KONSTRUKSI SEDERHANA METODE ITERASI BARU ORDE TIGA

Dedi Mangampu Tua[1*], Syamsudhuha[2], Asmara Karma[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Laboratorium Matematika Terapan, Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

[*]dedimt.aritonang@gmail.com

ABSTRACT

We discuss two modifications of Newton's methods for solving a nonlinear equation, constructed from two known third-order iterative methods. Our approach is to approximate a derivative from the improvement of the two known third-order iterative methods. Analytically it is shown that each modification of Newton's method has third order of convergence, and it requires three function evaluations per iteration. Therefore, its efficiency index is 1.414, which is the same as Newton's method. Numerical examples show both methods are competitive with known third-order methods.

Keywords: *Newton's method, iterative method, order of convergence, nonlinear equation.*

ABSTRAK

Artikel ini mendiskusikan dua modifikasi metode Newton untuk menyelesaikan persamaan nonlinear, yang diturunkan dari dua metode iterasi orde tiga yang sudah ada. Teknik pendekatan penemuan metode adalah dengan menaksir turunan melalui perbaikan dari metode iterasi yang telah ada. Secara analitik ditunjukkan bahwa kedua modifikasi metode Newton berorde konvergensi tiga dan untuk setiap iterasinya memerlukan tiga perhitungan fungsi, sehingga indeks efisiensinya adalah 1.414, yaitu sama dengan metode Newton. Contoh numerik yang diberikan menunjukkan bahwa metode yang diperoleh dapat bersaing dengan metode orde tiga yang sudah ada.

Kata kunci: *metode Newton, metode iterasi, orde konvergensi, persamaan nonlinear.*

1. PENDAHULUAN

Persoalan matematika yang sering dijumpai dalam menyelesaikan akar persamaan nonlinear, dapat ditulis dalam bentuk

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

Metode numerik yang populer digunakan untuk menyelesaikan persamaan (1) adalah Metode Newton, adapun bentuk iterasi metode Newton adalah sebagai berikut

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{2}$$

dengan $f'(x_n) \neq 0$, yang memiliki orde konvergensi kuadratik, [3, h. 86].

Dalam perkembangannya, metode Newton banyak mengalami beberapa modifikasi diantaranya yaitu yang dikembangkan oleh Weerakoon dan Fernando [7], merupakan modifikasi metode Newton dengan Aturan Trapesium, dengan bentuk iterasi

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)}, \\ y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Persamaan (3) memiliki orde konvergensi kubik. Selanjutnya Homeier [4], memodifikasi metode Newton dengan menggunakan fungsi Invers dengan bentuk iterasi

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(y_n)}\right), \\ y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Persamaan (4) juga memiliki orde konvergensi kubik. Selanjutnya Sharma [5], memodifikasi metode Newton yang disebut dengan Metode Newton-Steffensen dengan bentuk iterasi

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f^2(x_n)}{f'(x_n)(f(x_n) - f(y_n))}, \\ y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \end{aligned} \tag{5}$$

Persamaan (5) memiliki orde konvergensi kubik. Selanjutnya Chun [2], mengembangkan dua modifikasi metode Newton yang bebas turunan kedua yang dinamakan Metode Chun Pertama dan Metode Chun Kedua, dengan bentuk iterasi

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{3}{2}\frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} + \frac{1}{2}\frac{f'(y_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2}, \\ y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \end{aligned} \tag{6}$$

dan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\,\frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{f(x_n) + f'(x_n)}\,\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{7}$$

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Persamaan (6) dan persamaan (7) memiliki orde konvergensi kubik.

Selanjutnya Chun [1] mengembangkan modifikasi metode iterasi orde tiga lainnya. Chun menggunakan pasangan metode modifikasi Newton yang sudah ada yaitu metode iterasi yang dikembangkan oleh Sharma [5] dan metode iterasi yang dikembangkan oleh Homeier [4] untuk mendapatkan aproksimasi terhadap $f'(y_n)$, kemudian $f'(y_n)$ yang ditemukan disubtitusikan ke metode modifikasi yang dikembangkan oleh Chun [2] untuk mendapatkan metode konstruksi yang baru.

Pada artikel ini, di bagian dua dibahas metode iterasi konstruksi baru yaitu Metode Konstruksi Pertama dan Metode Konstruksi Kedua yang merupakan review dari artikel Changbum Chun [1], dengan judul *"A Simply Constructed third-order Modifications of Newton's Method"*, kemudian dilanjutkan di bagian tiga dan empat melakukan analisa kekonvergenan dan uji komputasi.

2. KONSTRUKSI SEDERHANA METODE ITERASI BARU ORDE TIGA

Pada bagian ini akan dijelaskan proses terbentuknya metode konstruksi baru.

2.1 Metode Konstruksi Pertama

Untuk mendapatkan Metode konstruksi Pertama dimulai dengan melihat pasangan persamaan yaitu persamaan (4) dan persamaan (5), sehingga diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(y_n)}\right) \approx \frac{f(x_n)^2}{f'(x_n)[f(x_n) - f(y_n)]}. \tag{8}$$

Dari persamaan (8), dengan manipulasi aljabar, diperoleh

$$f'(y_n) \approx \frac{f'(x_n)(f(x_n) - f(y_n))}{f(x_n) + f(y_n)}. \tag{9}$$

Kemudian dengan mensubtitusikan $f'(y_n)$ pada persamaan (9) ke metode Chun Pertama pada persamaan (6), maka diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) + 2f(y_n)}{f(x_n) + f(y_n)}\,\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{10}$$

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{11}$$

Metode iterasi pada persamaan (10) dan persamaan (11) disebut dengan Metode Konstruksi Pertama.

2.2 Metode Konstruksi Kedua
Dengan cara yang sama, $f'(y_n)$ yang diperoleh pada persamaan (9) disubtitusikan ke Metode Chun Kedua persamaan (7) maka diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}\frac{(f'(x_n) - \frac{f'(x_n)(f(x_n) - f(y_n))}{f(x_n) + f(y_n)}}{f(x_n) + f'(x_n)}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{12}$$

Dengan penyederhanaan fungsi (12), diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f(x_n)f(y_n)}{(f(x_n) + f(y_n))(f(x_n) + f'(x_n))} \tag{13}$$

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{14}$$

Metode iterasi pada persamaan (13) dan persamaan (14) disebut dengan Metode Konstruksi Kedua.

3. ANALISA KEKONVERGENAN

Teorema 1 (Orde Konvergensi Metode Konstruksi Pertama)
Misalkan $\alpha \in I$ akar sederhana dari fungsi $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang terdiferensial secukupnya pada interval buka I. Jika x_0 cukup dekat dengan α, maka persamaan (10), dan (11) memiliki orde konvergensi tiga dengan persamaan galat yaitu

$$e_{n+1} = (\frac{1}{2}C_2C_3 + C_2^3)e_n^4 + o(e_n^5). \tag{15}$$

dimana $e_n = x_n - \alpha$ dan $C_k = \dfrac{1}{k!}\dfrac{f^{(k)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $k = 2, 3, \cdots$

Bukti: Misalkan α adalah akar dari fungsi $f(x) = 0$, maka $f(\alpha) = 0$ dan asumsikan $f'(x) \neq 0$, dan misalkan $e_n = x_n - \alpha$, dengan menggunakan ekspansi Taylor untuk nilai $f(x_n)$ disekitar $x_n = \alpha$, diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(\alpha + e_n) \\ &= f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f''(\alpha){e_n}^2 + \frac{1}{3!}f'''(\alpha){e_n}^3 + O(e_n^4). \end{aligned} \tag{16}$$

Karena $f(\alpha) = 0$, maka dengan melakukan manipulasi aljabar pada persamaan (16) diperoleh

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left(e_n + \frac{1}{2!}\frac{f''(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha)} + \frac{1}{3!}\frac{f'''(\alpha)e_n^3}{f'(\alpha)} + o(e_n^4)\right). \tag{17}$$

Perhatikan persamaan (17), misalkan

$$C_k = \frac{1}{k!}\frac{f^{(k)}(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

maka persamaan (17) menjadi

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)). \tag{18}$$

Selanjutnya ekspansi Taylor dari $f'(x_n)$ disekitar $x_n = \alpha$ diperoleh

$$f'(x_n) = f'(\alpha)\left(1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right). \tag{19}$$

Kemudian persamaan (18) dibagi dengan persamaan (19), diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - C_2e_n^2 + (2C_2^2 - 2C_3)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{20}$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (20) ke persamaan (11), diperoleh

$$y_n = \alpha + C_2e_n^2 + 2(C_3 - C_2^2)e_n^3 + O(e_n^4), \tag{21}$$

kemudian, melalui cara yang sama, bentuk ekspansi Taylor dari $f(y_n)$ sampai derajat tiga dan mengabaikan orde yang lebih tinggi, sehingga diperoleh

$$f(y_n) = f'(\alpha)(C_2e_n^2 - (2C_2^2 - 2C_3)e_n^3) + O(e_n^4). \tag{22}$$

Dengan menggunakan persamaan (22) diperoleh

$$2f(y_n) = f'(\alpha)(2C_2e_n^2 - (4C_2^2 - 4C_3)e_n^3) + 0(e_n^4). \tag{23}$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (18) dan persamaan (22) diperoleh

$$f(x_n) + f(y_n) = f'(\alpha)(e_n + 2C_2e_n^2 + (3C_3 - 2C_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)). \tag{24}$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (18) dan persamaan (23) diperoleh

$$f(x_n) + 2f(y_n) = f'(\alpha)(e_n + 3C_2e_n^2 + (5C_3 - 4C_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)). \tag{25}$$

Selanjutnya dari persamaan (24) dan (25) diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{f(x_n) + 2f(y_n)}{f(x_n) + f(x_n)} = {} & (1 + C_2e_n + (2C_3 - 4C_2)e_n^2) - (7C_2C_3 \\ & + 10C_2^3)e_n^3 + O(e_n^4)).\end{aligned} \tag{26}$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (20) dan persamaan (26), diperoleh

$$\frac{f(x_n) + 2f(y_n)}{f(x_n) + f(x_n)}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - 3C_2^2e_n^3 + O(e_n^4). \tag{27}$$

Selanjutnya persamaan (27) disubtituskan ke persamaan (10), diperoleh

$$x_{n+1} = \alpha + 3C_2^2 e_n^3 + O(e_n^4). \tag{28}$$

Karena $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$ maka persamaan (28) menjadi

$$e_{n+1} = 3C_2^2 e_n^3 + O(e_n^4). \tag{29}$$

Dari Definisi orde kekonvergenan [6] maka persamaan (29) adalah persamaan galat dari Metode Konstruksi Pertama yang memiliki orde konvergensi tiga. ■

Teorema 2 (Orde Konvergensi Metode Konstruksi Kedua)
Misalkan $\alpha \in I$ akar sederhana dari fungsi $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang terdiferensial secukupnya pada interval buka I. Jika x_0 cukup dekat dengan α, maka persamaan (13), dan (14) memiliki orde konvergensi tiga dengan persamaan galat yaitu

$$e_{n+1} = 2C_2^2 e_n^3 + 2C_3 e_n^3 + C_2 e_n^3 + O(e_n^4).. \tag{30}$$

dimana $e_n = x_n - \alpha$ dan $C_k = \dfrac{1}{k!}\dfrac{f^{(k)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $k = 2, 3, \cdots$

Bukti: Misalkan α adalah akar dari fungsi $f(x) = 0$, maka $f(\alpha) = 0$ dan asumsikan $f'(x) \neq 0$, dan misalkan $e_n = x_n - \alpha$. Dengan menggunakan persamaan (18) dan persamaan (22), maka diperoleh

$$f(x_n)f(y_n) = (f'(\alpha))^2((c_2 e_n^3) + O(e_n^4)). \tag{31}$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (18) dan persamaan (22), diperoleh

$$f(x_n) + f(y_n) = f'(\alpha)(e_n + 2C_2 e_n^2 + (3C_3 - 2C_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)). \tag{32}$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (18) dan persamaan (19), diperoleh

$$f(x_n) + f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + (1 + 2C_2)e_n + (C_2 + 3C_3)e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)). \tag{33}$$

Kemudian dari persamaan (32) dan persamaan (33), diperoleh

$$\begin{aligned}[f(x_n) + f(y_n)][f(x_n) + f'(x_n)] = (f'(\alpha)^2)(e_n + (1 + 4C_2)e_n^2 + (3C_2 \\ + 6C_3 + 2C_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)).\end{aligned} \tag{34}$$

Kemudian dengan menggunakan persamaan (31) dan persamaan (34), sehingga diperoleh

$$\frac{f(x_n)f(y_n)}{[f(x_n) + f(y_n)][f(x_n) + f'(x_n)]} = C_2 e_n^2 - (4C_2 + C_2)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{35}$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (20) dan persamaan (35) disubtitusikan ke persamaan (13) sehingga diperoleh

$$x_{n+1} = \alpha + (2C_2^2 + 2C_3 + C_2)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{36}$$

Karena $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$ maka persamaan (36) menjadi

$$e_{n+1} = (2C_2^2 + 2C_3 + C_2)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{37}$$

Dari Definisi orde konvergensi [6] maka persamaan (37) adalah persamaan galat dari Metode Konstruksi Kedua yang memiliki orde konvergensi tiga. ■

4. UJI KOMPUTASI

Berikut ini akan dilakukan uji komputasi untuk membandingkan banyak iterasi dari metode Newton (MN), metode Weerakoon (MW), Homeier (MH) persamaan (4), metode Chun Pertama (MC1), metode Chun Kedua (MC2),metode Konstruksi Pertama (MK1) dan metode Konstruksi Kedua (MK2) dalam menemukan akar dari persamaan nonlinear. Dalam melakukan perbandingan ini, persamaan nonlinear yang digunakan adalah:

$f_1 = x^3 + 4x^2 - 10$	$\alpha = 1.3652300134140968$
$f_2 = \sin^2(x) - x^2 + 1$	$\alpha = 1.4044916482153412$
$f_3 = x^2 - e^x - 3x + 2$	$\alpha = 0.2575302854398608$
$f_4 = \cos(x) - x$	$\alpha = 0.7390851332151606$
$f_5 = x^3 - 10$	$\alpha = 2.1544346900318837$
$f_6 = cos(x) - xe^x + x^2$	$\alpha = 0.6391540963320076$

Dalam menentukan solusi numerik dari keenam fungsi di atas diperlukan tebakan awal x_o. Dalam menentukan solusi numerik juga ditentukan kriteria pemberhentin program komputasi yang sama pada setiap metode , yaitu $|f(x_n)| < tol$ dimana tol adalah toleransi sebesar 1.0×10^{-15}. Hasil dari uji komputasi untuk kelima fungsi di atas ditunjukkan pada Tabel berikut.

Secara keseluruhan untuk semua metode iterasi dari uji komputasi yang dilakukan dapat dilihat Metode Konstruksi Pertama dan Metode Konstruksi Kedua lebih cepat dalam mencari akar dari Metode Newton karena jumlah iterasi yang lebih sedikit dan dapat bersaing dengan metode modifikasi Chun. Dari perhitungan COC pada Tabel diatas dapat dilihat orde konvergensi Metode Konstruksi Pertama dan Metode Konstruksi Kedua secara komputasi menunjukkan orde konvergensi tiga. Hal ini sesuai dengan Teorema 1 dan Teorema 2. Secara umum kelima metode yang dibahas berhasil menemukan akar yang diharapkan, akan tetapi metode baru yang diusulkan lebih unggul dari pada metode Newton, baik itu dilihat dari jumlah iterasi, indek efisiensi maupun jika dilihat dari orde konvergensi metode itu sendiri.

Tabel 1: Perbandingan Uji Komputasi untuk MN, MC1, MC2, MK1, dan MK2

Metode	n	COC	x_n	$\|f(x_n)\|$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
	$f_1, x_0 = 1.5$				
MN	4	1.99	1.3652300134140968	$2.04e-18$	$5.02e-10$
MC1	3	2.99	1.3652300134140968	$5.57e-31$	$4.99e-11$
MC2	3	2.99	1.3652300134140968	$5.54e-32$	$2.46e-11$
MK1	3	2.99	1.3652300134140968	$5.45e-26$	$1.66e-09$
MK2	3	2.99	1.3652300134140968	$2.59e-23$	$1.09e-08$
	$f_2, x_0 = 2.0$				
MN	5	1.99	1.4044916482153413	$2.68e-16$	$1.17e-08$
MC1	4	3.00	1.4044916482153412	$1.49e-41$	$2.09e-14$
MC2	4	3.00	1.4044916482153412	$1.77e-40$	$4.93e-14$
MK1	4	2.99	1.4044916482153412	$4.69e-29$	$2.17e-10$
MK2	4	2.99	1.4044916482153412	$2.29e-24$	$7.06e-09$
	$f_3, x_0 = 7.5$				
MN	11	2.00	0.2575302854398607	$3.44e-27$	$9.87e-14$
MC1	8	2.99	0.2575302854398608	$6.10e-34$	$1.63e-11$
MC2	9	3.00	0.2575302854398608	$1.49e-23$	$8.94e-08$
MK1	8	2.99	0.2575302854398608	$1.44e-37$	$1.13e-12$
MK2	9	3.00	0.2575302854398608	$2.29e-29$	$4.48e-10$
	$f_4, x_0 = 1.7$				
MN	4	1.99	0.7390851332151608	$3.92e-16$	$3.26e-08$
MC1	3	3.01	0.7390851332151606	$1.74e-21$	$4.08e-07$
MC2	3	2.99	0.7390851332151606	$2.42e-20$	$6.04e-07$
MK1	3	2.99	0.7390851332151606	$8.22e-23$	$6.95e-08$
MK2	3	3.00	0.7390851332151606	$3.13e-25$	$7.99e-09$
	$f_5, x_0 = 3.5$				
MN	7	1.99	2.0000000000000000	$2.48e-21$	$2.88e-11$
MC1	5	2.99	2.0000000000000000	$9.84e-37$	$6.55e-13$
MC2	5	3.00	2.0000000000000000	$3.77e-42$	$1.11e-14$
MK1	5	2.99	2.0000000000000000	$2.46e-22$	$3.01e-08$
MK2	5	2.99	2.0000000000000000	$6.29e-17$	$1.74e-06$
	$f_6, x_0 = 3.5$				
MN	9	2.00	0.6391540963320076	$4.4e-38$	$1.5e-19$
MW	7	2.99	0.6391540963320076	$5.9e-44$	$3.1e-15$
MO	7	3.00	0.6391540963320076	$4.5e-62$	$4.4e-21$
MK1	7	3.00	0.6391540963320076	$6.4e-36$	$1.4e-09$
MK2	7	3.00	0.6391540963320076	$4.1e-45$	$1.0e-11$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Chun, C. 2008. A Simply Constructed Third-Order Modifications of Newton's Method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **219**:81-89

[2] Chun, C. 2007. Some Third Order Families of Iterative Methods for Solving Nonlinear Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **188**:924-933

[3] Conte, S. D. 1980. *Elementary Numerical Analysis, Third Edition*, McGraw Hill Book Company., New York.

[4] Homeier, H.H.H. 2005. On Newton-type methods with cubic convergence. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **176**:425-432.

[5] Sharma, J.R.2005. A Composite Third Order Newton-Steffensen Method for Solving Nonlinear Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **169**:242-246.

[6] Sharma J.R., R.K. Guha & R. Sharma. 2011. Some Modified Newton's Method with Fourth-Order Convergence. *Applied Science Research*, **169**:240-247

[7] Weerakoon, S & T.G.I. Fernando. 2000.A variant of Newton's Method with Accelerated Third Order Convergence.*Applied Mathematics Letters*, **13**: 87-93.