \mid a^5=a, b^5=b, ab^2=ba^2\rangle$. Pembahasan dimulai dengan menguraikan *word-word* dari presentasi semigrup $\langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2\rangle$ dan $\langle a, b \mid a^5=a, b^5=b, ab^2=ba^2\rangle$. Kemudian dilanjutkan dengan membuat gambar diagram dari uraian *word-word* yang diperoleh. Semua sifat-sifat diagram semigrup dinyatakan dalam bentuk teorema. Pembahasan dalam artikel ini mengacu pada Guba, V. & M. Sapir. 1996. *Diagram Groups* and Robertson, E. F. & Y. Unlu. 1992. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* 36: 55 – 68.

Kata kunci: graf, presentasi semigrup, semigrup, *word*.

## 1. PENDAHULUAN

Gagasan fundamental dari himpunan, pemetaan, operasi biner, dan relasi biner sangat diperlukan untuk mempelajari struktur aljabar. Suatu struktur aljabar (*structure of algebra*) adalah himpunan tak kosong dimana terdapat sedikitnya satu relasi ekivalensi dan satu atau lebih operasi biner dapat didefinisikan di dalamnya. Salah satu kasus struktur aljabar adalah semigrup. Semigrup adalah suatu struktur aljabar dengan operasi biner yang bersifat asosiatif. Operasi biner pada semigrup S sering dinotasikan dengan $*$, yang memetakan tiap pasangan berurutan $(x, y) \in S \times S$ ke suatu elemen $(x, y) \in S$.

Misalkan $X$ adalah himpunan tak kosong yang elemen-elemennya disebut huruf, *word* $W$ adalah barisan huruf-huruf yang berhingga dari $X$. Selanjutnya didefinisikan presentasi semigrup $S$ sebagai pasangan $[X, R]$, dengan $R$ adalah relasi dari *word-word*. Pada operasi permulaan *word*, dua atau beberapa *word* bisa dikatakan ekivalen terhadap presentasi semigrup $S$. Dalam karya tulis ini akan dibentuk diagram-diagram dari presentasi semigrup $\langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2\rangle$, yang diambil dari buku yang berjudul "*Diagram Groups*" karangan Guba dan Sapir [4] dan artikel "On Semigroup Presentations" dari buku *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* 36: 55 – 68, karangan Robertson dan Unlu [8].

## 2. SEMIGRUP DAN GRAF

Konsep-konsep yang dibahas dalam karya tulis ini merupakan materi-materi pendukung yang diambil dari beberapa referensi yaitu:

**Definisi 1 [1] (*Word*)** Misalkan $X$ adalah himpunan tak kosong dan $X \cap X^{-1} = \emptyset$ dengan bijeksi $X \cap X^{-1}$. Maka huruf pada $X$ adalah anggota dari $X \cup X^{-1}$ dan *word* $W$ dalam $X$ merupakan suatu pernyataan

$$W = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_i^{\varepsilon_i} \ldots x_n^{\varepsilon_n}$$

dengan $n \geq 0$, $x_i \in X$, $\varepsilon_i = \pm 1$ dan $0 \leq i \leq n$. Jika $n = 0$, diperoleh *word* kosong yang dinyatakan dengan 1. Jika $\varepsilon_i = 1$ untuk $1 \leq i \leq n$, maka *word* tersebut disebut *word* positif dan jika $\varepsilon_i = -1$ maka *word* tersebut adalah *word* negatif, untuk $1 \leq i \leq n$. Invers dari $W$ ditulis $W^{-1}$ yang merupakan suatu pernyataan

$$W^{-1} = x_n^{-\varepsilon_n} x_{n-1}^{-\varepsilon_{n-1}} \ldots x_i^{-\varepsilon_i} \ldots x_1^{-\varepsilon_1}$$

**Definisi 2 [1] (Perkalian *word*)** Misalkan

$$U = u_1^{\varepsilon_1}\, u_2^{\varepsilon_2} \,\ldots\, u_n^{\varepsilon_n} \text{ dan } V = v_1^{\partial_1}\, v_2^{\partial_2} \,\ldots\, v_n^{\partial_n},$$

dua *word* dalam himpunan $X$. Hasil kali $U$ dan $V$ didefinisikan sebagai

$$UV = u_1^{\varepsilon_1}\, u_2^{\varepsilon_2} \,\ldots\, u_n^{\varepsilon_n} v_1^{\partial_1}\, v_2^{\partial_2} \,\ldots\, v_n^{\partial_n},$$

dengan $(UV)W = U(VW)$ dan $U1 = U = U1$ untuk sebarang $U, V$ dan $W$. Jika $W = u_1u_2u_3$ ($u_1, u_2$ dan $u_3$ *word* dalam $W$) maka $u$ disebut *subword* dari $W$.

**Definisi 3 [1] (Ekivalen pada *word*)** Dua *word* $U$ dan $V$ dalam $X$ adalah ekivalen, ditulis $U \equiv V$, jika $V$ diperoleh dari $U$ dengan menggunakan operasi terhingga, yaitu:

$$U \equiv U_0 \rightarrow U_1 \rightarrow U_2 \rightarrow \cdots \rightarrow U_m \equiv V,$$

sehingga

$$U_i \rightarrow U_{i+1}.$$

**Definisi 4 [2, h.137] (Semigrup)** Suatu himpunan tak kosong $S$ dikatakan semigrup terhadap operasi $*$ yang dinotasikan dengan $(S, *)$ jika memenuhi:

a. Sifat tertutup, yaitu untuk setiap $x, y \in S$ maka $x * y \in S$.
b. Sifat assosiatif, yaitu untuk setiap $x, y, z \in S$ berlaku $x * y * z = x * (y * z)$.

**Definisi 5 [1] (Presentasi semigrup)** Presentasi semigrup $P$ adalah pasangan $\langle X, \mathfrak{R} \rangle$ dengan $X$ suatu himpunan yang elemen-elemennya huruf, sedangkan himpunan $\mathfrak{R}$ dinamakan himpunan relasi. Setiap $R \in \mathfrak{R}$ adalah pasangan $(R_{+1}, R_{-1})$ dengan $R_{+1} \equiv R_{-1}$ merupakan *word* positif dalam $X$ biasanya ditulis $R_{+1} = R_{-1}$.

**Definisi 6 [1] (*Subword*)** Misalkan $P = [X, \mathfrak{R}]$ presentasi semigrup dan $W$ *word* positif dalam $X$. Definisikan operasi permulaan bagi *word* $W$, apabila $W$ merupakan *subword* dari $R_\varepsilon$ dengan $\varepsilon = \pm 1$, $R_{+1}=R_{-1} \in R$, maka ganti $R_\varepsilon$ dengan $R_{-\varepsilon}$.

**Definisi 7 [1] (Ekivalen *word*)** Dua *word* $U$ dan $V$ dalam $X$ disebut ekivalen (relative terhadap presentasi semigrup $P$) jika terdapat suatu barisan hingga word $U_1, U_2, U_3$, sehingga menghasilkan $V$ dari $U$ yang dinyatakan dengan $U =_P V$.

**Definisi 8 [6, h.1] (Graf)** Sebuah graf terdiri dari dua bagian:

1. Sebuah himpunan $V = V(G)$ memiliki elemen-elemen yang dinamakan vertex, titik atau *node*.
2. Sebuah himpunan $E = E(G)$ merupakan pasangan terurut dari vertex-vertex yang berbeda dinamakan *edge* atau sisi.

Ditulis dengan $G(V,E)$ jika menyatakan dua bagian dari $G$.

**Definisi 9 [6, h.7] (Sisi Graf)** Misalkan $e = \{u,v\}$ adalah sebuah sisi dalam $G$, yaitu $u$ dan $v$ adalah titik-titik ujung dari $e$. Maka vertex $u$ dikatakan *adjacent* (berelasi) terhadap vertex $v$ dan sisi $e$ dikatakan *incident* (terhubung) pada $u$ dan pada $v$.

**Definisi 10 [6, h.16] (Subgraf)** Misalkan $G$ sebuah graf, maka $H$ adalah subgraf dari $G$ apabila $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Dengan kata lain, $H(V', E')$adalah sebuah subgraf dari $G(V, E)$ jika $V' \subseteq V$ dan $E' \subseteq E$.

**Defenisi 11 [9, h.66] (Surjektif, injektif, bijektif):**

(1). Diketahui pemetaan $f : A \to B$. Pemetaan $f$ dikatakan surjektif jika dan hanya jika untuk setiap $y \in B$ terdapat $x \in A$ sehingga $y = f(x)$.

(2). Diketahui pemetaan $f : A \to B$. Pemetaan $f$ dikatakan injektif jika dan hanya jika untuk setiap $x, y \in A$ dengan $f(x) = f(y)$ berlaku $x = y$.

(3). Diketahui pemetaan $f : A \to B$. Pemetaan $f$ dikatakan bijektif jika $f$ injektif dan $f$ surjektif.

**Defenisi 12 [9, h.67] (Homomorfisma)** Misalkan $< G, * >$ dan $< H, \cdot >$ adalah suatu semigrup. Pemetaan $f : G \to H$ dinamakan homomorfisma jika $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$ untuk semua $x, y \in G$.

**Definisi 13 [9, h.95] (Isomorfisma)** Misalkan $< G, * >$ dan $< H, \cdot >$ adalah suatu semigrup. Semigrup $G$ isomorfis dengan $H$ jika terdapat pemetaan $f : G \rightarrow H$ sehingga $f$ bijektif dan $f$ homomorfisma, maka $f$ dikatakan isomorfisma.

**Definisi 14 [3, h.95] (Idempoten)** Misalkan $G$ adalah grup dengan operasi perkalian dan $x \in G$, elemen $x$ dikatakan idempoten apabila $x^2 = x$.

## 3. DIAGRAM DARI PRESENTASI SEMIGRUP $\langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2 \rangle$ dan $\langle a, b \mid a^5=a, b^5=b, ab^2=ba^2 \rangle$

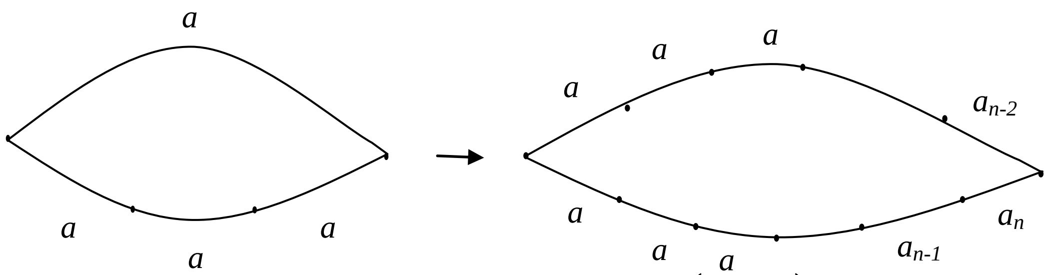
### 3.1 Diagram Dari Presentasi Semigrup $\langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2 \rangle$

Guba dan Sapir telah memberikan uraian tentang diagram semigrup dengan presentasi $P= \langle a, b \mid ab=ba \rangle$. Dalam tulisan ini dengan mengacu uraian yang sama penulis akan membahas bentuk diagram semigrup dengan presentasi $\langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2 \rangle$. Dari presentasi semigrup $\langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2 \rangle$ diperoleh anggota presentasi semigrup $S= \{a, b, a^2, b^2, ab, ba, ab^2, bab, aba, a^2b^2\}$. Anggota-anggota dari $S$ dapat uraikan dan dibentuk diagramnya dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. *Word* awal $a$ dengan presentasi $\langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2 \rangle$ akan diperoleh uraian seperti di bawah ini.

$$a \rightarrow a^3 \rightarrow a^5 \rightarrow \ldots \rightarrow a^{n-2} \rightarrow a^n, \ n \text{ ganjil.}$$

Bentuk diagram uraian dari *word* awal $a$ dengan presentasi $\langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2 \rangle$ akan berbentuk seperti Gambar 1.




Gambar 1: Diagram $(a, aaa) \rightarrow \left(a^{n-2}, a^n\right)$

Jadi, *word* $a^n$ dengan $n$ ganjil akan ekivalen dengan *word* $a$. *Word* $b^n$ dengan $n$ ganjil akan ekivalen juga dengan *word* $b$, karena untuk presentasi $\langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2 \rangle$ dengan *word* awal $b$ dapat diuraikan menjadi

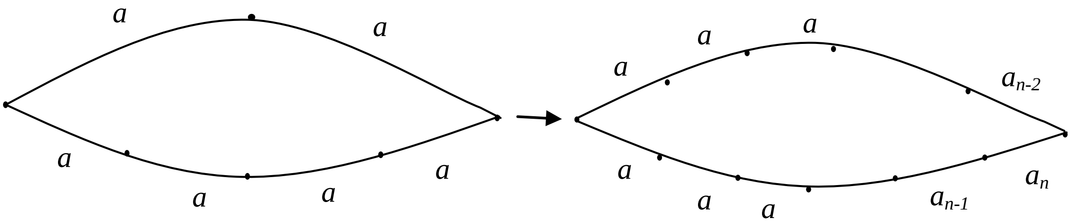
$$b \rightarrow b^3 \rightarrow b^5 \rightarrow \ldots \rightarrow b^{n-2} \rightarrow b^n, \ n \text{ ganjil.}$$

Gambar diagram uraian *word* $b^n$ dengan $n$ ganjil bentuknya sama seperti pada Gambar 1.

2. *Word* awal $a^2$ dengan presentasi $\langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2 \rangle$ diperoleh uraian seperti berikut ini:

$$a^2 \rightarrow a^4 \rightarrow a^6 \rightarrow \ldots \rightarrow a^{n-2} \rightarrow a^n, \ n \text{ genap.}$$

Bentuk diagram dari uraian *word* awal $a^2$ dengan presentasi $\langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2\rangle$ akan berbentuk seperti Gambar 2.




Gambar 2: Diagram $(aa, aaaa) \rightarrow \left(a^{n-2}, a^n\right)$

Jadi, *word* $a^n$ dengan $n$ genap akan ekivalen dengan *word* $a^2$. *Word* $b^n$ dengan $n$ genap akan ekivalen dengan *word* $b^2$ , karena dengan presentasi $\langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2\rangle$, *word* awal $b^2$ dapat diuraikan menjadi:

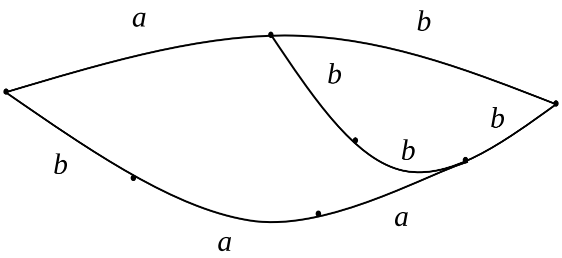
$$b^2 \rightarrow b^4 \rightarrow b^6 \rightarrow \ldots \rightarrow b^{n-2} \rightarrow b^n,\ n \text{ genap}$$

dan untuk diagram dari *word* $b^n$ dengan $n$ genap akan sama bentuknya seperti Gambar 2.

3. *Word* awal $ab$ dengan presentasi $\langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2\rangle$ diperoleh uraian seperti berikut ini:

$$ab \rightarrow ab^3 \rightarrow ba^2b,$$

sehingga uraian dari *word* awal $ab$ dapat dibentuk diagram seperti Gambar 3.




Gambar 3: Diagram ($ab$, $baab$)

*Word* awal $ba$ dengan presentasi $\langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2\rangle$ dapat diuraikan menjadi seperti berikut ini:

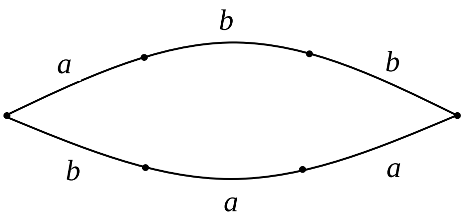
$$ba \rightarrow ba^3 \rightarrow ab^2a.$$

Bentuk diagram dari uraian *word* $ba$ akan sama bentuknya seperti Gambar 3.

4. *Word* awal $ab^2$ dengan presentasi $\langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2\rangle$ diperoleh uraian seperti berikut ini:

$$ab^2 = ba^2,$$

dari uraian *word* awal $ab^2$ dapat dibentuk diagram seperti Gambar 4.

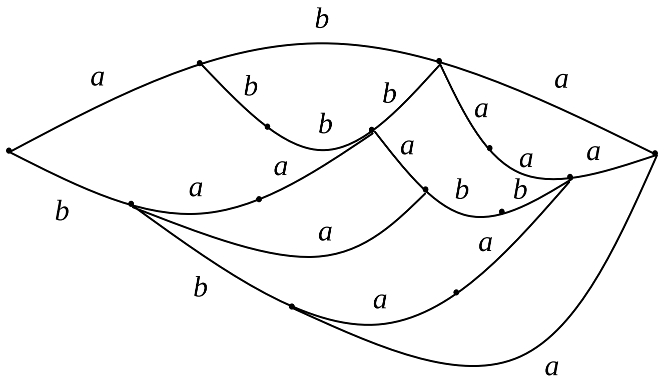



Gambar 4: Diagram ($abb$, $baa$)

5. *Word* awal *aba* dengan presentasi $\langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2\rangle$ diperoleh uraian seperti berikut ini:

$$aba \to ab^3a^3 \to ba^2ab^2a \to bab^2a \to bba^2a \to b^2a.$$

Berdasarkan uraian dari *word* awal *aba* dapat dibentuk diagram seperti Gambar 5.




Gambar 5: Diagram (*aba, bba*)

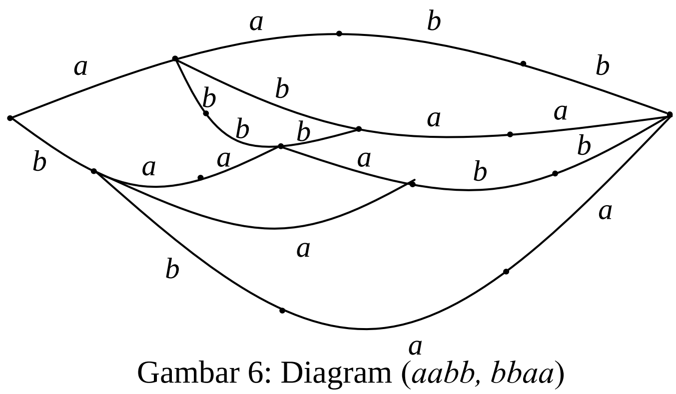
Selanjutnya dapat dibuat diagram untuk *word* awal *bab* seperti langkah-langkah untuk *word* awal *aba*. Bentuk diagram untuk *word* awal *bab* juga akan sama seperti bentuk diagram untuk *word* awal *aba*, karena dari *word* awal *bab* dengan presentasi $\langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2\rangle$ diperoleh uraian seperti berikut ini:

$$bab \to ba^3b^3 \to ab^2ba^2b \to aba^2b \to a^2b^3 \to a^2b.$$

6. *Word* awal $a^2b^2$ dengan presentasi $\langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2\rangle$ diperoleh uraian seperti berikut ini:

$$a^2b^2 \to aba^2 \to ab^3a^2 \to ba^2ab^2 \to bab^2 \to bba^2=b^2a^2.$$

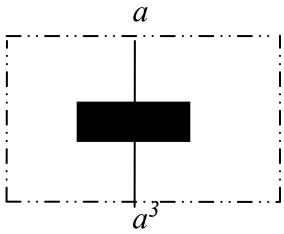
Berdasarkan uraian dari *word* awal $a^2b^2$ dapat dibentuk diagram seperti Gambar 6.




Gambar 6: Diagram (*aabb, bbaa*)

Berdasarkan yang telah diuraikan terlihat bahwa dapat dibuat beberapa bentuk diagram semigrup untuk presentasi semigrup $\langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2\rangle$. Untuk presentasi semigrup $\langle a, b \mid a^5=a, b^5=b, ab^2=ba^2\rangle$ juga dapat dibuat diagram dengan cara yang sama seperti membentuk diagram semigrup untuk presentasi semigrup $\langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2\rangle$.

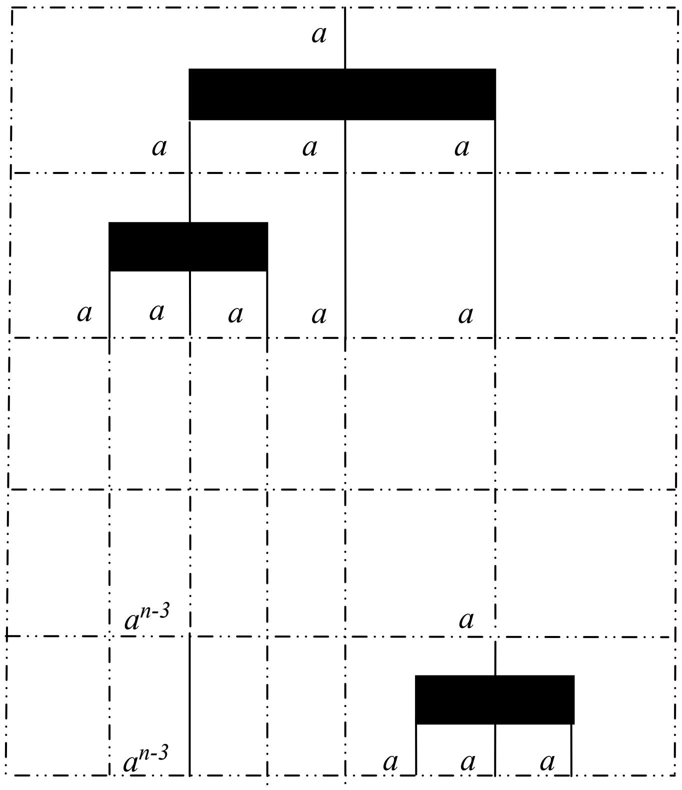
Gambar atom dari presentasi $\langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2\rangle$ dapat dilukiskan seperti Gambar 7, dengan $i(A)=a$ dan $\tau(A)= a^3$.




Gambar 7: Gambar Atom

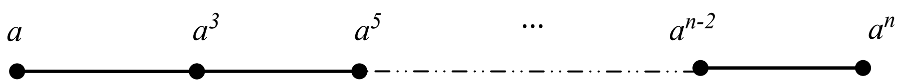
Gambar atom $A$ dalam monoid $M$ berbentuk seperti dalam Gambar 8, yaitu:

$A = \left(a\rightarrow a^3\rightarrow\ldots\rightarrow a^{n-2}\rightarrow a^n\right)$, $i(A)=a^{n-2}$, $\tau(A)=a^n$, dengan $n$ ganjil




Gambar 8: Gambar Monoid

Jika Gambar 8 direpresentasikan dalam bentuk graf, maka vertex awal graf adalah $i(A)=a$ dan vertex akhir graf adalah $\tau(A)=a^n$ dengan $n$ ganjil, jadi graf dari Gambar 8 adalah seperti berikut:




Gambar 9: Graf dari gambar atom $A$

### 3.2 Sifat Dari Presentasi Semigrup $\langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2\rangle$ dan $\langle a, b \mid a^5=a, b^5=b, ab^2=ba^2\rangle$

Pada sub bab 3.1 telah dibahas beberapa bentuk diagram dari presentasi semigrup $\langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2\rangle$. Sedangkan untuk diagram dari presentasi semigrup $\langle a, b \mid a^5=a, b^5=b, ab^2=ba^2\rangle$ dapat dibuat dengan cara yang sama seperti pada sub bab 3.1.

Dalam sub bab 3.2 ini akan diberikan teorema dan pembuktian dari presentasi semigrup

$\langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2\rangle$ dan $\langle a, b \mid a^5=a, b^5=b, ab^2=ba^2\rangle$.

**Teorema 3.2.1 [8]**

Jika $P= \langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2\rangle$, $S$ adalah semigrup $P$. Maka

(a). $G$ adalah grup $P$ yang isomorfik ke $\boldsymbol{Z_2}$.

(b). $|S|=10$ dan $S$ bukan abelian.

**Bukti.**

(a). $G = \langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2\rangle$

$G = \langle a, b \mid a^2=1, b^2=1, ab^2=ba^2\rangle$

$G = \langle a, b \mid a^2=1, b^2=1, a=b\rangle$.

$G = \{1, a\}$ atau $\{1, b\}$

Ambil $G = \{1, a\}$ lalu buat pemetaan $\varphi : G\rightarrow Z_2$ sehingga diperoleh

$\varphi(1)=0$, $\varphi(a)=1$ (bijektif) dan

$\varphi(1 * a) \ = \varphi(1)\ \varphi(a)$

$\varphi(1) \quad = \ (0) \ \ (1)$

$\varphi(1) \quad = \ 0$ (homomorfisma).

Terlihat bahwa pemetaan $\varphi : G\rightarrow Z_2$ bersifat bijektif dan homomorfisma, sehingga $G$ adalah grup $P$ yang isomorfik ke $\boldsymbol{Z_2}$.

(b). Dari uraian pada sub bab 3.1 telah diperoleh anggota dari $S$ adalah $\{a, b, a^2, b^2, ab, ba, ab^2, aba, bab, a^2b^2\}$. Semua unsur di $S$ menghasilkan unsur-unsur yang berbeda. Sehingga terlihat bahwa $|S|=10$ dan $S$ bukan abelian. ■

**Teorema 3.2.2 [8]**

Jika $P= \langle a, b \mid a^5=a, b^5=b, ab^2=ba^2\rangle$, $S$ adalah semigrup $P$. Maka

(a). Idempoten dari $S$ adalah $a^4, b^4, (ab)^2, (ba)^2, a^4b^4$.

(b). Idempoten-idempotennya membentuk suatu subsemigrup.

(c). $|S|=68$ dan $S$ bukan abelian.

**Bukti.**

(a). Dari presentasi $\langle a, b \mid a^5=a, b^5=b, ab^2=ba^2\rangle$ diperoleh idempoten-idempoten dari presentasi semigrup seperti berikut:

(1). Dari $a^5=a$ diperoleh

$$(a^4)^2=a^8=a^5a^3=aa^3=a^4$$

Karena $(a^4)^2=a^4$, maka $a^4$ merupakan idempoten.

(2). Dari $b^5=b$ diperoleh

$$\left(b^4\right)^2=b^8=b^5b^3=bb^3=b^4$$

Karena $\left(b^4\right)^2=b^4$, maka $b^4$ merupakan idempoten.

(3). Karena $a^4$ dan $b^4$ merupakan idempoten, maka $a^4b^4$ juga idempoten.

(4). Dari $ba^2=ab^2$ diperoleh

$$((ab)^2)^2=abababab=abababab^5=ababab^2a^2b^3$$
$$((ab)^2)^2=abab^2a^4b^3=ab^2a^6b^3=ab^2a^2b^3=abab^5=abab=(ab)^2$$

Karena $((ab)^2)^2=(ab)^2$, maka $(ab)^2$ merupakan idempoten.

(5). Dari $ba^2=ab^2$ diperoleh

$$((ba)^2)^2=babababa=babababa^5=bababa^2b^2a^3$$
$$((ba)^2)^2=baba^2b^4a^3=ba^2b^6a^3=ba^2b^2a^3=baba^5=baba=(ba)^2$$

Karena $((ba)^2)^2=(ba)^2$, maka $(ba)^2$ merupakan idempoten.

Berdasarkan apayang telah diuraikan, diperoleh yang merupakan idempoten-idempoten dari $S$ adalah $a^4, b^4, (ab)^2, (ba)^2, a^4b^4$.

(b). Anggota-anggota idempoten dari $S$ juga dapat menjadi suatu subsemigrup. Misalkan $H=\{a^4, b^4, (ab)^2, (ba)^2, a^4b^4\}$, maka akan dapat dibuat tabel operasi seperti pada Tabel 1.

Tabel 1: Tabel Operasi Semigrup

| $H, *$ | $a^4$ | $b^4$ | $(ab)^2$ | $(ba)^2$ | $a^4b^4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a^4$ | $a^4$ | $a^4b^4$ | $(ab)^2$ | $(ba)^2$ | $a^4b^4$ |
| $b^4$ | $a^4b^4$ | $b^4$ | $(ab)^2$ | $(ba)^2$ | $a^4b^4$ |
| $(ab)^2$ | $(ab)^2$ | $(ab)^2$ | $(ab)^2$ | $(ba)^2$ | $(ab)^2$ |
| $(ba)^2$ | $(ba)^2$ | $(ba)^2$ | $(ab)^2$ | $(ba)^2$ | $(ba)^2$ |
| $a^4b^4$ | $a^4b^4$ | $a^4b^4$ | $(ab)^2$ | $(ba)^2$ | $a^4b^4$ |

Berdasarkan Tabel 1 terlihat bahwa $H$ bersifat tertutup, karena operasi antara *word-word*nya menghasilkan *word* yang juga merupakan anggota dari $H$ dan $H$ bersifat asosiatif. Karena $H$ memenuhi sifat-sifat suatu semigrup, maka $H$ merupakan suatu semigrup. Sehingga idempoten-idempoten dari $S$ membentuk suatu subsemigrup.

(c). *Word-word* anggota dari semigrup $S$ yaitu:

$$a, b, ab, ba, a^2, b^2, a^2b, aba, ba^2, b^2a,$$
$$bab, a^3, b^3, a^4, a^3b, a^2ba, aba^2, ba^3, abab, ba^2b,$$
$$baba, bab^2, b^2ab, b^3a, b^4, a^4b, a^3ba, a^2ba^2, aba^3, ba^4,$$
$$a^2bab, aba^2b, ababa, ba^3b, ba^2ba, baba^2, b^2a^3, babab, b^2a^2b, b^2aba,$$
$$b^3a^2, b^3ab, b^4a, a^3ba^2, a^2ba^3, aba^4, a^3bab, a^2baba, aba^3b, aba^2ba,$$
$$ababa^2, ba^4b, ba^3ba, ba^2ba^2, baba^3, b^2a^4, ba^2bab, b^2a^3b, b^2a^2ba, b^2aba^2,$$
$$b^3a^3, b^4a^2, b^3aba, b^3a^2b, b^2abab, a^3b^4, a^4b^3, a^4b^4$$

Dari uraian di atas diperoleh bahwa semigrup $S$ dengan presentasi $\langle a, b \mid a^5=a, b^5=b, ab^2=ba^2\rangle$ memiliki anggota sebanyak 68 buah *word*, atau dapat ditulis $|S|=68$ dan $S$ bukan abelian. ■

## 4. KESIMPULAN

Setelah membahas tentang presentasi semigrup $\langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2\rangle$ dan $\langle a, b \mid a^5=a, b^5=b, ab^2=ba^2\rangle$, maka dapat diambil kesimpulan bahwa dari presentasi semigrup tersebut dapat dibuat beberapa bentuk diagram, gambar atom, gambar monoid, graf serta sifat-sifat dari presentasi semigrup tersebut.

Sifat-sifat dari presentasi semigrup tersebut antara lain

(1). Jika $P = \langle a, b \mid a^3=a, b^3=b, ab^2=ba^2\rangle$ dan $S$ adalah semigrup $P$, maka
- (a). $G$ adalah grup $P$ yang isomorfik ke $\boldsymbol{Z}_2$.
- (b). $|S|=10$ dan $S$ bukan abelian.

(2). Jika $P = \langle a, b \mid a^5=a, b^5=b, ab^2=ba^2\rangle$ dan $S$ adalah semigrup $P$, maka
- (a). Idempoten dari $S$ adalah $a^4, b^4, (ab)^2, (ba)^2, a^4b^4$.
- (b). Idempoten-idempotennya membentuk suatu subsemigrup.
- (c). $|S|=68$ dan $S$ bukan abelian.

## DAFTAR PUSTAKA


[1] Ahmad, A. G. & S. Gemawati. 2004. Graf Kumpulan Gambar Rajah daripada Semikumpulan [*a, b | ab=ba*], *Prosd. Simposium Kebangsaan ke XIII. UIA,* Malaysia.

[2] Gilbert, W. J. & W. K. Nicholson. 2004. *Modern Algebra With Applications.* Jhon Wiley & Sons, Hoboken.

[3] Gilbert, J. & L. Gilbert. 1991. *Elements of Modern Algebra.* PWS-KENT Publishing Company, Boston.

[4] Guba, V. & M. Sapir. 1996. *Diagram Groups*. 14 April 1996: 119 hal. ftp://132.180.22.143/axel/papers/guba:diagram_groups.ps.gz, diakses tanggal 4 Juli 2014.

[5] Harju, T. 1996. *Lecture notes on semigroups*, University of Turku. Finland.

[6] Johnsonbaugh, R. 2002. *Matematika Diskrit*. Prenhallindo, Jakarta.

[7] Lipschutz, S. & M. L. Lipson. 2002. *Matematika Diskrit jilid 2.* Salemba Teknika, Jakarta.

[8] Robertson, E. F. & Y. Unlu. 1992. On Semigroup Presentations, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* 36: 55 – 68

[9] Setiawan, A. 2011. *Aljabar Abstrak (Teori Grup dan Teori Ring).* FMIPA Universitas Kristen Satya Wacana, Salatiga.