METODE ITERASI TIGA LANGKAH DENGAN KEKONVERGENAN BERORDE ENAM BELAS

Ricko Saputra[1*]

[1]Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293) Indonesia

Saputra.ricko73@yahoo.com

ABSTRACT

This article discusses a new method for finding roots of nonlinear equations. The process of forming the new method is derived from combining Newton's method and King's method with $b = -0.5$. Error analysis performed on the new method shows that it has a convergence of order sixteen. Numerical examples are compared to Newton's method, King's method, and the new method.

Keywords: *Orde of convergence, Newton method, King method, iterative method, nonlinear equation.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas metode Baru untuk menemukan akar pendekatan dari persamaan nonlinear. Proses terbentuknya metode Baru ini diperoleh dari mengkombinasikan metode Newton dan metode King dengan $b = -0.5$. Analisa *error* yang dilakukan pada metode Baru menunjukkan bahwa metode Baru ini memiliki orde konvergensi enam belas. Melalui contoh numerik dibandingkan komputasi metode Newton, metode King, dan metode Baru.

Kata kunci: *Orde konvergensi, metode Newton, metode King, metode iterasi, persamaan nonlinear.*

1. PENDAHULUAN

Persoalan matematika yang sering dijumpai dalam menyelesaikan akar persamaan nonlinear, dapat ditulis dalam

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Metode numerik yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan (1) adalah metode Newton. Adapun bentuk metode iterasi Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 0,1,2...,\ \text{dengan } f'(x) \neq 0, \tag{2}$$

yang memerlukan suatu tebakan awal x_0 untuk memulai iterasinya. Apabila tebakan awalnya diambil cukup dekat ke akar a maka metode Newton akan konvergen secara kuadratik.

Para ahli berlomba mencari metode yang paling efektif dan paling efisien. Sehingga metode Newton banyak mengalami modifikasi, seperti yang telah dikembangkan oleh King [2] dengan bentuk iterasi

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(x_n)+bf(y_n)}{f(x_n)+(b-2)f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f'(x_n)}. \tag{3}$$

Dari metode iterasi King persamaan (3) dengan $b = -0.5,$ maka persamaannya menjadi

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = y_n - \frac{2f(x_n)-f(y_n)}{2f(x_n)-5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f'(x_n)}. \tag{4}$$

Pada artikel ini di bagian dua dibahas proses terbentuknya metode iterasi baru dari modifikasi metode Newton dan metode King dengan orde konvergensi enam belas, kemudian dilanjutkan di bagian tiga melakukan analisa kekonvergenan dan di bagian empat melakukan uji komputasi.

2. BEBERAPA METODE ITERASI DASAR

Pada bagian ini diberikan beberapa definisi dasar untuk pembahasan selanjutnya, kemudian dilanjutkan dengan proses terbentuknya metode baru.

Definisi 1 (Persamaan Galat)[3]. Asumsikan bahwa suatu barisan $\{x_n\}$ konvergen ke a. Apabila notasi $e_n = x_n - a$ merupakan galat pada iterasi ke $-n$, yang memenuhi

$$e_{n+1} = -ce_n^p + O(e_n^{p+1}). \tag{5}$$

maka persamaan (5) disebut sebagai persamaan galat, sedangkan nilai p menunjukkan orde konvergensinya.

Definisi 2 (Indeks Efisiensi)[4:h.12]. Misalkan p adalah orde konvergensi dari suatu metode iterasi dan w adalah banyaknya fungsi yang dievaluasi pada setiap iterasinya, maka indeks efisensi dari metode iterasi tersebut adalah $p^{\frac{1}{w}}$.

2.1 Metode Iterasi Baru[5]

Metode Iterasi Baru Tiga Langkah terbentuk dari dua kali penerapan metode King. Penerapan pertama metode King seperti pada persamaan (4), hasil iterasinya dimisalkan dengan z_n, maka bentuk iterasinya

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= y_n - \frac{2f(x_n) - f(y_n)}{2f(x_n) - 5f(y_n)} \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Selanjutnya untuk penerapan kedua, misalkan

$$\left.\begin{aligned} w_n &= z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \\ x_{n+1} &= w_n - \frac{2f(z_n) - f(w_n)}{2f(z_n) - 5f(w_n)} \frac{f(w_n)}{f'(z_n)}. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Dari persamaan (6) dan persamaan (7) dapat ditulis iterasi dalam bentuk

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= y_n - \frac{2f(x_n) - f(y_n)}{2f(x_n) - 5f(y_n)} \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} - \frac{2f(z_n) - f\left(z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}\right)}{2f(z_n) - 5f\left(z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}\right)} \frac{f\left(z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}\right)}{f'(z_n)} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Persamaan (8) disebut Metode Iterasi Baru Tiga Langkah yang memiliki orde konvergensi enam belas. Selanjutnya metode iterasi baru tiga langkah ini dinamakan metode Baru.

3. ANALISA KEKONVERGENAN

Teorema 4 (Orde Konvergensi Metode Baru). Misalkan $a \in I$ akar sederhana dari fungsi $f : I \to R$ yang tediferensial secukupnya pada interval buka I. Jika x_0 cukup dekat ke a, persamaan (6) bagian tiga memiliki orde konvergensi enam belas dengan persamaan galat yaitu

$$e_{n+1} = -c_2^5 c_3^5 e_n^{16} + O(e_n^{17}).$$

Bukti:

Dari orde konvergensi metode King pada persamaan (4), diperoleh

$$z_n = a - c_2c_3e_n^4 + \left(-22c_2c_4 + 66c_2^2c_3 - \frac{72}{2}c_2^4 - 14c_3^2 \right)e_n^5 + O(e_n^6). \tag{9}$$

Dengan mengekspansikan $f(z_n)$ dan $f'(z_n)$ disekitar $z_n = a$, diperoleh

$$\begin{aligned} f(z_n) = f'(a)\Big(& -c_2c_3e_n^4 - \frac{1}{2}(44c_2c_4 - 132c_2^2c_3 + 73c_2^4 + 28c_3^2)e_n^5 + c_2^3c_3^2e_n^8 \\ & + c_2^2c_3(44c_2c_4 - 132c_2^2c_3 + 73c_2^4 + 28c_3^2)e_n^9 \\ & + \frac{1}{4}c_2(44c_2c_4 - 132c_2^2c_3 + 73c_2^4 + 28c_3^2)^2e_n^{10} \\ & - c_2^3c_3^4e_n^{12} - \frac{3}{2}c_2^2c_3^3(44c_2c_4 - 132c_2^2c_3 + 73c_2^4 + 28c_3^2)e_n^{13} \\ & - \frac{3}{4}c_2c_3^2(44c_2c_4 - 132c_2^2c_3 + 73c_2^4 + 28c_3^2)^2e_n^{14} \\ & - \frac{1}{8}c_3(44c_2c_4 - 132c_2^2c_3 + 73c_2^4 + 28c_3^2)^3e_n^{15}) \\ & + c_2^4c_3^4c_4e_n^{16} + O(e_n^{17})\Big), \end{aligned} \tag{10}$$

dan

$$\begin{aligned} f'(z_n) = f'(a)\Big(& 1 - 2c_2^2c_3e_n^4 - c_2(44c_2c_4 - 132c_2^2c_3 + 73c_2^4 + 28c_3^2)e_n^5 \\ & + 3c_2^2c_3^3e_n^8 + 3c_2c_3^2(44c_2c_4 - 132c_2^2c_3 + 73c_2^4 + 28c_3^2)e_n^9) \\ & + \frac{3}{4}c_3(44c_2c_4 - 132c_2^2c_3 + 73c_2^4 + 28c_3^2)^2e_n^{10} \\ & - 4c_2^3c_3^3c_4e_n^{12} - 6c_2^2c_3^2c_4(44c_2c_4 - 132c_2^2c_3 + 73c_2^4 + 28c_3^2)e_n^{13}) \\ & - 3c_2c_3c_4(44c_2c_4 - 132c_2^2c_3 + 73c_2^4 + 28c_3^2)^2e_n^{14} \\ & - \frac{1}{2}c_4(44c_2c_4 - 132c_2^2c_3 + 73c_2^4 + 28c_3^2)^3e_n^{15} + O(e_n^{16})\Big). \end{aligned} \tag{11}$$

Dari persamaan (9), (10) dan (11) diperoleh

$$f\left(z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \right) = f'(a)\big(c_2^3c_3^2e_n^8 + c_2^2c_3(44c_2c_4 - 132c_2^2c_3 + 73c_2^4 + 28c_3^2)e_n^9)$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{4}c_2(44c_2c_4-132c_2^2c_3+73c_2^4+28c_3^2)^2e_n^{10})\\
&+2c_2^3c_3^3(c_2^2-c_3)e_n^{12}\\
&+3c_2^2c_3^2(-44c_2c_3c_4-28c_3^3+160c_2^2c_3^2-205c_2^4c_3\\
&+44c_2^3c_4+73c_2^6)e_n^{13}\\
&+\frac{3}{2}c_2c_3(14080c_2^3c_3^2c_4-18040c_2^5c_3c_4\\
&-1936c_3c_2^2c_4^2-2464c_2c_3^3c_4+1936c_2^4c_4^2\\
&+6424c_2^7c_4+8176c_2^2c_3^4-28904c_2^4c_3^3\\
&+40784c_2^6c_3^2-24601c_2^8c_3+5329c_2^{10}\\
&-784c_3^5)e_n^{14}+\frac{1}{4}(44c_2c_4-132c_2^2c_3+73c_2^4\\
&+28c_3^2)\times(14080c_2^3c_3^2c_4-18040c_2^5c_3c_4\\
&-1936c_3c_2^2c_4^2-2464c_2c_3^3c_4+1936c_2^4c_4^2\\
&+6424c_2^7c_4+8176c_2^2c_3^4-28904c_2^4c_3^3\\
&+40784c_2^6c_3^2-24601c_2^8c_3+5329c_2^{10}\\
&-784c_3^5)e_n^{15}+c_2^4c_3^4(3c_4+5c_2^3-7c_2c_3)e_n^{16}\\
&+O(e_n^{17})). \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Dari persamaan (9), (10), (11) dan (12) diperoleh

$$x_{n+1}=a-c_2^5c_3^5e_n^{16}+O(e_n^{17}). \qquad (13)$$

Karena $e_{n+1}=x_{n+1}-a$, maka

$$e_{n+1}=-c_2^5c_3^5e_n^{16}+O(e_n^{17}). \qquad (14)$$

Persamaan (14) merupakan persamaan galat untuk metode Baru. Menggunakan Definisi 1, maka metode Baru memiliki orde konvergensi enam belas. Berdasarkan Definisi 2, maka indeks efisiensi metode ini adalah $16^{\frac{1}{6}}=1.587$. Selanjutnya dilakukan uji komputasi untuk melihat perbandingan Metode Newton (MN), Metode King (MK), dan Metode Baru (MB). Hasil komputasi selengkapnya dapat dilihat pada Tabel 1.

UJI KOMPUTASI

Tabel 1.Perbandingankomputasi MN, MK, MB

Metode	n	x_{n+1}	$\lvert f(x_n) \rvert$	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
$f(x) = x^3 - 10, x_0 = 18:$				
MN	10	2.1544346900318837	3.36e-20	7.21e-11
MK	5	2.1544346900318837	0.00+00	9.48e-04
MB	3	2.1544346900318837	1.00e-99	9.48e-17
$f(x) = (x-1)^3 - 1, x_0 = 12$				
MN	11	2.0000000000000000	2.01e-26	8.19e-14
MK	5	2.0000000000000000	0.00e+00	1.56e-15
MB	3	2.0000000000000000	0.00e+00	1.56e-15
$f(x) = 2x\cos(x) + x - 3, x_0 = -1.8$				
MN	7	-3.0346643069740450	1.00e-29	1.75e-20
MK	4	-3.0346643069740450	0.00e+00	1.12e-20
MB	2	-3.0346643069740450	2.95e-80	9.92e-06
$f(x) = e^{-x^2+x+3} - x + 2, x_0 = -2.2$				
MN	5	2.4905398276083051	9.70e-24	1.69e-12
MK	4	2.4905398276083051	1.00e-29	6.01e-18
MB	2	2.4905398276083051	4.81e-69	4.68e-05

Berdasarkan uji komputasi pada Tabel 1 dapat diambil kesimpulan bahwa metode Baru lebih unggul dari metode Newton dan metode King, karena jumlah iterasi metode Baru lebih sedikit.

KESIMPULAN

Metode Iterasi Baru Tiga Langkah atau Metode Baru ini diperoleh dari kombinasi metode Newton dan metode King. Metode Baru ini memiliki orde konvergensi enam belas. Berdasarkan uji komputasi, metode Baru lebih cepat dalam menghampiri akar hampirannya, karena jumlah iterasi metode Baru lebih sedikit dibandingkan metode Newton dan metode King.

UCAPAN TERIMA KASIH

Ungkapan terima kasih penulis ucapkan kepada bapak Supriadi Putra, M.Si selaku pembimbing I dan bapak Drs. Agusni selaku pembimbing II yang telah meluangkan waktu, tenaga, dan pikiran dalam memberi bimbingan, arahan, dorongan, dan kesabaran dalam membimbing penulis menyelesaikan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Atkinson, K. E. 1993. *Elementary Numerical Analysis,* 2nd *Ed.* Jhon Wiley & Sons, Inc., New York.

[2]. King, R.F. 1973. A family of fourth order methods for nonlinear equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*.10:876-879.

[3]. Sharma, J.R., guha R.K. & Sharma. R. 2011. Some Modified Newton's method with Fourth-Order Convergence. *Applied Science Research,* 2:240-247

[4]. Traub, J.F. 1964. *Iterative Methods for the Solution of Equation*.Prentice Hall Inc.Englewood Cliffs., New Jersey.

[5] Li, X. Mu, C. Ma, J. & Wang, C. 2010. Sixteenth-Order Method for Nonlinear Equation.*Applied Mathematics and Computation,* 215:3754-3758.