

# NILAI AKUMULASI ANUITAS BERJANGKA DENGAN ASUMSI *CONSTANT FORCE* PADA STATUS HIDUP GABUNGAN

Desrinaldo<sup>1</sup>, Hasriati<sup>2</sup>, Rolan Pane<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Mahasiswa Program S1 Matematika

<sup>2</sup>Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau

Kampus Bina Widya 28293 Indonesia

\*desrinaldo@gmail.com

## ABSTRACT

This article discusses the accumulated value of the immediate annuity by assuming constant force for  $m$ -times payment per year of two persons who are  $x$  and  $y$  years old in joining term life insurance with joint life status. The constant force assumption is used in determining the accumulated value of the term immediate annuity. The accumulated value of the annuity is influenced by cash value annuity paid by the insurance participants, the interest rate, and the amount of annuity payments made by insurance participants.

Keywords: *accumulation value, cash value annuity, constant force assumption.*

## ABSTRAK

Pada artikel ini dibahas tentang nilai akumulasi anuitas akhir dengan menggunakan asumsi *constant force* untuk pembayaran sebanyak  $m$  kali pertahun dari dua orang peserta asuransi masing-masing berusia  $x$  dan  $y$  tahun, yang mengikuti program asuransi jiwa berjangka pada status hidup gabungan. Dalam menentukan nilai akumulasi anuitas akhir berjangka digunakan asumsi *constant force*. Nilai akumulasi anuitas dipengaruhi oleh nilai tunai anuitas yang dibayarkan oleh peserta asuransi, tingkat bunga dan banyaknya pembayaran anuitas yang dilakukan oleh peserta asuransi.

Kata kunci: *asumsi constant force, nilai akumulasi, nilai tunai anuitas.*

## 1. PENDAHULUAN

Asuransi jiwa gabungan adalah suatu perjanjian asuransi yang berhubungan dengan suatu keadaan dimana hidup matinya seseorang merupakan gabungan dari dua orang atau lebih, misalnya suami dan istri, atau orang tua dan anak [3,h.73].

Besarnya nilai akumulasi yang akan diterima pada masa yang akan datang sebagai hasil dari suatu investasi yang dilakukan pada saat ini di perlukan anuitas hidup. Karena nilai akumulasi merupakan nilai yang akan datang dari anuitas [4,h.29]. Anuitas hidup merupakan suatu pembayaran yang dilakukan selama peserta asuransi masih hidup. Apabila dilakukan pembayaran diakhir periode disebut anuitas hidup akhir.

Pembayaran anuitas bisa dilakukan tiap bulan, kuartal, semester ataupun interval waktu lainnya. Dalam menghitung nilai tunai anuitas hidup dipengaruhi oleh peluang hidup.

Anuitas yang digunakan pada artikel ini adalah anuitas akhir berjangka yaitu serangkaian pembayaran yang dilakukan pada periode yang sama dari batas waktu yang ditentukan yang dilakukan pada akhir periode pembayaran. Pembayaran anuitas bisa dilakukan tiap bulan, kuartal, semester ataupun interval waktu lainnya. Dalam perhitungan nilai tunai anuitas, dapat digunakan beberapa asumsi diantaranya asumsi *constant force* yang di peroleh dari buku karangan Dickson *et al* [1,h.48]. Asumsi *constant force* yaitu asumsi yang menyatakan percepatan mortalita konstan untuk setiap usia.

## 2. ANUITAS HIDUP UNTUK STATUS GABUNGAN DENGAN PEMBAYARAN SEBANYAK $m$ KALI DALAM SETAHUN

Anuitas hidup diperlukan dalam perhitungan nilai akumulasi. Nilai tunai anuitas hidup dipengaruhi oleh peluang hidup.

Berdasarkan asumsi *constant force* [1,h.48]

$$\mu(x) = \mu, \quad x \geq 0 \text{ dan } \mu > 0.$$

Percepatan mortalita dari sekelompok orang yang berusia  $x$  tahun adalah konstan. Sehingga percepatan mortalita untuk usia  $(x + s)$  tahun dinyatakan dengan

$$\mu(x + s) = \mu, \quad x \geq 0 \text{ dan } \mu > 0. \quad (1)$$

Hubungan antara peluang hidup dengan percepatan mortalita adalah sebagai berikut

$${}_t p_x = e^{-\int_0^t \mu(x+s) ds}. \quad (2)$$

Berdasarkan persamaan (1) dan (2), maka peluang orang yang berusia  $x$  tahun akan hidup hingga  $t$  tahun dapat dinyatakan dengan

$${}_t p_x = (p_x)^t. \quad (3)$$

Maka peluang hidup untuk status hidup gabungan berdasarkan asumsi *constant force* pada persamaan (3) dapat dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} {}_t p_{xy} &= (p_x)^t (p_y)^t \\ {}_t p_{xy} &= (p_{xy})^t. \end{aligned} \quad (4)$$

Asumsi dari persamaan (3) dan (4) inilah yang akan digunakan dalam perhitungan nilai tunai anuitas.

Nilai tunai anuitas hidup akhir berjangka  $n$  tahun dari peserta asuransi yang berusia  $x$  tahun dengan pembayaran sebanyak  $m$  kali dalam setahun dinyatakan dengan [2,h.74]

$$a_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{nm} v^{\frac{t}{m}} \frac{1}{m} p_x . \quad (5)$$

Nilai tunai anuitas hidup akhir berjangka  $n$  tahun untuk status gabungan dari peserta asuransi yang berusia  $x$  dan  $y$  tahun dengan pembayaran sebanyak  $m$  kali dalam setahun dinyatakan dengan [3,h.73]

$$a_{xy:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{nm} v^{\frac{t}{m}} \frac{1}{m} p_{xy} . \quad (6)$$

Tingkat bunga nominal diperlukan dalam perhitungan nilai tunai anuitas akhir berjangka dengan menggunakan asumsi *constant force*. Tingkat bunga nominal merupakan tingkat bunga yang periode pembayarannya  $m$  kali dalam setahun yang dinyatakan sebagai berikut

$$i^{(m)} = m \left( (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 \right). \quad (7)$$

Tingkat bunga dapat digunakan dalam perhitungan percepatan pembungaan. Percepatan pembungaan adalah ukuran intensitas bunga pada tiap waktu atau interval waktu yang sangat kecil, dinyatakan dengan  $\delta$ . Jika  $m \rightarrow \infty$  maka diperoleh percepatan pembungaan yang dinyatakan sebagai berikut

$$\delta = \lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)}. \quad (8)$$

Asumsi *constant force* merupakan asumsi yang menggunakan distribusi eksponensial. Maka untuk menyatakan tingkat bunga nominal pada persamaan (7) dalam bentuk eksponensial dapat dinyatakan terlebih dahulu sebagai berikut

$$1+i = \left( 1 + \frac{i^{(m)}}{m} \right)^m . \quad (9)$$

Dengan menggunakan logaritma natural pada ruas kiri dan kanan dalam persamaan (9), maka diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\frac{1}{m} \ln(1+i) = \ln \left( 1 + \frac{i^{(m)}}{m} \right). \quad (10)$$

Selanjutnya dalam bentuk eksponensial, persamaan (10) dapat dinyatakan dengan

$$\exp\left(\frac{1}{m}\ln(i+1)\right) = \exp\left(\ln\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)\right)$$

$$i^{(m)} = m\left(\left(\exp\left(\frac{1}{m}\ln(i+1)\right)\right) - 1\right). \quad (11)$$

Dengan menggunakan deret Maclaurin pada ruas kanan persamaan (11), sehingga persamaan tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut

$$i^{(m)} = m\left(\left(1 + \frac{1}{m}\ln(i+1) + \frac{(\ln(i+1))^2}{2m^2} + \dots\right) - 1\right). \quad (12)$$

Dari persamaan (12), dengan mengambil limit untuk  $m \rightarrow \infty$  diperoleh

$$\lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)} = \ln(i+1). \quad (13)$$

Kemudian berdasarkan persamaan (8) dan persamaan (13), diperoleh

$$\delta = \ln(i+1). \quad (14)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (14) ke persamaan (11), diperoleh tingkat bunga nominalnya sebagai berikut

$$i^{(m)} = m\left(e^{\delta/m} - 1\right). \quad (15)$$

Berdasarkan asumsi pada persamaan (4), nilai tunai anuitas hidup akhir berjangka  $n$  tahun untuk status gabungan pada persamaan (6) dapat dinyatakan sebagai berikut

$$a_{xy:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{nm} v^{t/m} p_{xy}^{t/m}. \quad (16)$$

Persamaan (16) tersebut membentuk suatu deret geometri dengan  $u_1 = 1$  dan  $r = (v(p_{xy}))^{1/m}$ . Karena  $p_{xy}$  merupakan peluang hidup, maka  $(v(p_{xy}))^{1/m} < 1$ . Sehingga berdasarkan jumlah deret geometri, diperoleh nilai tunai anuitas akhir berjangka untuk  $m$  kali pembayaran sebagai berikut

$$a_{xy:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{(p_{xy})^{1/m} (1 - (v(p_{xy}))^n)}{m((1+i)^{1/m} - 1) + m({}_{1/m}q_{xy})}. \quad (17)$$

Substitusikan persamaan (7) ke persamaan (17), sehingga diperoleh sebagai berikut

$$a_{xy:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{(p_{xy})^{1/m} (1 - (v(p_{xy}))^n)}{i^{(m)} + m({}_{1/m}q_{xy})}. \quad (18)$$

Dengan menggunakan tingkat bunga nominal pada persamaan (15), diperoleh nilai tunai anuitas akhir berjangka dengan menggunakan asumsi *constant force* dengan status hidup gabungan

$$a_{xy:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{(p_{xy})^{1/m} (1 - (v(p_{xy}))^n)}{m(e^{\delta/m} - 1) + m({}_{1/m}q_{xy})}. \quad (19)$$

### 3. NILAI AKUMULASI ANUITAS AKHIR BERJANGKA PADA STATUS GABUNGAN

Nilai akan datang dari anuitas disebut juga nilai akumulasi anuitas [4,h.29]. Nilai akumulasi merupakan total nilai sejumlah dari serangkaian pembayaran pada waktu tertentu. Nilai akumulasi anuitas dapat digunakan untuk mengevaluasi jumlah uang yang diterima pada masa yang akan datang sebagai hasil dari suatu investasi yang dilakukan pada saat ini.

Anuitas yang digunakan dalam artikel ini adalah anuitas hidup, maka nilai akumulasi yang digunakan adalah nilai akumulasi anuitas hidup yang merupakan total nilai akumulasi dari serangkaian pembayaran pada waktu tertentu dengan memperhitungkan peluang hidup seseorang.

Nilai akumulasi anuitas akhir berjangka dengan pembayaran sebanyak  $m$  kali dalam setahun pada status gabungan adalah nilai total dari sejumlah pembayaran yang besarnya tetap pada setiap akhir periode pembayaran dan dipengaruhi oleh peluang hidup yang berusia  $x$  dan  $y$  tahun dan dilakukan diakhir periode yang dinyatakan dengan

$$s_{xy:\overline{n}|}^{(m)} = S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1} + S_n. \quad (20)$$

$S_1, S_2, \dots, S_{n-1}, S_n$  merupakan nilai akumulasi waktu pertama hingga waktu ke  $n$  tahun. Nilai  $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}, S_n$  bergantung kepada jenis anuitas yang digunakan. Pada artikel ini anuitas yang digunakan yaitu anuitas akhir berjangka pada status hidup gabungan yang dinyatakan pada persamaan (6). Nilai akumulasi anuitas akhir berjangka pada status gabungan dinyatakan dengan garis waktu sebagai berikut

|                   |   |                         |                         |     |                        |                      |
|-------------------|---|-------------------------|-------------------------|-----|------------------------|----------------------|
| Waktu             | 0 | 1                       | 2                       | ... | $nm - 1$               | $nm$                 |
|                   |   |                         |                         |     |                        |                      |
| Besar Pembayaran  |   | $\frac{1}{m}$           | $\frac{1}{m}$           | ... | $\frac{1}{m}$          | $\frac{1}{m}$        |
| Besar Pokok Bunga |   | $(1+i)^{n-\frac{1}{m}}$ | $(1+i)^{n-\frac{2}{m}}$ | ... | $(1+i)^{\frac{1}{m}}$  | 1                    |
| Peluang           |   | $\frac{1}{m} p_{xy}$    | $\frac{2}{m} p_{xy}$    | ... | $\frac{n-1}{m} p_{xy}$ | $\frac{n}{m} p_{xy}$ |
|                   |   | ↓                       | ↓                       |     | ↓                      | ↓                    |
| Nilai Akumulasi   |   | $S_1$                   | $S_2$                   | ... | $S_{n-1}$              | $S_n$                |

Gambar 1. Garis waktu dari nilai akumulasi anuitas akhir berjangka untuk pembayaran  $m$  kali dalam setahun gabungan.

Berdasarkan garis waktu pada Gambar 1, maka persamaan (20) menjadi

$$s_{xy:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}(1+i)^{n-\frac{1}{m}} \frac{1}{m} p_{xy} + \frac{1}{m}(1+i)^{n-\frac{2}{m}} \frac{2}{m} p_{xy} + \dots + \frac{1}{m}(1+i)^{\frac{1}{m}} \frac{n-1}{m} p_{xy} + \frac{1}{m} p_{xy}. \quad (21)$$

Selanjutnya persamaan (21) dapat dinyatakan sebagai berikut

$$s_{xy:\overline{n}|}^{(m)} = (1+i)^n \frac{1}{m} \left( v^{\frac{1}{m}} \frac{1}{m} p_{xy} + v^{\frac{2}{m}} \frac{2}{m} p_{xy} + \dots + v^{\frac{n-1}{m}} \frac{n-1}{m} p_{xy} + v^n p_{xy} \right). \quad (22)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (6) ke persamaan (22), maka diperoleh

$$s_{xy:\overline{n}|}^{(m)} = (1+i)^n a_{xy:\overline{n}|}^{(m)}. \quad (23)$$

Subtitusikan persamaan (19) ke persamaan (23) untuk menentukan nilai tunai anuitas akhir berjangka dengan  $m$  kali pembayaran berdasarkan asumsi *constant force*, diperoleh

$$s_{xy:\overline{n}|}^{(m)} = (1+i)^n \frac{(p_{xy})^{\frac{1}{m}} (1 - (v(p_{xy}))^n)}{m(e^{\frac{\delta}{m}} - 1) + m(\frac{1}{m} q_{xy})}. \quad (24)$$

**Contoh** Pak Edi yang berusia 43 tahun bersama istrinya berusia 42 tahun mengikuti program asuransi jiwa untuk status gabungan dengan tingkat bunga sebesar 5% dan besar pembayaran tiap tahun adalah Rp2.000.000. Akan ditentukan besarnya nilai akumulasi yang akan diterima setelah 10 tahun kemudian, Jika nilai tunai anuitas akhir

berjangka untuk status gabungan dengan pembayaran dilakukan setiap 3 bulan di akhir periode menggunakan asumsi *constant force*.

**Langkah 1.** Menentukan nilai tunai anuitas berdasarkan asumsi *constant force*.

Berdasarkan tabel mortalita Indonesia 1999 diperoleh peluang hidup laki-laki dan perempuan yaitu  $p_{43} = 0,9972050$  dan  $p_{42} = 0,9980324$ . Dengan pembayaran dilakukan setiap 3 bulan maka banyaknya pembayaran dalam setahun adalah  $m = 4$ ,

tingkat bunga sebesar  $i = 5\%$ , faktor diskon sebesar  $v = \frac{1}{1 + 0,05} = 0,9523$ .

Nilai tunai anuitas akhir berjangka dengan pembayaran 4 kali dalam setahun pada status gabungan. Berdasarkan persamaan (19), maka diperoleh

$$a_{43:42:\overline{10}|}^{(4)} = \frac{(p_{xy})^{1/4} (1 - (v(p_{xy}))^n)}{4(e^{\frac{\ln(1,05)}{4}} - 1) + 4({}_{1/4}q_{xy})}.$$

Kemudian berdasarkan data pada Tabel Mortalita Indonesia Tahun 1999, maka

$$\begin{aligned} a_{43:42:\overline{10}|}^{(4)} &= \frac{((0,9952428994))^{1/4} (1 - (0,9253)((0,9952428994))^{1/4})}{0,0490889376 + 4(0,0011914026)} \\ &= \frac{0,5606828549}{0,053854544} \\ a_{43:42:\overline{10}|}^{(4)} &= 10,4110593695. \end{aligned}$$

Sehingga nilai tunai anuitas akhir berjangka berdasarkan asumsi *constant force* selama 10 tahun dengan pembayaran tiap tahun Rp2.000.000 menjadi

$$a_{43:42:\overline{10}|}^{(4)} = \text{Rp}20.822.118,74.$$

**Langkah 2.** Menentukan nilai akumulasi asuransi jiwa gabungan berjangka.

Nilai akumulasi anuitas akhir berjangka dengan asumsi *constant force* dari peserta asuransi yang berusia 43 dan 42 tahun untuk pembayaran 4 kali dalam setahun. Berdasarkan persamaan (25), maka diperoleh

$$s_{43:42:\overline{10}}^{(4)} = (1 + 0,05)^{10} \frac{(p_{43:42})^{1/4} (1 - (v(p_{43:42}))^{10})}{4(e^{\frac{\ln(1,05)}{4}} - 1) + 4({}_{1/4}q_{43:42})}$$

$$= (1,6288946268) \text{Rp}20.822.118,74$$

$$s_{43:42:\overline{10}}^{(4)} = \text{Rp}33.917.037,33.$$

Sehingga, nilai akumulasi anuitas akhir berjangka pada status gabungan dengan asumsi *constant force* untuk pembayaran 4 kali dalam setahun yang akan diterima oleh sepasang suami istri tersebut adalah Rp33.917.037,33.

#### 4. KESIMPULAN

Kesimpulan yang penulis dapatkan dari pembahasan yang ada yaitu besarnya nilai akumulasi yang akan diterima peserta asuransi jiwa dipengaruhi oleh nilai tunai anuitas hidupnya. Dalam perhitungan nilai tunai anuitas hidup dipengaruhi oleh peluang hidup. Peluang hidup dengan menggunakan asumsi *constant force* nilainya lebih besar daripada peluang hidup yang dihitung dari tabel mortalita. Oleh karena itu, semakin besar peluang hidup peserta asuransi maka anuitas hidupnya juga akan semakin besar sehingga menyebabkan nilai akumulasinya menjadi kecil. Berdasarkan hal tersebut maka nilai akumulasi anuitas berjangka dengan asumsi *constant force* pada status hidup gabungan nilainya lebih kecil dari pada nilai akumulasi anuitas berjangka dengan asumsi *constant force* pada status hidup perorangan.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1] Dickson, D.C.M., M.R. Hardy, & H.R. Waters. 2009. *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. Cambridge University Pres, Cambridge.
- [2] Futami, T. 1993. *Matematika Asuransi Jiwa, Bagian 1*. Terj. dari Seimei Hoken Sugaku, Jokan ("92 Revision), oleh Herliyanto, G. Penerbit Incorporated Foundation Oriental Life Insurance Cultural Development Center, Japan.
- [3] Futami, T. 1994. *Matematika Asuransi Jiwa, Bagian II*. Terj. dari Seimei Hoken Sugaku, Gekan ("92 Revision), oleh Herliyanto, G. Penerbit Incorporated Foundation Oriental Life Insurance Cultural Development Center, Japan.
- [4] Kellison, S. G. 1991. *The Theory of Interest*. McGraw-Hill, New York.