PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN GENERALISASI METODE JACOBI

Sandra Roza[1*], M. Natsir[2], Asli Sirait[2]

[1]Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2]Dosen JurusanMatematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293) Indonesia

*srozza23@yahoo.com

ABSTRACT

Jacobi's method is an iterative method to solve a system of linear equations $Ax = b$. If A is a strictly diagonally dominant matrix, Jacobi's method always converges to a solution $Ax = b$. In this paper,we develop the generalized Jacobi'smethod; by changing, one of the splitting matrices has to be in the form of a bandage diagonal matrix. By assumption that A is a strictly diagonally dominant matrix, we show that the generalized Jacobi's method is always convergent to a solution $Ax = b$.

Keywords**:** *System of linear equations, strictly diagonally dominant matrices, Jacobi's method, generalized Jacobi's method.*

ABSTRAK

Metode Jacobi adalah salah satu metode iterasi untuk menyelesaikan sistem persamaan linear $Ax = b$. Bila - A merupakan matriks diagonal dominan tegas, metode Jacobi selalu konvergen ke solusi $Ax = b$. Dalam penelitian ini metode Jacobi dikembangkan menjadi generalisasi metode Jacobi, yaitu dengan menggeneralisasikan matriks-matriks yang terlibat dalam persamaan metode Jacobi menurut suatu parameter, sehingga hasil *splitting* tidaklah berbentuk diagonal tetapi berbentuk *bandage* diagonal. Berdasarkan asumsi bahwa A merupakan diagonal dominan tegas, mengikuti alur analisis konvergensi metode Jacobi, dibuktikan bahwa generalisasi metode Jacobi juga selalu konvergen kesolusi sistem persamaan linear $Ax = b$.

Kata kunci**:** *Sistem persamaan linear, strictly diagonally dominant, metode Jacobi, generalisasi metode Jacobi*.

1. PENDAHULUAN

Sistem persamaan linear yang terdiri dari m persamaan dengan n variabel $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad &= \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

dengan a_{ij} dan b_i adalah konstanta-konstanta riil, dimana $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$. Sistem persamaan linear dapat ditulis ke dalam bentuk

$$Ax = b, \tag{1}$$

dimana $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dan $x, b \in \mathbb{R}^n$. Misalkan A nonsingular dengan entri diagonal tak nol dan

$$A = D - E - F, \tag{2}$$

dimana D adalah diagonal dari A, E adalah segitiga bawah dari A, dan F adalah segitiga atas dari A. Maka metode Jacobi untuk menyelesaikan persamaan (1) didefinisikan dengan

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(E + F)x^{(k)} + D^{-1}b. \tag{3}$$

Padapersamaan (3) metode Jacobi matriks D haruslah berbentuk diagonal. Mungkinkah matriks D ditukar dengan matrik *bandage* diagonal?. Berdasarkan hal ini, penulis tertarik untuk membahas ulang artikel yang ditulis oleh Davod Khojasteh Salkuyeh dengan judul "*Generalized Jacobi and Gauss-Seidel Methods for Solving Linear Sistem of Equations"*[5].

Adapun struktur tulisan ini adalah pada bagian 2 dikonstruksi generalisasi metode Jacobi, kemudian dibagian 3 dengan analisis kekonvergenan. Dibagian 4 diberikan contoh komputasi numerik dan tulisan ini ditutup dengan suatu kesimpulan.

2. GENERALISASI METODE JACOBI

Misalkan masing-masing persamaan (2) digeneralisasi menurut suatu parameter m dengan $m \in \{1,2, \ldots, n-1\}$. Sehingga,

$$A = D_m - E_m - F_m. \tag{4}$$

persamaan (4) dapat diilustrasikan sebagai berikut:

$$D_m = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots a_{1,m+1} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{m+1,1} & & \ddots & a_{n-m,n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & a_{n,n-m} \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

$$E_m = \begin{pmatrix} & & \\ -a_{m+2,1} & & \\ \vdots & \ddots & \\ -a_{n,1} & \cdots -a_{n-m-1,n} & \end{pmatrix},$$

$$F_m = \begin{pmatrix} & -a_{1,m+2} \cdots & -a_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & -a_{n-m-1,n} \\ & & \end{pmatrix}.$$

Generalisasi metode Jacobi untuk persamaan (4) dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$x^{(k+1)} = D_m^{-1}(E_m + F_m)x^{(k)} + D_m^{-1}b, \tag{5}$$

dengan $J_m = D_m^{-1}(E_m + F_m)$ berperan sebagai iterasi dari generalisasi metode Jacobi.

3. KONVERGENSI

Definisi1.[5]
Sebuah$A = (a_{ij})$ berukuran $n \times n$ dikatakan *strictly diagonally dominant* (SDD) jika

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1,2,\dots,n.$$

Teorema2.[1]
Jika$A = (a_{ij})$ berukuran $n \times n$ SDD maka A nonsingular

Teorema 3. [2]
Misalkan $A = D - E - F$ dan $A(\lambda) = \lambda D - E - F$. Jika A adalah bersifat SDD dan semua $|\lambda| \geq 1$ maka $A_j(\lambda)$ juga bersifat SDD.

Definisi4.[4, h. 269]
Misalkan$V$ adalah ruang vektor atas $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$ dan misalkan $\|\cdot\|$ menyatakan suatu norm vektor pada V. Barisan vektor $x^{(k)}$ dikatakan konvergen ke suatu vektor $x \in V$ jika dan hanya jika $\left\|x^{(k)} - x\right\| \to 0$saat $k \to \infty$.

Teorema5.[3, h. 511]
Misalkan $A = M - N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ suatu nonsingular dan $b \in \mathbb{R}^n$. Jika M nonsingular dan $\rho(M^{-1}N) < 1$, maka iterasi $x^{(k)}$ yang didefinisikan oleh $Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$ konvergen ke $x = A^{-1}b$ untuk sebarang terkaan awal $x^{(0)}$.

Teorema 6.[2]
Misalkan $A = D - E - F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dan $J = D^{-1}(E + F)$ merupakan iterasi metode Jacobi. Jika A adalah yang bersifat SDD maka:
 i. D nonsingular
 ii. $\rho(J) < 1$

Akan dibuktikan konvergensi generalisasi metode Jacobi mengikuti Teorema 6.

Teorema 7.
Misalkan $A = D_m - E_m - F_m \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dan $J_m = D_m^{-1}(E_m + F_m)$ merupakan iterasi metode Jacobi. Jika A adalah yang bersifat SDD maka:
 i. D_m nonsingular
 ii. $\rho(J_m) < 1$

Bukti:
 i. Perhatikan bahwa,

$$D_m = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots a_{1,m+1} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{m+1,1} & & \ddots & a_{n-m,n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & a_{n,n-m} \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix},$$

 Misalkan D_m merupakan diagonal dari A dan setiap diagonal pasti bersifat SDD. Maka, menurut Teorema 2, D_m adalah nonsingular.
 ii. Misalkan λ^* nilai eigen dari $J_m \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pada persamaan (5). Oleh karena itu, λ^* memenuhi persamaan karakteristik

$$\det(\lambda^* I - J_m) = 0.$$

Misalkan A pada SPL (1) ditulis dalam bentuk (4) dan didefinisikan:

$$A_{J_m}(\lambda^*) = \lambda^* D_m - E_m - F_m, \tag{7}$$

dengan memanfaatkan sifat-sifat determinan diperoleh:

$$\begin{aligned}
\det(\lambda^* I - J_m) &= \det(\lambda^* I - D_m^{-1}[E_m + F_m]) \\
&= \det(\lambda^*[D_m^{-1}D_m] - D_m^{-1}[E_m + F_m]) \\
&= \det(D_m^{-1}[\lambda^* D_m - E_m - F_m]) \\
&= \det(D_m^{-1}) \det[\lambda^* D_m - E_m - F_m] \\
&= \det(D_m^{-1}) \det\left(A_{j_m}(\lambda^*)\right).
\end{aligned}$$

Karena A bersifat SDD, maka D_m juga bersifat SDD dan menurut Teorema 2, D_m nonsingular. Karena D_m nonsingular maka terdapat D_m^{-1} dengan $\det[D_m] \neq 0$. Agar $\det(\lambda^* I - J_m) = 0$, haruslah $\det\left(A_{j_m}(\lambda^*)\right) = 0$ atau $A_{j_m}(\lambda^*)$ singular karena $\det(D_m^{-1}) \neq 0$, dengan kata lain, jika $|\lambda^*| \geq 1$ maka $A_{j_m}(\lambda^*)$ bersifat SDD dan $A_{j_m}(\lambda^*)$ nonsingular. Karena dalam kasus $A_{j_m}(\lambda^*)$ singular maka menurut Teorema 2, $A_{j_m}(\lambda^*)$ tidak bersifat SDD. Karena $A_{j_m}(\lambda^*)$ tidak bersifat SDD hanya terpenuhi jika $|\lambda^*| < 1$ atau $\rho(J_m) < 1$.

Karena D_m nonsingular dan $\rho(J_m) < 1$, maka menurut Teorema 5, iterasi generalisasi metode Jacobi juga konvergen ke solusi $x = A^{-1}b$ untuk sebarang tebakan awal.

4. CONTOH

Misal diberikan suatu sistem persamaan linear sebagai berikut

$$\begin{aligned}
10x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 3 \\
-2x_1 + 10x_2 - x_3 - x_4 &= 15 \\
-x_1 - x_2 + 10x_3 - 2x_4 &= 27 \\
-x_1 - x_2 - 2x_3 + 10x_4 &= -9
\end{aligned}$$

Akan dicari solusi SPL tersebut dengan metode Jacobi dan dengan generalisasi metode Jacobi dengan tebakan awal $x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ x_4^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan error $\varepsilon = 0{,}0002$.

Penyelesaian:

Sistem persamaan linear di atas dapat ditulis dalam bentuk $Ax = b$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & 10 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 10 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & 10 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \\ 27 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

Secara analitik, penyelesaian dari SPL ini adalah $x = (1,2,3,0)$. Namun karana A bersifat SDD maka SPL ini dapat diselesaikan secara numerik dengan metode Jacobi dan generalisasi metode Jacobi.

Penyelesaian dengan Metode Jacobi
Dengan menulis $A = D - E - F$, maka diperoleh

$$D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gunakan persamaan (3):

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(E + F)x^{(k)} + D^{-1}b$$

Maka hasil iterasi yang diperoleh adalah sebagai berikut:

Tabel 1. Iterasi dengan Metode Jacobi

n	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.3000	1.5000	2.7000	-0.9000
2	0.7800	1.7400	2.7000	-0.1800
3	0.9000	1.9080	2.9160	-0.0108
4	0.9624	1.9608	2.9592	-0.0360
5	0.9844	1.9848	2.9851	-0.0158
6	0.9938	1.9938	2.9937	-0.0060
7	0.9975	1.9975	2.9975	-0.0024
8	0.9990	1.9990	2.9990	-0.0009
9	0.9996	1.9996	2.9996	-0.0003
10	0.9998	1.9998	2.9994	-0.0001
11	0.9999	1.9999	2.9999	-0.0001
12	1.0000	2.0000	3.0000	0.0000

Karena $\left|x_i^{(12)} - x_i^{(11)}\right| < 0{,}0002$ $,\forall\ i = 1{,}2{,}3{,}4$ maka iterasi dihentikan.

Penyelesaian dengan Generalisasi Metode Jacobi
Untuk menyelesaikan SPL dengan generalisasi metode Jacobi, gunakan persamaan (5)

$$x^{(k+1)} = D_m^{-1}(E_m + F_m)x^{(k)} + D_m^{-1}b$$

Kemudian pilih nilai dari parameter $m \in \{0{,}1{,}2{,}3\}$.

- $m = 0$
  Diperoleh persamaan iterasi
  $$x^{(k+1)} = D_0^{-1}(E_0 + F_0)x^{(k)} + D_0^{-1}b,$$
  Yang merupakan persamaan iterasi metode Jacobi. Oleh karena itu, solusi SPL adalah sama dengan solusi iterasi metode Jacobi
  $$x = (1{,}2{,}3{,}0)$$
  setelah iterasi sebanyak 12 kali.

- $m = 1$
  Diperoleh persamaan iterasi:
  $$x^{(k+1)} = D_1^{-1}(E_1 + F_1)x^{(k)} + D_1^{-1}b,$$
  dengan

$$D_1 = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 10 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka hasil iterasi yang diperoleh adalah sebagai berikut:

Tabel 2. Iterasi dengan Generalisasi Metode Jacobi $m = 1$

n	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.6839	0.9193	2.8249	-0.3350
2	0.9389	1.9496	2.9526	-0.0490
3	0.9888	1.9919	2.9905	-0.0131
4	0.9973	1.9980	2.9982	-0.0023
5	0.9995	1.9996	2.9996	-0.0006
6	0.9999	1.9999	2.9999	-0.0001
7	1.0000	2.0000	3.0000	0.0000

Karena $\left|x_i^{(7)} - x_i^{(6)}\right| < 0{,}0002 \quad , \forall i = 1{,}2{,}3{,}4$ maka iterasi dihentikan.

- $m = 2$

  Diperoleh persamaan iterasi:

$$x^{(k+1)} = D_2^{-1}(E_2 + F_2)x^{(k)} + D_2^{-1}b$$

dengan

$$D_2 = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 10 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 10 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 10 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka hasil iterasi yang diperoleh adalah sebagai berikut:

Tabel 3. Iterasi dengan Generalisasi Metode Jacobi $m = 2$

n	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.9949	1.9861	2.8249	-0.1060
2	0.9887	1.9975	2.9526	-0.0011
3	0.9998	1.9998	2.9905	-0.0012
4	0.9999	1.9999	2.9982	-0.0001
5	1.0000	2.0000	3.0000	0.0000

Karena $\left|x_i^{(5)} - x_i^{(4)}\right| < 0{,}0002 \quad , \forall i = 1{,}2{,}3{,}4$ maka iterasi dihentikan.

5. KESIMPULAN

Dari penelitian ini diperoleh beberapa kesimpulan. Misal diberikan sistem persamaan linear $Ax = b$ dengan *A* bersifat *strictly diagonally dominant* maka barisan vektor yang dibangkitkan oleh iterasi generalisasi metode Jacobi juga konvergen ke vektor x untuk sebarang tebakan awal dengan syarat radius spektral generalisasi metode Jacobi lebih kecil dari satu. Contoh yang diberikan menunjukan bahwa, dengan memilih parameter yang sesuai dengan persyaratan, generalisasi metode Jacobi lebih efisien dari pada metode Jacobi kerena lebih cepat konvergen ke solusi persamaan linear.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Ambrosio, A. 2005. *Properties of Diagonally Dominant Matrix*. http://planetmath.org/encyclopedia/propertiesofdiagonallydominantmatrix.html. 23 november 2013

[2] Bagnara, R. 1995. A Unified Proof For The Convergence of Jacobi and Gauss-Seidel Methods. *Siam Review*. Vol. 37(1) : 93-97

[3] Golub, G.H. 1989. *Matrix Computation*. The Hopkins University Press, London

[4] Horn, R.A dan C.R. Johnson.1985. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press. Cambridge

[5] Salkuyeh D K. 2007. Generalized Jacobi and Gauss-Seidel Methods for Solving Linear Sistem of Equations. *Numerikal Mathematics, A Journal of Chinese Universities, English Series*. 16 (2): 164 – 170.